Теплофизика и аэромеханика, 2009, том 16, № 1

УДК 629.7.025.64:[533.6.013.153+533.6.011.55]

Влияние малых углов атаки и скольжения на момент крена при гиперзвуковом обтекании тел вращения

Ю.А. Мокин

Государственный ракетный центр КБ им. В.П. Макеева, Миасс

E-mail: src@makeyev.ru

Рассматривается влияние малых углов атаки и скольжения на изменение момента крена при сверхзвуковом обтекании тел близких телам вращения. На основе метода дифференциальной гипотезы локальности получены интегральные выражения производных коэффициента момента крена по углам атаки и скольжения. Определено понятие нормы этих производных и получены ее оценки.

Ключевые слова: гиперзвуковое обтекание, тело вращения, малые вариации поверхности, угол атаки, момент крена.

Моделирование движения по крену неуправляемых летательных аппаратов, близких по форме телам вращения, является одной из сложных задач аэродинамики и динамики [1, 2].

В работе [1] в правой части дифференциального выражения, описывающего изменение скорости крена по времени $d\omega_x / dt$ тел вращения с малыми пространственными вариациями поверхности при полете в атмосфере, для учета влияния малых углов атаки используются производные коэффициента момента крена m_x по углам атаки (α) и скольжения (β): m_x^{α}, m_x^{β}.

Уравнение поверхности тела вращения с малыми пространственными вариациями поверхности в цилиндрической системе координат (x, r, φ) имеет вид [3]

$$r(x,\varphi) = y(x) + \varepsilon_r \delta r(x,\varphi), \ (0 \le x \le L), \tag{1}$$

где $y(x)$ — уравнение образующей исходного тела вращения, L — длина тела, ε_r — параметр малости, $\delta r(x,\varphi)$ — слабая пространственная вариация поверхности, предполагающая малость как самой вариации, так и вариаций частных производных $p = \partial r(x,\varphi)/\partial x$, $q = \partial r(x,\varphi)/\partial\varphi$

$$\left|\delta p(x,\varphi)\right| = \left|\frac{\partial\left(\delta r(x,\varphi)\right)}{\partial x}\right| << 1, \ \left|\delta q(x,\varphi)\right| = \left|\frac{\partial(\delta r(x,\varphi))}{\partial\varphi}\right| << 1.$$

Совместно с цилиндрической используется декартова система координат: $x = x$, $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$. Ось x, направленная от носка к заднему торцу, является осью вращения исходной поверхности тела. Составляющие вектора скорости набегающего потока $(V_x,\ V_y,\ V_z)$ удовлетворяют соотношениям

$$V_x > 0\ ,\ \left|V_y / V_x\right| << 1\ ,\ \left|V_z / V_x\right| << 1,$$

характеризующим малость углов атаки $\alpha \approx V_y / V_x$ и скольжения $\beta \approx V_z / V_x$.

В работе [1] на основе представления малых вариаций поверхности тела в виде тригонометрического ряда Фурье

$$\delta r(x,\varphi) = a_0(x)/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(x)\cos\ n\varphi + b_n(x)\sin n\varphi] \tag{2}$$

и теории Ньютона для расчета коэффициента давления c_p на поверхности тела получены интегральные выражения производных m_x^{α}, m_x^{β}. Показано, что m_x^{α} зависит только от коэффициента-функции $b_1(x)$ ряда (2), а m_x^{β} — только от $a_1(x)$.

В настоящей работе получены интегральные выражения производных m_x^{α}, m_x^{β} на основе метода ДГЛ, изложенного в работе [3] и представляющего собой композицию приближенной обобщенной гипотезы локальности с точными численными методами расчета обтекания тел, близких телам вращения, сверхзвуковым потоком газа. Основой метода ДГЛ (дифференциальная форма обобщенной гипотезы локальности) является представление при малых углах атаки величины коэффициента давления

$$c_p(x,\varphi) \equiv \Phi(x,\varphi) = 2(P - P_{\infty}) / \rho_{\infty}V_{\infty}^2$$

на поверхности тела при ее слабых вариациях с использованием формулы Тейлора по тангенсу местного угла атаки $t(x,\varphi) = \tan(\alpha_м(x,\varphi))$ в виде

$$\Phi(x,\ t) = \Phi_0(x) + \Phi_t(x)(t(x,\varphi) - t_0(x)) + \frac{\Phi_{tt}(x)}{2!}(t(x,\varphi) - t_0(x))^2 + \ldots. \tag{3}$$

Здесь $t(x,\ \varphi) = \tan(\alpha_M,\ \varphi)$ — тангенс местного угла атаки, $t_0(x) = p_0(x) = y'(x)$, а коэффициенты-функции $\Phi_0(x)$, $\Phi_t(x)$, $\Phi_{tt}(x)$ определяются для заданной формы тела при заданных условиях обтекания на основе точных численных расчетов по схеме, изложенной в работе [3].

