УДК 539.3

А.Ф. Глебов

ПОЛЯРИЗАЦИЯ И СКОРОСТИ УПРУГИХ ВОЛН В СРЕДАХ СО СТРЕСС-ИНДУЦИРОВАННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Среди экспериментальных методов исследования напряженного состояния природных и искусственных материалов все большее внимание [1—17] начинает уделяться группе методов, основанных на сейсмо- или акустоупругом эффекте. Первые попытки сформулировать общую строгую теорию распространения акустических волн в упругой среде под давлением сделаны в 40-е годы [1,2]. В [3] были получены выражения для скоростей P- и S-волн, распространяющихся в деформируемом изотропном теле вдоль и поперек одноосной нагрузки. При этом даже для малых величин предварительных напряжений оказалось необходимым учитывать упругие модули не только 2-го, но и 3-го порядка [4]. Нелинейную теорию упругости [4] для конечных деформаций берут за основу и другие исследователи [5—17], анализирующие влияние статических напряжений на скорости упругих волн.

Однако, несмотря на большое количество публикаций, использование поляризационно-кинематических характеристик упругих волн для оценки напряжений до сих пор находится в начальной стадии. В данной работе на основе метода возмущений [18,19] получены приближенные аналитические выражения для индикатрис фазовых скоростей и векторов поляризации квазипродольных и квазипоперечных волн, распространяющихся в средах со стресс-индуцированной анизотропией. Стресс-индуцированная анизотропия понимается здесь в узком смысле как способность упругих изотропных материалов приобретать при деформировании анизотропию акустических свойств, т.е. предполагается, что при нулевых деформациях анизотропией, обусловленной структурно-вещественным составом, можно пренебречь.

Полученные приближенные уравнения необходимы при оценке параметров сложнонапряженного состояния и упругих модулей третьего порядка. Возможность их использования оценивается путем сопоставления результатов расчета по точным и приближенным формулам.

1. Пьезоакустический тензор и пьезоакустические постоянные. Фазовые скорости v и векторы поляризации $\mathbf{a} = (a_l)$ qP- и qS-волн находят, как известно [11], путем определения собственных значений и собственных векторов акустического тензора L_{il}:

$$L_{il}a_l - v^2 a_i = 0, \quad L_{il} = \hat{c}_{ij,kl}n_j n_k \tag{1.1}$$

($\mathbf{n}$ — орт нормали к фронту волны). В нагруженной среде упругие постоянные $\hat{c}_{ij,kl}$ имеют смысл эффективных упругих постоянных, которые связаны с тензором напряжений t_{jk} и с тензором пьезоакустических модулей $c_{mn,pq}$ известными соотношениями [11]

$$\hat{c}_{ij,kl} = S_{ij,kl} + \delta_{il}t_{jk}, \quad t_{jk} = c_{mn,pq}\varepsilon_{mn}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_p}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_q}, \tag{1.2}$$

$$S_{ij,kl} = c_{mn,pq}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_m}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_n}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_p}\frac{\partial x_l}{\partial \xi_q}, \quad \varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_p}{\partial \xi_m}\frac{\partial x_p}{\partial \xi_n} - \delta_{mn}\right),$$

где x_k — лагранжевы координаты среды, подверженной сложнонапряженному состоянию; ξ_k — лагранжевы координаты среды без напряжений; ε_{mn} — компоненты тензора деформаций; δ_{ik} — символ Кронекера. Здесь и далее величины упругих постоянных $\hat{c}_{ij,kl}$, $S_{ij,kl}$, $c_{mn,pq}$ и напряжений t_{jk} нормируются значением объемной плотности.

В дальнейшем, чтобы различать влияние сложнонапряженного состояния t_{jk} от гидростатического давления $(\sigma\delta_{jk})$, будем представлять все тензоры в виде суммы двух тензоров, один из которых зависит от шаровой части $(\varepsilon/3)\delta_{jk}$, а другой — от девиатора тензора деформаций e_{jk}:

$$(1.3)\qquad \varepsilon_{jk} = (\varepsilon/3)\delta_{jk} + e_{jk},\ e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0,$$
$$t_{jk} = \sigma_{jk}(\varepsilon) + \tau_{jk}(e_{jk}).$$

Исходя из данного Мурнаганом [4] представления в виде кубической формы упругого потенциала Σ изотропной среды:

$$(1.4)\qquad \Sigma = -p_0\varepsilon + \frac{\lambda + 2\mu}{2}\varepsilon^2 - 2\mu d + \frac{l + 2m}{3}\varepsilon^3 - 2m\varepsilon d + nD,$$

