

ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ

И. В. Немчинов, А. С. Фонарев

(Москва)

Рассматривается течение вязкого теплопроводного газа между двумя параллельными пластинами (течение Куэтта) с учетом переноса тепла излучением. Простая структура такого течения позволяет легко выяснить характер передачи тепла при учете излучения, вид и число граничных условий при наличии и отсутствии молекулярного переноса тепла и вязкости.

§ 1. Запишем уравнения движения, энергии, лучистого и молекулярного переноса тепла для случая, когда вязкая жидкость течет между двумя бесконечными параллельными пластинами, расстояние между которыми равно h , причем одна из пластин неподвижна, а другая движется со скоростью v_∞ относительно первой. Это простейшее течение (течение Куэтта) хорошо исследовано без учета лучистого переноса тепла [1].

Считая, что все величины изменяются только вдоль оси (направление, перпендикулярное пластинам) и направляя скорость течения по оси x , получим из уравнений движения Навье — Стокса

$$\frac{d}{dz} \left(\mu \frac{du}{dz} \right) = 0, \quad p = p_0 = \text{const} \quad (1.1)$$

где u — скорость газа, $\mu(T, p_0)$ — вязкость, T — температура, p — давление, а из уравнения энергии получим

$$\frac{dq}{dz} = \mu \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \quad (1.2)$$

где q — полный поток тепла, складывающийся из обычного, т. е. молекулярного (атомарного, ионного, электронного) переноса тепла q_m , осуществляющегося путем взаимодействия частиц газа, и лучистого потока тепла q_r

$$q = q_m + q_r$$

причем молекулярный поток тепла в случае термохимического равновесия определяется обычным образом:

$$q_m = -k dT / dz \quad (1.3)$$

где $k(T, p_0)$ — коэффициент теплопроводности.

Лучистый поток тепла получается интегрированием интенсивности излучения

$$q_r = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(s) s d\omega$$

где s — единичный вектор, направленный вдоль луча, $d\omega$ — бесконечно-малый телесный угол с осью s , а интенсивность излучения частоты ν удовлетворяет уравнению переноса [2]

$$dI_\nu / ds = -\kappa_\nu I_\nu + j_\nu \quad (1.4)$$

где s отсчитывается вдоль луча, составляющего угол ϑ с направлением оси z , j_ν — интенсивность испускания частоты ν и κ_ν — коэффициент поглощения частоты ν .

Уравнение для потока тепла можно получить, проведя осреднение интенсивности по углам в двух полусферах $0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi \leq \vartheta \leq \pi$ и по частотам $0 \leq \nu < \infty$ и предполагая локальное термодинамическое равновесие; в результате получим

$$\alpha^2 l(T) \frac{d}{dz} \left(l(T) \frac{dq_r}{dz} \right) = q_r + 2\alpha l(T) \frac{dB}{dz} \quad (B(T) = \sigma T^4) \quad (1.5)$$

Здесь $l(T)$ — средний пробег излучения, причем σ — константа в законе Стефана — Больцмана, величина α ($\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ в зависимости от изотропности $I(\vartheta)$) возникает при осреднении по углам. Обсуждение уравнения переноса (1.4) и осредненного уравнения для потока (1.5) можно найти в работах [2, 3] и других, например, [4].

Граничными условиями для уравнения (1.4) будет заданная интенсивность

$$I_\nu = I_\nu(\vartheta) \quad \text{при } z = 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}\pi, \quad I_\nu = I_\nu(\vartheta) \quad \text{при } z = h, \quad \frac{1}{2}\pi \leq \vartheta \leq \pi$$

а для уравнения (1.8) — заданные полные потоки входящего в газ излучения F_+ и F_- .

Если пластины излучают как абсолютно-черное тело, то

$$F_+ = \sigma T_+^4, \quad F_- = \sigma T_-^4$$

где T_+ и T_- — истинные температуры пластин.

Потоки F_+ и F_- в положительном и отрицательном направлениях оси z связаны с фигурирующим в уравнении (1.5) полным лучистым потоком тепла следующим образом:

$$q_r = F_+ - F_-, \quad 2F_\pm = \pm q_r - \frac{dq_r}{dz} \alpha l + 2\sigma T^4 \quad (1.6)$$

Если существенна обычная молекулярная теплопроводность, то следует задать температуру газа у пластин, равной температуре пластин

$$T = T_+ \quad \text{при } z = 0, \quad T = T_- \quad \text{при } z = h \quad (1.7)$$

а вследствие наличия вязкости

$$u = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad u = v_\infty \quad \text{при } z = h. \quad (1.8)$$

(скачками температуры и скорости газа, которые следует ввести при больших пробегах частиц, если плотность газа низка, пренебрегаем).

