УДК 678.06 : 621 — 567 : 620.175.22

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПРИЗМЫ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ РАСТЯЖЕНИИ – СЖАТИИ

В. Г. Карнаухов, И. К. Сенченков

(*Киев*)

Задача о вибрационном теплообразовании имеет важное значение при исследовании работоспособности вязкоупругих элементов конструкций, подверженных циклическим нагрузкам. Вследствие существенной зависимости физико-механических свойств от температуры, их низкой теплопроводности расчет тепловых режимов является одной из основных задач при конструировании различного рода виброзащитных систем типа многослойных стержней, пластин и оболочек [1], стеклопластиковых и резинометаллических изделий, в частности, амортизаторов [2, 3].

Особый интерес представляет расчет критических параметров, превышение которых вызывает быстрый рост температуры (явление теплового взрыва), что ведет к частичной или полной потере несущей способности изделия из-за размягчения материала.

В работе [4] для расчета теплообразования в плоском амортизаторе использовался вариационный метод. Удовлетворение граничных условий производилось на основе принципа Сен-Венана.

В данной работе на основе точного решения квазистатической задачи термовязкоупругости исследованы напряженно-деформированное состояние, температурное поле саморазогрева и тепловая неустойчивость длинной прямоугольной призмы, подверженной периодическому пагружению (плоская деформация).

1. Основные уравнения термоупругости приведены в [5]. При $\nu=\mathrm{const}$, заменив модуль сдвига μ оператором μ^*, можно получить основные уравнения термовязкоупругости. Будем искать решение этих уравнений для пластины $|\xi|\leqslant 2L$, $|\eta|\leqslant 2H$ при следующих граничных условиях:

$$u_x=0,\quad u_y=\pm La(t)\quad \text{при}\quad y=\pm y_0;\qquad \sigma_x=0,\quad \sigma_{xy}=0\quad \text{при}\quad x=\pm 1, \tag{1.1}$$

где $x=\xi/L$, $y=\eta/L$ — безразмерные координаты; $y_0=H/L$.

Решение уравнений равновесия в перемещениях, обладающее достаточным функциональным произволом для удовлетворения граничных условий (1.1), имеет вид

$$\frac{u_x}{L}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n\left(\frac{3-4\nu}{k_n}\operatorname{sh}k_nx-x\operatorname{ch}k_nx\right)-D_n\operatorname{sh}k_nx\right]\times \cos k_ny+\sum_{j=1}^{\infty}(C_jy\operatorname{sh}\lambda_jy+A_j\operatorname{ch}\lambda_jy)\sin\lambda_jx; \tag{1.2}$$

$$\frac{u_y}{L}=2\gamma_0(1-2\nu)\,y+\sum_{n=1}^{\infty}(B_nx\operatorname{sh}k_nx+D_n\operatorname{ch}k_nx)\sin k_ny+ +\sum_{j=1}^{\infty}\left[C_j\left(\frac{3-4\nu}{\lambda_j}\operatorname{sh}\lambda_jy-y\operatorname{ch}\lambda_jy\right)-A_j\operatorname{sh}\lambda_jy\right]\cos\lambda_jx,$$

где γ_0, A_j, C_j, B_n, D_n — неизвестные коэффициенты; $k_n=\dfrac{(2n-1)\pi}{2y_0}$; $\lambda_j=\pi_j$. После подстановки перемещений (1.2) в уравнения состояния получим выражения для напряжений. Удовлетворяя граничным условиям, как и в работе [6], приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$t_n x_n = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left[\frac{k_n^2}{(k_n^2+\lambda_j^2)^2} - \frac{1-\nu}{k_n^2+\lambda_j^2}\right] + \frac{4\nu a(t)}{y_0 k_n^2}; \tag{1.3}$$

$$s_j y_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[\frac{k_n^2}{(k_n^2+\lambda_j^2)^2} - \frac{1-\nu}{k_n^2+\lambda_j^2}\right],$$

где

$$t_n = -\frac{1}{4k_n}\left(\frac{k_n}{\mathrm{sh}^2 k_n} + \mathrm{cth}\, k_n\right);$$

$$s_j = \frac{y_0}{4}\left[\frac{3-4\nu}{\lambda_j}\,\mathrm{th}\,\lambda_j y_0 - \frac{y_0}{\mathrm{ch}^2\lambda_j y_0}\right].$$