где p_0 — начальное гидростатическое давление, соответствующее нулевым деформациям; λ, μ — константы Ламэ; l, m, n — константы Мурнагана, отвечающие за существенно нелинейный характер зависимости напряжений от деформаций; ε, d, D — три инварианта тензора деформаций:

$$(1.5)\qquad \varepsilon = Sp(\varepsilon_{jk}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$
$$d = \left(\varepsilon^2 - \sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{jk}^2\right) = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{23}^2,$$
$$D = \det(\varepsilon_{jk}) = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2,$$

для пьезоакустических модулей $c_{mn,pq}$ с учетом (1.2)—(1.5) можно получить следующее выражение:

$$(1.6)\qquad c_{mn,pq} = \frac{\partial^2\Sigma}{\partial\varepsilon_{mn}\partial\varepsilon_{pq}} = \Lambda_{mn,pq} + M_{mn,pq}(\varepsilon_{jk}),$$
$$\Lambda_{mn,pq} = \lambda\delta_{mn}\delta_{pq} + \mu(\delta_{mp}\delta_{nq} + \delta_{mq}\delta_{np}),$$
$$M_{mn,pq}(\varepsilon_{jk}) = 2(l - m/3 + n/6)\varepsilon\delta_{mn}\delta_{pq} + (m - n/6)\varepsilon(\delta_{mp}\delta_{nq} + \delta_{mq}\delta_{np}) +$$
$$+ (2m - n)(\delta_{mn}e_{pq} + \delta_{pq}e_{mn}) +$$
$$+ (n/2)(\delta_{mp}e_{nq} + \delta_{nq}e_{mp} + \delta_{mq}e_{np} + \delta_{np}e_{mq}).$$

Далее будем предполагать, что предварительно напряженное состояние с достаточной степенью точности описывается только линейными членами тензора деформаций; тогда после подстановки (1.6) в (1.2) тензор напряжений t_{jk} и тензор $S_{ij,kl}$ запишем в виде

$$(1.7)\qquad t_{jk} = \Lambda_{jk,mn}\varepsilon_{mn};\ S_{ij,kl} = S^0_{ij,kl} + S^e_{ij,kl},$$
$$S^0_{ij,kl} = [\lambda + 2(2\lambda/3 + l - m/3 + n/6)\varepsilon]\delta_{ij}\delta_{kl} +$$
$$+ [\mu + (4\mu/3 + m - n/6)\varepsilon](\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$
$$S^e_{ij,kl} = (2\lambda + 2m - n)(\delta_{ij}e_{kl} + \delta_{kl}e_{ij}) +$$
$$+ (2\mu + n/2)(\delta_{ik}e_{jl} + \delta_{jl}e_{ik} + \delta_{il}e_{jk} + \delta_{jk}e_{il}).$$

Подставляя (1.7) в (1.1), для пьезоакустического тензора L_{il} имеем

$$(1.8)\qquad L_{il} = L^0_{il} + L^e_{il},$$
$$L^0_{il} = [\mu + (\lambda + 2\mu + m - n/6)\varepsilon]\delta_{il} +$$
$$+ [\lambda + \mu + (4\lambda + 4\mu + 6l + m + n/2)\varepsilon/3]n_in_l,$$
$$L^e_{il} = (2\mu + n/2)e_{il} + (4\mu + n/2)\delta_{il}(e_{jk}n_jn_k) +$$
$$+ 2(\lambda + \mu + m - n/4)(n_in_ke_{kl} + e_{ik}n_kn_l).$$

Заметим, что первое слагаемое описывает изменение акустического тензора от деформации объема, а второе обуславливает появление акустической анизотропии при деформации формы. На основе закона Гука (1.7) дилатация ε и девиатор деформации связаны с тензором напряжения простыми соотношениями

Материал	λ	μ	ρ_0, г/см^3	α_P	α_S	β_P	β_S
	ГПа						
Гранит (сухой) [15]	21,16	18,38	2,65	−3546	−1219	−706,5	−42,34
Гранит (влажный) [16]	29,7	25,3	2,66	−1330	−267,6	−656,7	−123,0
Полистерол [3]	2,89	1,38	1,06	−34,64	−4,47	−9,65	−0,41
Стеклопирекс [3]	13,5	27,5	—	25,81	8,52	12,67	2,41
Армко-железо [3]	110	82	—	−28,05	−17,11	−17,44	2,18
Железо [6]	113	81	—	−14,49	−4,16	−10,85	−1,80
Медь [6]	105	47	—	−15,91	−3,27	−16,40	−3,65
Сталь [17]	115,8	79,8	—	−14,03	−4,06	−7,71	−0,62
Водонефтяная эмульсия [20]	1,56	0	—	−1556	0	0	0