При нулевом угле скольжения β коэффициент давления на поверхности тела является сложной функцией шести аргументов

$$\Phi(x,\varphi) = \Phi(x,\ t(\varphi, r, p, q, \alpha)) \Rightarrow \Phi(x, \varphi, r, p, q, \alpha),$$

где $r = r(x,\varphi)$ определяется выражением (1), $p = \partial r(x,\varphi)/\partial x$, $q = \partial r(x,\varphi)/\partial\varphi$, α — угол атаки. Коэффициент момента крена m_x определяется интегрированием по поверхности [3]

$$m_x = \frac{1}{S_м L}\int_0^L\int_0^{2\pi}\Phi(x,\varphi, r, p, q, \alpha) r(x,\varphi) q(x,\varphi) d\varphi\ dx, \tag{4}$$

где $S_м$ — характерная площадь, площадь миделевого сечения.

Для исходной формы тела вращения ($q = 0$) с плоским кормовым срезом ($L(\varphi) = L = \text{const}$) и сам коэффициент $m_{x_0} = 0,$ и его первая вариация δm_x — первая вариация интеграла (4), равны нулю. Вторая вариация подынтегральной функции (4) $F(x,\varphi,r,p,q,\alpha) = \Phi(x,\varphi,r,p,q,\alpha)rq$ в окрестности точки $(x,\varphi,y(x),$ $y'(x),0,0)$ при вариации поверхности $\delta r(x,\varphi)$ имеет вид

$$\delta^2 F = (\frac{\partial}{\partial r}\delta r + \frac{\partial}{\partial p}\delta p + \frac{\partial}{\partial q}\delta q + \frac{\partial}{\partial \alpha}\delta\alpha)^2 \circ F =$$

$$= [\Phi_{rr}rq + \Phi_r q](\delta r)^2 + 2[\Phi_{rp}rq + \Phi_p q]\delta r\delta p + 2[\Phi_{rq}rq + \Phi_r r + \Phi]\delta r\delta q +$$

$$+2\Phi_{r\alpha}rq\delta r\delta\alpha + \Phi_{pp}rq(\delta p)^2 + 2[\Phi_{pq}rq + \Phi_p r]\delta p\delta q + 2\Phi_{p\alpha}rq\delta p\delta\alpha +$$

$$+[\Phi_{qq}rq + \Phi_q r](\delta q)^2 + 2[\Phi_{q\alpha}rq + \Phi_\alpha r]\delta q\delta\alpha + [\Phi_{\alpha\alpha}rq](\delta\alpha)^2 \overset{(q=0)}{=}$$

$$= 2\{[\Phi_r r + \Phi]\delta r\delta q + \Phi_p r\delta p\delta q + \Phi_q r(\delta q)^2 + \Phi\delta r\delta q + \Phi_p r\delta p\delta q + \Phi_\alpha r\delta q\delta\alpha\}.$$

Окончательное выражение $\delta^2 F$ с использованием коэффициентов-функций формулы (6) и с учетом равенств [3]

$$\Phi_r = 0, \;\; \Phi_q = 0, \;\; \Phi_p = \Phi_t, \;\; \Phi_\alpha = -\Phi_t(1+p^2)\cos\varphi \tag{5}$$

получаем в виде

$$\delta^2 F = 2(\Phi_0\delta r\delta q + \Phi_t r\delta p\delta q - \Phi_t(1+p^2)r\cos\varphi\delta q\delta\alpha).$$

Величина коэффициента момента крена тела с малыми вариациями поверхности под углом атаки приближенно равна

$$m_x \approx \frac{1}{2}\delta^2 m_x = \frac{1}{2S_{\text{м}}\;\;L}\int_0^L\int_0^{2\pi}\delta^2 F d\varphi dx \;\; =$$

(6)

$$= \frac{1}{S_{\text{м}}L}\int_0^L\int_0^{2\pi}[\Phi_0(x)\delta r\delta q + \Phi_t(x)\delta p\delta q - \Phi_t(x)(1+p^2)r\cos\varphi\delta q\delta\alpha]\,dx\,d\varphi.$$

Интеграл от первого слагаемого ввиду равенства $\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{df}{d\varphi}d\varphi = 0,$ справедливого для любой непрерывной функции при $f(0) = f(2\pi),$ для тел с плоским кормовым срезом равен нулю. Интеграл от второго слагаемого в (6) определяет классический “винт”, момент крена при $\alpha = 0,$ реализующийся за счет переменности по длине тела величин фазового угла $\psi_n(x)$ n-й гармоники вариации поверхности (2), независимый от вариации угла атаки.