В работах [7, 8] доказывается, что системы вида (1.3) вполне регулярны и главные части асимптотических разложений x_n, y_j при больших n, j можно представить в виде

$$x_n = \frac{b_0}{k_n^{\alpha}},\quad y_j = \frac{d_0}{\lambda_j^{\alpha}}, \tag{1.4}$$

где b_0, d_0, α — постоянные величины и α является положительным корнем трансцендентного уравнения

$$(3-4\nu)\cos\frac{\pi\alpha}{2} = \alpha^2 - (1-2\nu)^2.$$

Отметим, что при $0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5$ для α справедливо неравенство

$$0{,}5 < \alpha \leqslant 1. \tag{1.5}$$

Установление асимптотического поведения неизвестных x_n, y_j и введение в (1.3) замены

$$x_n = \frac{x_p k_p^{\alpha}}{k_n^{\alpha}}\,(n > p),\quad y_j = \frac{y_q \lambda_q^{\alpha}}{\lambda_j^{\alpha}}$$

дает возможность заметно улучшить метод простой редукции. В отличие от метода простой редукции улучшенный метод редукции позволяет определить значения всех неизвестных x_n, y_j решением системы $p+q$ уравнений. Решение конечной системы значительно облегчается возможностью применения метода последовательных приближений. При использовании этого метода современные вычислительные средства позволяют легко решать системы в несколько сотен уравнений

На основе асимптотических выражений (1.4) можно провести полный анализ напряженно-деформированного состояния в любой точке тела, включая угловую. Подробный анализ поведения напряжений при подходе к угловой точке проведем только для компоненты σ_y, поскольку поведение остальных компонент исследуется аналогично.

Имеем

$$\sigma_y^* = J^*\frac{\sigma_y}{2\mu_0} = 2(1-\nu)\gamma_0 - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n \times \tag{1.6}$$

$$\times\left[xk_n\frac{\mathrm{sh}\,k_n x}{\mathrm{sh}\,k_n} - k_n\left(\mathrm{cth}\,k_n - \frac{1}{k_n}\right)\frac{\mathrm{ch}\,k_n x}{\mathrm{sh}\,k_n}\right]\cos k_n y + \frac{y_0}{4}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j y_j \times$$

$$\times\left\{[\lambda_j y_0\,\mathrm{th}\,\lambda_j y_0 + 2(1-\nu)]\frac{\mathrm{ch}\,\lambda_j y}{\mathrm{ch}\,\lambda_j y_0} - \lambda_j y\frac{\mathrm{sh}\,\lambda_j y}{\mathrm{ch}\,\lambda_j y_0}\right\}\cos\lambda_j x.$$

Здесь J — оператор, обратный оператору μ^*; μ_0 — мгновенный модуль сдвига;

$$\gamma_0 = \frac{a(t)}{2(1-2\nu)\, y_0 - \frac{\nu}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n / k_n^2}.$$

В области $|x| < 1$, $|y| < y_0$ ряды в (1.6) сходятся быстро, тогда как, например, при $y = y_0$ получаем

$$\sigma_y^* \approx \frac{\gamma_0 y_0 (1-\nu)\, d_0}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos \lambda_j x}{\lambda_j^\alpha}. \tag{1.7}$$

Принимая во внимание неравенство (1.5), видим, что получение надежных числовых значений сумм (1.7) возможно только после улучшения сходимости этих рядов [9]. Использование известных разложений [10] приводит к следующему расчетному варианту формулы (1.6) при $y=y_0$:

$$\sigma_y^* = 2(1-\nu)\,\gamma_0 + \frac{(1-\nu)\, y_0 \gamma_0}{2} \sum_{j=1}^{q} (-1)^j \left(y_j - \frac{y_q \lambda_q^\alpha}{\lambda_j^\alpha} \right) \cos \lambda_j x + y_q \lambda_q^\alpha F(x),$$

где

$$F(x) = \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{2^\alpha \Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}\, \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{\pi\alpha}{2}} + \tag{1.8}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{(-1)^j}{\lambda_j^\alpha} - \sqrt{\frac{\pi\lambda_j}{2}}\, \frac{J_{\alpha - \frac{1}{2}}(\lambda_j)}{\lambda_i^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \right] \cos \lambda_j x.$$