(1.9) $$t_{jk} = \sigma\delta_{jk} + \tau_{jk},\ \sigma = (\lambda + 2/3\mu)\varepsilon,\ \tau_{jk} = 2\mu e_{jk}.$$

Подставляя (1.9) в (1.8) для пьезоакустического тензора L_{il} получим

(1.10) $$L^0_{il} = [\mu + \alpha_S\sigma]\delta_{il} + [\lambda + \mu + (\alpha_P - \alpha_S)\sigma]n_in_l,$$
$$L^c_{il} = 2\beta_S\tau_{il} + (1 + 2\beta_S)\delta_{il}(\tau_{jk}n_jn_k) +$$
$$+ (\beta_P - 1 - 4\beta_S)(n_in_k\tau_{kl} + \tau_{ik}n_kn_l)/2,$$

где α_P, α_S, β_P, β_S — пьезоакустические константы:

(1.11) $$\alpha_P = (7\lambda + 10\mu + 6l + 4m)/(3\lambda + 2\mu),$$
$$\beta_P = (2\lambda + 5\mu + 2m)/\mu,$$
$$\alpha_S = (3\lambda + 6\mu + 3m - n/2)/(3\lambda + 2\mu),$$
$$\beta_S = (4\mu + n)/(8\mu).$$

Заметим, что $\beta_P = 2[\alpha_S(3\lambda + 2\mu)/\mu + 4\beta_S - 1/2]/3$. В таблице для некоторых материалов приведены значения пьезоакустических констант (1.11), рассчитанные по данным экспериментального изучения скоростей упругих волн при всестороннем и одноосном нагружении [3, 6, 15—17, 20].

2. Скорости и векторы поляризации qP- и qS-волн при трехосном нагружении. В этом случае фазовые скорости и векторы поляризации qP- и qS-волн весьма сложным образом зависят от девиатора тензора деформаций. Если предположить, что деформация формы по сравнению с общей деформацией объема является эффектом более высокого порядка (т.е. $\varepsilon \gg e_{jk}$ и $L^0_{il} \gg L^c_{il}$), то для получения приближенных аналитических выражений фазовых скоростей и векторов поляризации qP- (v_3, a_{i3}) и qS-волн (v_1, a_{i1}), (v_2, a_{i2}) можно использовать линейное приближение метода возмущений [18, 19]:

(2.1) $$v_3^2 = D_{33},\ v_{1,2}^2 = (D_{11} + D_{22} \pm \sqrt{(D_{22} - D_{11})^2 + 4(D_{12})^2})/2;$$

(2.2) $$a_{i3} = b_{i3} + \Delta(b_{i2}\sin\Gamma + b_{i1}\cos\Gamma),$$
$$a_{i2} = -\Delta\sin(\Gamma - \gamma)b_{i3} + \{b_{i2}\cos(\hat{\Gamma} - \gamma) + b_{i1}\sin(\hat{\Gamma} - \gamma)\}/\cos\hat{\Gamma},$$
$$a_{i1} = -\Delta\cos(\Gamma - \gamma)b_{i3} + \{-b_{i2}\sin(\hat{\Gamma} - \gamma) + b_{i1}\cos(\hat{\Gamma} - \gamma)\}/\cos\hat{\Gamma};$$

(2.3) $$\operatorname{tg}\Gamma = D_{23}/D_{13},\ \Delta = \sqrt{D^2_{23} + D^2_{13}}/(\hat{v}^2_P - \hat{v}^2_S),$$
$$\operatorname{tg}2\gamma = 2D_{12}/(D_{11} - D_{22}),\ \operatorname{tg}\hat{\Gamma} = -\Delta^2\sin 2(\Gamma - \gamma)/(2\Omega),$$
$$\Omega = \sqrt{(D_{22} - D_{11})^2 + 4(D_{12})^2}/(\hat{v}^2_P - \hat{v}^2_S);$$