Интеграл от последнего слагаемого в (6) определяет приращение момента крена за счет угла атаки, поэтому ввиду равенства $\delta\alpha = \alpha = \text{const}$ влияние угла атаки на m_x можно оценить производной

$$m_x^\alpha = \frac{-1}{S_{\text{м}}L}\int_0^L\int_0^{2\pi}\Phi_t(x)r(x)(1+p^2(x))\cos\varphi\delta q(x,\varphi)d\varphi dx. \tag{7}$$

С учетом свойства ортогональности тригонометрической системы функций и равенств

$$\delta q(x,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}[-a_n(x)\sin n\varphi + b_n(x)\cos n\varphi]\,n,\quad r(x)=y(x),\quad p(x)=y'(x),$$

выражение (7) после интегрирования по углу φ принимает окончательный вид

$$m_x^{\alpha}=\frac{-\pi}{S_{\text{м}}L}\int_0^L \Phi_t(x)y(x)(1+y'^2(x))b_1(x)\,dx. \tag{8}$$

Аналогичное выражение для производной коэффициента момента крена по углу скольжения имеет вид

$$m_x^{\beta}=\frac{\pi}{S_{\text{м}}L}\int_0^L \Phi_t(x)y(x)(1+y'^2(x))a_1(x)\,dx. \tag{9}$$

Соотношения (8), (9) подтверждают вывод работы [1] о зависимости изменения момента крена при малых углах атаки только от первых гармоник $a_1(x),\ b_1(x)$ разложения вариации поверхности в ряд Фурье (2), отличаясь большей общностью, физической наглядностью механизма реализации дополнительного момента крена, простотой и компактностью.

В частном случае использования для расчета давления теории Ньютона $\Phi=2\sin^2\alpha_{м}\ \Rightarrow \Phi(t)=2t^2/(1+t^2)\Rightarrow \Phi_t=4t/(1+t^2)^2=4y'(x)/(1+y'^2(x))^2$ выражения (8), (9) с точностью до замены независимых переменных (x, φ) на (r, φ) и радиальной вариации поверхности на продольную ($\delta x=-\delta r/y'$) эквивалентны соответствующим выражениям работы [1].

Если на множестве вариаций поверхности тела $\delta r(x,\varphi)$ определить норму

$$\|\delta r(x,\varphi)\|=\max_{0\le x\le L,\ 0\le\phi\le 2\pi}|\delta r(x,\varphi)|/R,$$

где R — характерный радиальный размер (радиус миделевого сечения), то выражения (8), (9) представляют собой линейные операторы-функционалы на этом линейном нормированном пространстве вариаций поверхности.

С точки зрения оценки максимально возможных величин производных m_x^{α}, m_x^{β} при заданном ограничении величин вариаций поверхности представляет интерес задача определения нормы этих операторов

$$\|m_x^{\alpha}\|=\|m_x^{\beta}\|=\sup_{\delta r(x,\varphi)}\frac{|m_x^{\alpha}|}{\|\delta r(x,\varphi)\|}.$$

С учетом не отрицательности производной $\Phi_t(x)\ge 0$ и того очевидного обстоятельства, что наибольшая величина амплитуды первой гармоники $b_1(x)$ реализуется для вариации поверхности вида

$$\delta r(x,\varphi)=R\|\delta r(x,\varphi)\|\cdot\operatorname{sgn}(\sin\varphi),$$

для которой $b_1(x)=\dfrac{4R}{\pi}\cdot\|\delta r(x,\varphi)\|=\text{const}$, эта задача имеет простое решение:

$$\left\| m_x^{\alpha} \right\| = \frac{4R}{S_{\text{м}} L} \int_0^L \Phi_t(x) y(x)(1 + y'^2(x))\, dx. \tag{10}$$

Коэффициент нормальной силы c_y в рамках метода ДГЛ определяется интегральным выражением [3]

$$c_y = \frac{-1}{S_{\text{м}}} \int_0^L \int_0^{2\pi} \Phi(x, \varphi, r, p, q, \alpha)[r(x, \varphi)\cos\varphi + q(x, \varphi)\sin\varphi]\, d\varphi\, dx. \tag{11}$$

Для исходной формы тела ($q \equiv 0$) производная c_y^{α} определяется первой вариацией интеграла (11) по углу атаки $\delta\alpha = \alpha,$ то есть с учетом (5) —

$$c_y^{\alpha} = \frac{\pi}{S_{\text{м}}} \int_0^L \Phi_t(x) y(x)(1 + y'^2(x))\, dx.$$

Поэтому выражение (10) может быть представлено в виде равенства

$$\left\| m_x^{\alpha} \right\| = \frac{4R}{\pi L} c_y^{\alpha}, \tag{12}$$

связывающего норму производной m_x^{α} (тела с малыми вариациями поверхности) с производной нормальной силы по углу атаки c_y^{α} исходного тела.