Критерием выбора q и N служит выполнение неравенства

$$\left| \sum_{j=q,N}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos \lambda_j x}{\lambda_j^{\alpha+1}} \right| < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность вычисления напряжений. В этом случае граничные условия (1.1) будут выполнены с той же точностью. Из (1.8) следует, что при $x \to 1$

$$\sigma_y^* \to \frac{(1-\nu)\,\gamma_0 y_0 d_0}{4\Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}} (1-x)^{\alpha-1}. \tag{1.9}$$

Остальные компоненты тензора напряжений при подходе к угловой точке ведут себя аналогично. Таким образом, напряжения в пластине вблизи точки раздела граничных условий имеют ту же особенность, что и в задаче для четвертьплоскости [11]. С точностью до обозначений полученное решение пригодно для анализа плосконапряженного и плоскодеформированного состояний.

2. При циклическом нагружении $a(t)=a_0 \cos \omega t$ диссипативная функция и уравнение энергии определяются аналогично [6]. Усредняя уравнение за цикл и присоединяя к нему начальные и граничные условия, имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \varkappa \Delta \theta + \frac{1}{c\rho} D_1, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \pm h_1 (\theta - \theta_0) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm L; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \pm h_2 (\theta - \theta_0) = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \pm H,$$

где

$$D_1 = \frac{\omega\mu_2 A\gamma}{4\mu_1^2}\left(\sigma_x^{02} + \sigma_y^{02} + \sigma_z^{02} + 2\sigma_{xy}^{02} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma^{02}\right);$$

$\varkappa = \dfrac{k}{c\rho}$ — температуропроводность; c — теплоемкость; ρ — плотность; A — тепловой эквивалент механической работы; γ — часть энергии рассеяния, переходящая в тепловую [12]; h_i — коэффициенты теплоотдачи; σ_i^0 — напряжения, равные упругим при $\mu=\mu_1$.

Соотношение (1.9) показывает, что диссипативная функция имеет особенность в угловой точке вида

$$D_1 \to D_0[(1-x)^2+(y_0-y)^2]^{1-\alpha} \quad \text{при} \quad x \to 1,\ y \to y_0. \tag{2.3}$$

Используя методы теории потенциала и учитывая (1.5), можно доказать, что при $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ температура имеет конечные значения во всех точках области. Для решения задачи (2.1), (2.2) можно использовать известные численные методы. При этом в достаточно малой окрестности угловой точки необходимо заменить значения функции D_1 ее среднеинтегральным значением, вычисленным по формуле (2.3). Такое «сглаживание» функции источников не приводит к значительной погрешности в большинстве практических расчетов. Точное решение может быть получено методом наложения решений [9].

В достаточно широком диапазоне параметров пагружения уровень разогрева будет таким, что температурной зависимостью физико-механических свойств можно пренебречь. В этом случае температурное поле саморазогрева определяется решением линейной системы (2.1), (2.2).

3. При интенсивном нагружении пренебрежение зависимостью свойств материала от температуры в уравнении энергии не дает правильного количественного и качественного описания вибрационного разогрева. Полагая в связи с этим

$$\mu_2=\mu_{02}\Phi[\beta(\theta-\theta_0)] \tag{3.1}$$

для установившихся решений (2.1), (2.2), приходим к задаче

$$\Delta u+\lambda f(x,y)\Phi(u)=0; \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \pm B_1 u = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \pm B_2 u = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm y_0,$$

где Φ — некоторая функция; β, μ_{02} — экспериментальные постоянные;

$$x = \frac{\xi}{L},\ y = \frac{\eta}{L},\quad u = \beta(\theta-\theta_0),\quad B_1 = Lh_1,\quad B_2 = Lh_2, \tag{3.3}$$

$$\lambda = \frac{\omega\mu_{02}a_0^2L^2A\beta\gamma}{k},\qquad f(x,y) = \frac{1}{4\mu_1^2a_0^2}\left(\sigma_x^{02} + \sigma_y^{02} + \sigma_z^{02} + 2\sigma_{xy}^{02} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma^{02}\right)$$

— безразмерные величины. Граничные условия (3.3) в дальнейшем будем записывать в более общем виде

$$\frac{\partial u}{\partial n} + Bh(x,y)u = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{3.4}$$

Задача (3.2), (3.4) встречается также при исследовании температурных полей вязких жидкостей, газов и газовых смесей [13], при электрическом разогреве проводников и электролитов [14], при расчете внутреннего разогрева ледников [15] и т. д.