(2.4) $$D_{nr} = \sum_{i,k=1}^{3} b_{in}L_{ik}b_{kr} = \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \hat{c}_{ij,kl}b_{in}n_jn_lb_{kr}.$$

Здесь $\hat{v}_S^2 = \mu + \alpha_S\sigma$, $\hat{v}_P^2 = \lambda + 2\mu + \alpha_P\sigma$ — собственные значения; $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ — собственные векторы пьезоакустического тензора L_{il}^0 (фазовые скорости и векторы поляризации SV-, SH-, P-волн в изотропной среде):

$$(2.5) \qquad b_{i1} = (\cos\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\cos\theta, -\sin\theta),$$
$$b_{i2} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),$$
$$b_{i3} = n_i = (\cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta).$$

Для получения приближенных аналитических выражений времен пробега qP- и qS-волн в однородной среде также можно использовать метод возмущений [18,19]:

$$(2.6) \qquad t_r(\mathbf{l}) = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}/v_r(\varphi,\theta),\ \operatorname{tg}\varphi = l_y/l_x,\ \operatorname{tg}\theta = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}/l_z$$

($\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z)$ — вектор, соединяющий источник и приемник). Подставляя (2.5) в (2.4), для элементов матрицы D_{nr} получим

$$(2.7) \qquad D_{11} = \hat{v}_S^2 + 2\beta_S T_{11} + (1 + 2\beta_S)T_{33},\ D_{12} = 2\beta_S T_{12},$$
$$D_{22} = \hat{v}_S^2 + 2\beta_S T_{22} + (1 + 2\beta_S)T_{33},\ D_{23} = ((\beta_P - 1)/2)T_{23},$$
$$D_{33} = \hat{v}_P^2 + \beta_P T_{33},\ D_{13} = ((\beta_P - 1)/2)T_{13},\ T_{nr} = \sum_{i,k=1}^{3} b_{in}\tau_{ik}b_{kr}.$$

Таким образом, на основе (2.1)—(2.3), (2.7) приближенные выражения для фазовых скоростей и векторов поляризации можно выписать в виде

$$(2.8) \qquad v_3^2(\mathbf{n}|\tau_{ik}) = \hat{v}_P^2 + \beta_P\sigma_{nn},\ \sigma_{nn} = T_{33},\ v_{1,2}^2(\mathbf{n}|\tau_{ij}) =$$
$$= \hat{v}_S^2 + \sigma_{nn} - \beta_S\sigma_{n_kn_k}, \sigma_{n_kn_k} = (T_{11} + T_{22} \pm \sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2}),$$
$$\operatorname{tg}\Gamma = T_{23}/T_{13},\ \operatorname{tg}2\gamma = 2T_{12}/(T_{11} - T_{22}),$$
$$\Delta = [(\beta_P - 1)/(\hat{v}_P^2 - \hat{v}_S^2)]\eta/2,\ \eta = \sqrt{T_{13}^2 + T_{23}^2},$$
$$\operatorname{tg}\hat{\Gamma} = -\Delta^2\sin 2(\gamma - \Gamma)/(2\Omega),$$
$$\Omega = [2\beta_S/(\hat{v}_P^2 - \hat{v}_S^2)]\rho,\ \rho = \sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2},$$

где $v_3(\hat{\mathbf{n}})$ и $\hat{v}_{1 2}(\mathbf{n})$ — индикатрисы скоростей qP- и qS-волн в нагруженной среде; v_P и v_S — скорости P- и S-волн, зависящие от величины гидростатического давления; σ_{nn} — нормальное девиаторное напряжение, действующее на площадку, перпендикулярную направлению распространения $\mathbf{n}$; $\sigma_{n_1n_1}$ и $\sigma_{n_2n_2}$ — максимальное и минимальное нормальные девиаторные напряжения, действующие на площадках с нормалями, перпендикулярными к направлению распространения $\mathbf{n}$; η — касательное девиаторное напряжение, действующее на площадку, перпендикулярную направлению распространения $\mathbf{n}$; Γ — азимут касательного напряжения; ρ — максимальное касательное девиаторное напряжение, действующее на площадках с нормалями, перпендикулярными к направлению распространения $\mathbf{n}$; γ — азимут этого касательного напряжения. Заметим, что если $\Omega = 0$, то $\gamma = \Gamma$ и $\hat{\Gamma} = 0$. При известных λ, μ по скорости продольных волн возможно определение только двух упругих модулей третьего порядка: l и m, по данным поперечных волн — тоже двух: m и n.