Зависимость (12) имеет чисто механическую основу. Приращения момента крена и нормальной силы при угле атаки обусловлены одной и той же причиной: разностью вариаций давления на наветренной и подветренной сторонах тела, величины которых определяются коэффициентом-функцией $\Phi_t(x)$ зависимости (4). В связи с этим зависимость (12), полученная в рамках метода ДГЛ, является, по-видимому, справедливой и в рамках любых других моделей обтекания, в которых определяющий вклад в величины аэродинамических сил и моментов вносят силы давления.

Указанная связь производных m_x^{α}, m_x^{β} и $c_n^{\alpha} = c_y^{\alpha} = c_z^{\beta}$ дает возможность при моделировании углового движения по крену летательных аппаратов с малыми искажениями поверхности вместо производных m_x^{α}, m_x^{β} использовать линейные величины $\Delta y_f = (-m_x^{\alpha} / c_n^{\alpha})L$, $\Delta z_f = (m_x^{\beta} / c_n^{\alpha})L$, которые следует интерпретировать как величины поперечного смещения с продольной оси фокуса дополнительной аэродинамической силы при наличии малых углов атаки и скольжения. Можно ожидать, что линейные величины Δy_f, Δz_f в большей степени определяются геометрией вариации поверхности, в меньшей — условиями обтекания (числами M_{∞}, Re_{∞}), и являются более стабильными мало изменяющимися параметрами при изменении условий обтекания, чем производные m_x^{α}, m_x^{β} и c_y^{α} по отдельности.

Удобство использования величин смещения аэродинамического фокуса Δy_f, Δz_f проявляется в большей степени в тех случаях, когда одновременно с малыми искажениями поверхности летательного аппарата имеет место поперечное смещение его центра масс Δy_m, Δz_m [2]. Тогда при вычислении момента крена относительно продольной оси, проходящей через центр масс, вместо раздельного учета влияния на m_x смещений Δy_m, Δz_m и производных m_x^α, m_x^β можно использовать разности соответствующих смещений аэродинамического фокуса и центра масс Δy_f и Δy_m, Δz_f и Δy_m, определяющие эффективные плечи аэродинамических сил c_y, c_z относительно оси вращения по крену.

В случаях, когда малые искажения поверхности и смещение центра масс обусловлены одной и той же причиной, например неравномерной односторонней абляцией поверхности летательного аппарата, может иметь место положительная корреляция этих смещений, приводящая к уменьшению эффективного плеча.

В частности, если плотность уносимого покрытия близка средней плотности летательного аппарата, при односторонней абляции возможна почти полная компенсация вкладов смещений аэродинамического фокуса и центра масс в возмущающий момент крена.

Выводы:

– в рамках метода ДГЛ получены интегральные выражения производных коэффициента момента крена по углам атаки и скольжения (m_x^α, m_x^β), удобные для получения их численных оценок. В частном случае использования приближенной теории Ньютона показано их соответствие с результатами работы [1],

– сформулировано определение нормы производных $\left\|m_x^\alpha\right\|$, $\left\|m_x^\beta\right\|$ и получено выражение для ее вычисления. Получена зависимость и показана связь коэффициентов m_x^α, m_x^β с производной подъемной силы по углу атаки c_y^α (c_n^α) тела исходной формы,

– показана возможность использования при моделировании влияния углов атаки и скольжения на момент крена тел с малыми искажениями поверхности наряду с производными m_x^α, m_x^β линейных величин Δy_f, Δz_f смещения фокуса дополнительной аэродинамической силы с продольной оси тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ярошевский В.А.** Движение неуправляемого тела в атмосфере. — М.: Машиностроение, 1978. — 168 с.
2. **Правдин В.М., Шанин А.П.** Баллистика неуправляемых летательных аппаратов. — Снежинск, Изд-во РФЯЦ–ВНИИТФ, 1999. — 496 с.
3. **Мокин Ю.А.** О возможностях решения задач гиперзвуковой аэродинамики на основе дифференциальной формы представления обобщенной гипотезы локальности и ее композиции с точными численными методами. Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИмаш. — 2008. — Вып. 2(51). — С. 136–145.

Статья поступила в редакцию 10 апреля 2008 г.