Наибольший интерес представляют те критические значения λ_* параметра λ, выше которых не существует положительных решений нелинейной системы (3.2), (3.4). В работах [1, 2, 16, 17] определены критические значения в ряде одномерных задач для конкретных функций Φ. Обзор математических аспектов этой проблемы дан в [18]. В большинстве работ предполагается известным тривиальное решение u_0, что равносильно $\Phi(u_0)=0$. Для источников тепла, действующих в вязкоупругих средах, это условие не выполняется.

Можно доказать, что если функция $\frac{u}{\Phi(u)}$ ограничена, то справедливо неравенство

$$\lambda_* < \chi_0, \tag{3.5}$$

где χ_0 — минимальное собственное число вспомогательной линейной задачи

$$\Delta v+\chi f(x, y)v=0 \quad \text{в} \quad V; \qquad \frac{\partial v}{\partial n}+Bh(x, y)\,v=0 \quad \text{на} \quad S. \tag{3.6}$$

При тех же ограничениях в работе [14] получено выражение для верхней оценки $\hat{\lambda}$ значений λ_*

$$\lambda_* \leqslant \hat{\lambda}=\chi_0 \max_{u\geqslant 0} \frac{u}{\Phi(u)}. \tag{3.7}$$

Неравенство (3.7) дает весьма хорошее приближение для λ_*, особенно при малых B. Вместе с тем способ получения этого соотношения не позволяет построить приближения более высоких порядков.

Запишем уравнение (3.1) в виде

$$\Delta u+\chi fu=f[\chi u-\lambda\Phi(u)]$$

и будем решать исходную систему методом последовательных приближений. В результате приходим к линейным краевым задачам:

$$\Delta u_0+\chi fu_0=0 \quad \text{в} \quad V; \qquad \frac{\partial u_0}{\partial n}+Bhu_0=0 \quad \text{на} \quad S; \tag{3.8}$$

$$\Delta u_n+\chi fu_n=f[\chi u_{n-1}-\lambda_n\Phi(u_{n-1})] \quad \text{в} \quad V; \qquad \frac{\partial u_n}{\partial n}+Bhu_n=0 \quad \text{на} \quad S. \tag{3.9}$$

Оценки (3.5), (3.7) указывают на необходимость положить $\chi=\chi_0$. Решение (3.8) запишем в виде

$$u_0=Cv_0, \tag{3.10}$$

где v_0 — ортонормированная собственная функция (3.8), соответствующая $\chi=\chi_0$. Подставляя (3.10) в (3.9) при $n=1$, из условия существования решения задачи получим

$$\lambda_0=\frac{\chi_0 C}{\int\limits_V f\Phi(Cv_0)\,v_0 dV}. \tag{3.11}$$

Так как C — произвольная постоянная, легко доказать, что без потери общности можно потребовать выполнения условий

$$\int\limits_V fu_n v_0 dV=0 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Тогда решения систем (3.9) представим в виде

$$u_1 = Cv_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\chi_j - \chi_0} v_j \quad \left(\alpha_j = \int_V [\chi_0 u_0 - \lambda_0 \Phi(u_0)] v_j dV \right) \ldots,$$

где χ_j, v_j — собственные числа и функции задачи. В результате условия существования решений задач (3.9) приводят к последовательности

$$\lambda_{n-1} = \chi_0 \int_V f u_{n-1} v_0 dV \Big/ \int_V f\Phi(u_{n-1}) v_0 dV. \tag{3.12}$$

Значения $\lambda_n(C) \to \lambda(C)$ при $n \to \infty$.

Таким образом, построение зависимости $\lambda(C)$ сводится в каждом приближении к вычислению квадратур в (3.11), (3.12). В случае неограниченности отношения $\frac{u}{\Phi(u)}$ возможен другой выбор χ. Например, если существует такое u_0, что $\Phi(u_0)=0$, тогда в приведенных выше формулах необходимо заменить χ_0 на χ_j ($j=1, 2,\ldots$), т. е. каждое собственное число задачи (3.6) является точкой бифуркации системы (3.2), (3.4). Анализ зависимости $\lambda(C)$ позволяет определить критические значения λ_* и исследовать явление ветвления решений нелинейной задачи. Собственные числа и функции линейной задачи могут быть найдены па основе известных методов [9].