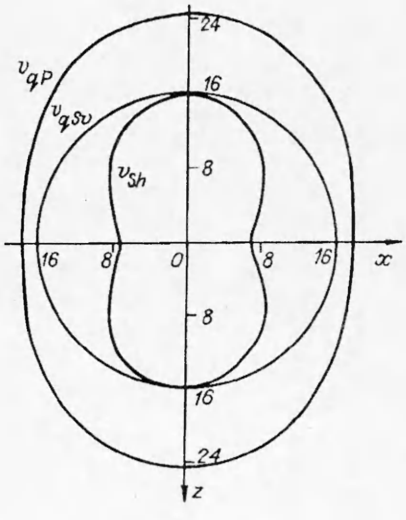

Рис. 1

На основе полученного выражения для пьезоакустического тензора (1.10) рассчитаны величины фазовых скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн (рис. 1) в образце гранита с параметрами $v_P = 5{,}5$ км/с, $v_S = 3{,}1$ км/с, $\rho_0 = 2{,}66$ г/см³, $\alpha_P = -1330$, $\alpha_S = -268$, $\beta_P = -657$, $\beta_S = -123$ при двуосной нагрузке (осевое давление $\sigma_0 = 40$ МПа, боковое $\sigma_1 = 20$ МПа), а на рис. 2 представлены погрешности расчета скоростей по приближенным формулам (2.8) и отклонения вектора поляризации qP-волны от направления распространения. Отсюда можно заключить, что при двуосной нагрузке приближенное выражение (2.8) для qSh-волны совпадает с точным (qSh-волна является чисто поперечной Sh-волной), для qP- и qSv-волн приближенные выражения совпадают с точными в направлениях главных осей нагружения, так как в этих направлениях распространяются чисто продольные и чисто поперечные волны; максимальные погрешности при вычислениях по приближенным формулам возникают на направлениях, составляющих 45° с направлением главных осей нагружения. Однако абсолютные значения таких погрешностей (рис. 2) даже при достаточно сильном отклонении напряженного состояния от всестороннего сжатия ($\sigma_0 = 40$ МПа, $\sigma_1 = 20$ МПа) не превосходят 4 м/с для qP- и 7 м/с для qSv-волн. Отсюда можно сделать вывод о достаточно высокой точности полученного приближения.

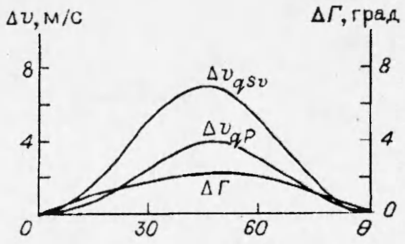

Рис. 2

Для оценки интенсивности девиаторных напряжений τ_{ij} относительно нормального напряжения τ_{33}, действующего на горизонтальную площадку, по данным изучения скоростей (2.8) можно использовать формулу

$$\tau_{ij} = \tau_{33}\frac{3W_{ij} - \delta_{ij}(W_{11} + W_{22} + W_{33})}{2W_{33} - W_{11} - W_{22}},$$

где W_{ij} — параметры эллиптической аппроксимации, индикатрис скоростей qP-волн v_3 или средних скоростей qS-волн $(v_1 + v_2)/2$. Оценку абсолютных значений напряжений можно найти путем дополнительных измерений нормального напряжения τ_{33} или пьезоакустической константы β.

Таким образом, полученные в данной работе соотношения могут служить теоретической основой для развития сейсмоакустических методов исследования сложнонапряженного состояния упругих материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Biot M.A.** The influence of initial stress on elastic waves // J.Appl.Phys. — 1940. — V. 11. — P. 522—530.
2. **Birch F.** Finite elastic strain of cubic crystals // Phys. Rev. — 1947. — V. 71. — P. 809—824.
3. **Hughes D.S., Kelly J.L.** Second-order elastic deformation of solids // Phys. Rev. — 1953. — V. 92, N 5. — P. 1145—1149.
4. **Murnaghan F.D.** Finite deformation of an elastic solids. — N.Y.: J.Wiley, 1951.
5. **Seeger A., Mann E.** Anwendung der nichtlinearen Elastizitatstheorie auf Fehlstellen in Kristallen // Z.Naturforschg. — 1959. — Bd 14a. — S. 154—164.
6. **Seeger A., Buck O.** Die Ermittelung der elastischen Konstanten horer Ordnung // Z. Naturforschg. — 1960. — Bd 15a. — S. 1056—1067.
7. **Truesdel C., Noll W.** Non-linear field theories of mechanics // Encyclopedia of Physics-Handbuch der Physik // Ed. by S. Flugge. — Berlin: Springer, 1965. — V. 111/3.
8. **Tokuoka T., Iwashimizu Yn.** Acoustical birefringence of ultrasonic waves in deformed isotropic elastic materials // Int. J. Solids Structures. — 1968. — V. 4. — P. 383—389.
9. **Костров Б.В., Никитин Л.В.** Влияние предварительно напряженного состояния на распространение плоских сейсмических волн// Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1968. — Т. 9. — С. 30—38.
10. **Nicitin L.V., Chesnocov E.M.** Wave propagation in elastic media with stress-induced anisotropy // Geophys. J. Astron. Soc. — 1984. — V. 76, N 1. — P. 129—133.