§ 2. Введем безразмерные величины

$$T = \bar{T} T_0, \quad z = \bar{z} h, \quad q_r = \bar{q}_r 2\sigma T_0^4, \quad q_m = \frac{k_0 T_0}{h} \bar{q}_m, \quad k = k_0 \bar{k}$$

$$\mu = \mu_0 \bar{\mu}, \quad F_+ = f_+ \sigma T_0^4, \quad F_- = f_- \sigma T_0^4, \quad l = \bar{l} l_0, \quad u = v_\infty \bar{u}$$

Уравнения (1.1), (1.2), (1.3), (1.5) представляются (черточки опустим) так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\mu \frac{du}{dz} \right) &= 0, & -\frac{dq_r}{dz} + \varepsilon_1 \frac{dq_m}{dz} &= \varepsilon_2 \mu \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \\ q_m &= -k \frac{dT}{dz}, & \lambda^2 l \frac{d}{dz} \left(l \frac{dq_r}{dz} \right) &= q_r + 4\lambda T^3 l \frac{dT}{dz} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выше, в (2.1), были введены безразмерные параметры

$$\lambda = \frac{\alpha l_0}{h}, \quad \varepsilon_1 = \frac{k_0 T_0}{2\sigma T_0^4 h}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\mu_0 u_0^2 h}{2\sigma T_0^4}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = M^2 P (\kappa - 1)$$

M — число Маха, P — число Прандтля, κ — показатель адиабаты.

Для граничных условий имеем

$$\begin{aligned} z = 0, \quad u &= 0, \quad T = T_+, \quad f_+ = q_r - \lambda l \frac{dq_r}{dz} + T_+^4 \\ z = 1, \quad u &= 1, \quad T = T_-, \quad f_- = -q_r - \lambda l \frac{dq_r}{dz} + T_-^4 \end{aligned} \quad (2.2)$$

§ 3. В дальнейшем для простоты будем считать коэффициенты вязкости и теплопроводности постоянными, т. е. $k = 1$, $\mu = 1$. Тогда первое и второе уравнения системы (2.1) легко проинтегрировать

$$u = z, \quad q_r + q_m \varepsilon_1 = \varepsilon_2 z + C_0 \quad (3.1)$$

Если температуры пластин одинаковы, то из соображения антисимметрии потока тепла

$$q = q_r + q_m \varepsilon_1 = 0 \quad \text{в точке } z = \frac{1}{2}, \quad C_0 = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 \quad \text{или} \quad q = \varepsilon_2 (z - \frac{1}{2})$$

и полный поток на пластинах определяется только количеством диссипированной вследствие трения энергии независимо от механизма переноса тепла.

Систему (2.1) легко свести к одному уравнению относительно T

$$\lambda^2 l \frac{d}{dz} \left[l \varepsilon_2 + l \varepsilon_1 \frac{d^2 T}{dz^2} \right] = \varepsilon_2 z + C_0 + \frac{dT}{dz} (\varepsilon_1 + 4\lambda T^3) \quad (3.2)$$

где $l = l(T)$. Граничные условия примут вид

$$(f_+ - T_+^4) = C_0 + \varepsilon_1 \frac{dT}{dz} - \lambda \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \frac{d^2 T}{dz^2} \lambda l, \quad T = T_+ \quad \text{при } z = 0 \quad (3.3)$$

$$(f_- - T_-^4) = -(C_0 + \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \frac{dT}{dz} - \lambda \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \lambda l \frac{d^2 T}{dz^2}, \quad T = T_- \quad \text{при } z = 1$$

Здесь граничных условий четыре, так как константа C_0 в самом уравнении (3.2) неопределена.

§ 4. Пусть $l(T) = \text{const} = 1$ и изменения температуры малы. Тогда уравнения (3.2) можно линеаризовать

$$\lambda^2 \varepsilon_1 \frac{d^2 \theta}{dz^2} - (\varepsilon_1 + 4\lambda) \frac{d\theta}{dz} = \varepsilon_2 z + C_0 \quad (\theta = T - 1)$$

Его решением будет

$$\theta = -\frac{C_0}{\varepsilon_1 \alpha^2} z - \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \alpha^2} z^2 + \frac{C_2}{\alpha} e^{\alpha z/\lambda} - \frac{C_3}{\alpha} e^{-\alpha z/\lambda} + C_4 \quad \left(\alpha^2 = \frac{\varepsilon_1 + 4\lambda}{\varepsilon_1} \right) \quad (4.1)$$

Граничные условия (3.3) переписутся (для простоты считаем, что пластины светят как черное тело) так:

$$\begin{aligned} C_0 + \varepsilon_1 \frac{d\theta}{dz} - \lambda \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \frac{d^2 \theta}{dz^2} \lambda = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } z = 0 \\ -(C_0 + \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \frac{d\theta}{dz} - \lambda \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \frac{d^2 \theta}{dz^2} \lambda = 0, \quad \theta = \theta_1 \quad \text{при } z = 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где θ_1 — отклонение температуры стенки при $z = 1$ от $T = 1$. Условия (4.2) с использованием (4.1) дают уравнения