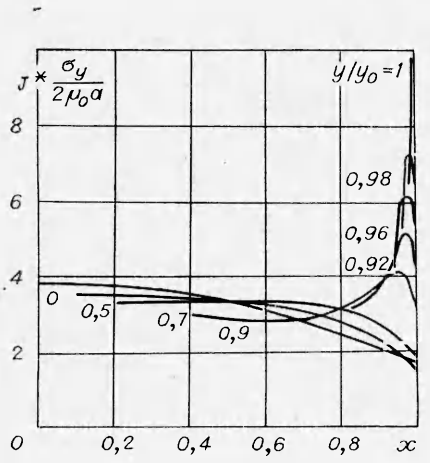
4. Числовой расчет проводился для $L=0{,}05$ м, $y_0=0{,}88$, $\nu=0{,}5$. В бесконечной системе удерживалось по 100 неизвестных x_n и y_j. При использовании метода последовательных приближений первые шесть знаков неизвестных переставали изменяться после 10—12 итераций. Полученное решение обеспечивало выполнение граничных условий с точностью до четырех значащих цифр. При расчете напряжений на граничных поверхностях сходимость рядов улучшалась по методу Крылова [9].

На фиг. 1, 2 представлены распределения нормального и касательного напряжений в пластине. Можно видеть, что напряженное состояние, близкое к однородному, имеет место лишь в центральной части тела. Наличие особенности обусловливает резкое возрастание напряжений при подходе к угловой точке. Аналогично ведет себя в этой области и диссипативная функция. На фиг. 3 приведены значения f, рассчитанные по формуле (3.3). Для определения температуры задача (2.1), (2.2) решалась методом конечных разностей с переменным шагом при $h_1=40$, $h_2=5240$ м$^{-1}$. С учетом сделанных выше замечаний среднеинтегральное значение функции f вычислялось в угловой клетке $0{,}02L\cdot 0{,}02Ly_0$ по формуле (2.3). На фиг. 4 представлено установившееся температурное поле, вычисленное с точностью до множителя $r = \frac{\omega\mu_2\gamma a_0^2 L^2 A}{k}$.

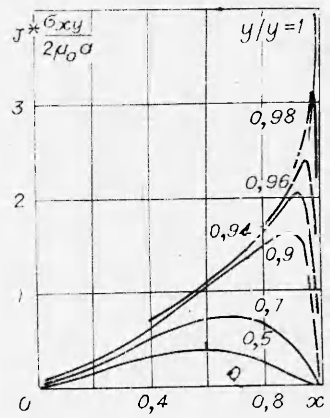
При заданных условиях влияние краевого эффекта на температуру практически не сказывается и максимальная температура достигается в центральной точке пластины. При исследовании тепловой неустойчивости собственные числа и функции χ_j и v_j линейной задачи (3.6) определялись методом Бубнова. Приближенные решения представлялись в виде

$$v_j^{(s)} = \sum_{n=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} b_{nm} \cos \lambda_m x \cos k_n y, \tag{4.1}$$

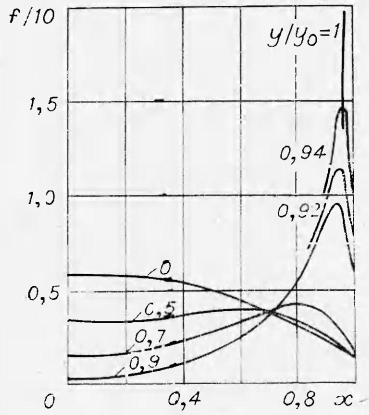
где λ_m, k_n — корни трансцендентных уравнений, получаемых из граничных условий (3.2). Функция $f(x, y)$ аппроксимировалась по точкам методом наименьших квадратов суммами вида (4.1). В результате получены следующие приближения $\chi_0^{(s)}$ значения χ_0: $\chi_0^{(1)} = 1{,}0095$, $\chi_0^{(2)} = 0{,}99605$, $\chi_0^{3} = 0{,}99557$, что дает основание положить $\chi_0=0{,}9956$.