11. **Петрашень Г.И.** Распространение волн в анизотропных упругих средах. — Л.: Наука, 1980.
12. **Tolstoy I.** On elastic waves in prestressed solids // J. Geophys. Res. — 1982. — V. 87, N B8. — P. 6823—6827.
13. **Engelhard L.** Stress-induced anisotropy in elastic media // Geophys. Trans. — 1988. — N 1. — P. 59—81.
14. **Norris A.N.** Propagation of plane waves in pre-stressed medium // J.Acoust.Soc. Amer. — 1983. — V. 74, N 5. — P. 1642—1643.
15. **Aggson J.R.** The potential application of ultrasonic spectroscopy to underground site characterization. — San Francisco, 1978. — (Prepr. 48th Annual meeting of the SEG, 1978).
16. **Egle D.M., Bray D.E.** Measurement of acoustoelastic and third order elastic constants for rail steel // J.Acoust. Soc. Amer. — 1976. — V. 60, N 3. — P. 741—744.
17. **Nur A., Simmons G.** Stress-induced velocity anisotropy in rock: an experimental study // J. Geophys. Res. — 1969. — V. 74, N 27. — P. 6667—6674.
18. **Backus G.E.** Possible forms seismic anisotropy of the uppermost mantle under oceans // J. Geophys. Res. — 1965. — V. 70. — P. 3429—3439.
19. **Глебов А.Ф.** Поляризация квазипродольных и квазипоперечных волн в анизотропных средах // Геология и геофизика. — 1994. — № 2.
20. **Беляков В.Л.** Автоматический контроль параметров нефтяных эмульсий: Справочное пособие. — М.: Недра, 1992.

г. Новосибирск *Поступила 12/V 1993 г.*

УДК 621.762

А.Л. Максименко, Е.А. Олевский

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Термин нестационарные задачи в работе используется в смысле, предложенном в [1]. Речь идет об исследовании медленных эволюционных процессов деформирования жесткопластической среды. Определенный опыт решения таких задач накоплен в теории обработки давлением пористых и порошковых материалов. Подходы, развиваемые в теории сжимаемых пластических сред, позволяют по-новому взглянуть и на решение классических задач теории пластичности, рассматривая несжимаемый материал как материал предельно малой сжимаемости. Для нахождения полей скоростей в данной работе используются вариационные принципы теории пластического течения.

1. Особенности эволюционных задач теории пластичности. Наиболее простая схема решения задач, в которых необходимо проследить эволюцию пластического деформирования материала в процессе его нагружения, предложена, например, в [1]. Для выяснения картины течения необходимо задаться некоторым шагом изменения параметра нагрузки Δt, найти мгновенные скорости в объеме материала, проследить изменение геометрии течения и параметров упрочнения, снова найти скорости и т.д. Главные препятствия, возникающие на пути реализации такого подхода, связаны с тем, что поле скоростей в жесткопластическом материале определяется, вообще говоря, неединственным образом. При численном моделировании эта неединственность проявляется как некорректность, т.е. малые изменения параметров задачи приводят к большим изменениям поля скоростей. Например, в задаче о внедрении штампа в жесткопластическое однородное несжимаемое полупространство как угодно малая вариация предела текучести в области, прилегающей к штампу, резко меняет скорости материала. При этом симметричное относительно штампа поле скоростей может, например, переходить в несимметричное. Достаточное число примеров такого рода приведено в [2]. Некорректность, в свою очередь, влечет неопределенность в выборе шага Δt. Понятно, что чем с большей скоростью происходит процесс,