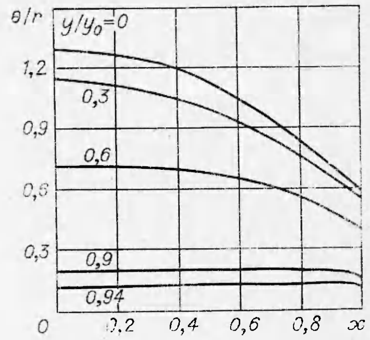
Фиг. 1



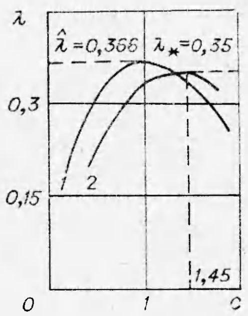
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Для широкого класса вязкоупругих материалов [17] в (3.1) $\Phi(u) = \exp(u)$. График $\lambda(C)$, полученный для этой зависимости, приведен на фиг. 5. Кривые *1, 2* получены по формулам (3.7), (3.11) соответственно. Обе формулы дают удовлетворительное соответствие по максимальным значениям λ и значительное расхождение по амплитудам C. Зависимость $\lambda(C)$ является уравнением ветвления нелинейной задачи (3.2), (3.3) и показывает, что при $\lambda < \lambda_*$ существует два решения, при $\lambda = \lambda_*$ — одно и при $\lambda > \lambda_*$ решений не существует. При $\lambda > \lambda_*$ имеет место неограниченный рост температуры (тепловой взрыв).

Поступила 5 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Snowdon J. C.** Vibration and shock in damped mechanical systems. N. Y. a. o, Wiley, 1968.
2. **Немец Я., Серенсен С. В., Стреляев В. С.** Прочность пластмасс. М., «Машиностроение», 1970.
3. **Потураев В. А.** Резиновые и резинометаллические детали машин. М., «Машиностроение», 1966.
4. **Лавендел Э. Э., Санкин В. А.** Расчет температурного поля при кинематическом возбуждении амортизатора.— «Вопросы динамики и прочности», 1969, вып. 19.
5. **Коваленко А. Д.** Основы термоупругости. Киев, «Наукова думка», 1970.
6. **Грінченко В. Т., Карнаухов В. Г., Сенченков І. К.** Напружено-деформований стан і температурне поле суцільного в'язко-пружного скінченого циліндра при його кінематичному збудженні.— «Доповіді АН УРСР», 1974, № 2.
7. **Гринченко В. Т.** О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для жестко защемленной плиты.— «Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук», 1963, т. XVI, № 5.
8. **Гринченко В. Т., Коваленко А. Д., Улитко А. Ф.** Анализ напряженного состояния жестко защемленной пластины на основе решения пространственной задачи теории упругости.— В кн.: Труды VII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. М., «Наука», 1970.
9. **Канторович Л. В., Крылов В. И.** Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Физматгиз, 1962.
10. **Рыжик И. М., Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.— Л., ГИТТЛ, 1951.
11. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
12. **Олдырев П. П., Тамуж В. П.** Рассеяние энергии в стеклотекстолите при циклическом растяжении — сжатии.— «Механика полимеров», 1969, № 4.
13. **Fujuta H.** On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $dv/dt = \Delta v + e^v$. —«Bull. Amer. Mathem. Soc.», 1969, vol. 75, N 1.
14. **Joseph D. D., Sparrow E. M.,** Nonlinear diffusion induced by nonlinear sources.— «Quart. Appl. Mathem.», 1970, vol. 28, N 3.
15. **Божинский А. Н., Григорян С. С.** О внутреннем разогреве и скольжении ледников.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 212, № 3.
16. **Коваленко А. Д., Карнаухов В. Г.** О теплообразовании в вязкоупругих оболочках вращения при периодических воздействиях.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев, «Наукова думка», 1971, № 11.
17. **Москвитин В. В.** Сопротивление вязкоупругих материалов. М., «Наука», 1972.
18. **Келлер Д. Б., Антман С.** Теория ветвления и нелинейные задачи па собственные значения. М., «Мир», 1974.