$$\begin{aligned} \frac{C_2}{\alpha} - \frac{C_3}{\alpha} + C_4 = 0, \quad -\frac{C_0}{\varepsilon_1 \alpha^2} - \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \alpha^2} + \frac{C_2}{\alpha} e^{\alpha/\lambda} - \frac{C_3}{\alpha} e^{-\alpha/\lambda} + C_4 = \theta_1 \\ \frac{\varepsilon_1}{\lambda} (C_2 + C_3) - \beta C_0 = \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \alpha (C_2 - C_3) - \beta \varepsilon_2 \lambda \quad \left(\beta = \frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \\ \frac{\varepsilon_1}{\lambda} (C_2 e^{\alpha/\lambda} + C_3 e^{-\alpha/\lambda}) + \beta (-\varepsilon_2 - C_0) = -\varepsilon_1 \frac{\alpha}{\lambda} (C_2 e^{\alpha/\lambda} - C_3 e^{-\alpha/\lambda}) + \beta \varepsilon_2 \lambda \end{aligned}$$

из которых можно найти постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} C_2 = \frac{1}{\Delta_1} \left[\frac{\varepsilon_1 \alpha^2 \beta \theta_1 - \varepsilon_2 \beta \lambda (1 + \frac{1}{2} \lambda^{-1})}{(1 - \alpha) e^{-\alpha/\lambda} + \alpha \beta \lambda (e^{-\alpha/\lambda} - 1)} - \frac{\varepsilon_1 \alpha^2 \beta \theta_1 + \varepsilon_2 \beta \lambda (1 + \frac{1}{2} \lambda^{-1})}{(1 + \alpha) + \alpha \beta \lambda (e^{-\alpha/\lambda} - 1)} \right] \\ C_3 = -\frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{\varepsilon_1 \alpha^2 \beta \theta_1 - \varepsilon_2 \beta \lambda (1 + \frac{1}{2} \lambda^{-1})}{(1 + \alpha) e^{\alpha/\lambda} - \alpha \beta \lambda (e^{\alpha/\lambda} - 1)} - \frac{\varepsilon_1 \alpha^2 \beta \theta_1 + \varepsilon_2 \beta \lambda (1 + \frac{1}{2} \lambda^{-1})}{(1 - \alpha) + \alpha \beta \lambda (e^{\alpha/\lambda} - 1)} \right] \\ C_4 = \frac{C_3 - C_2}{\alpha}, \quad C_0 = \left[\varepsilon_2 \lambda + \varepsilon_1 C_2 \frac{1 - \alpha}{\beta \lambda} + \varepsilon_1 C_3 \frac{1 + \alpha}{\beta \lambda} \right] \quad (4.3) \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \left[\frac{(1-\alpha) - \alpha\beta\lambda(e^{\alpha/\lambda} - 1)}{(1+\alpha) + \alpha\beta\lambda(e^{-\alpha/\lambda} - 1)} - \frac{(1+\alpha)e^{\alpha/\lambda} - \alpha\beta\lambda(e^{\alpha/\lambda} - 1)}{(1-\alpha)e^{-\alpha/\lambda} + \alpha\beta\lambda(e^{-\alpha/\lambda} - 1)} \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \left[\frac{(1-\alpha)e^{-\alpha/\lambda} + \alpha\beta\lambda(e^{-\alpha/\lambda} - 1)}{(1+\alpha)e^{\alpha/\lambda} - \alpha\beta\lambda(e^{\alpha/\lambda} - 1)} - \frac{(1+\alpha) + \alpha\beta\lambda(e^{-\alpha/\lambda} - 1)}{(1-\alpha) - \alpha\beta\lambda(e^{\alpha/\lambda} - 1)} \right]$$

Теперь для θ и q имеем:

$$\theta = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\alpha^2} \left(\lambda z + \frac{z^2}{2} \right) - \frac{1}{\beta\lambda\alpha^2} [(1-\alpha)C_2 + (1+\alpha)C_3]z +$$

$$+ \left[\frac{C_2}{\alpha}(e^{\alpha z/\lambda} - 1) - \frac{C_3}{\alpha}(e^{-\alpha z/\lambda} - 1) \right]$$

$$q = \varepsilon_2(z + \lambda) + \frac{\varepsilon_1}{\beta\lambda} [(1-\alpha)C_2 + (1+\alpha)C_3] \quad (4.4)$$

Чтобы выяснить вопрос, когда можно пренебречь обычной теплопроводностью, получим решение для $\varepsilon_1 = 0$ и сравним его с (4.4) при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Из системы (2.1) при $\varepsilon_1 = 0$ легко получить уравнения

$$\lambda \frac{dq_r}{dz} - \varepsilon_2\lambda = 0, \quad \lambda^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = q_r + 4\lambda \frac{d\theta}{dz} = 0 \quad (4.5)$$

или

$$4\theta = -\frac{\varepsilon_2 z^2}{2\lambda} - \frac{C_0 z}{\lambda} + 4C_1, \quad q_r = \varepsilon_2 z + C_0 \quad (4.6)$$

Граничные условия при этом будут иметь вид

$$f_+ = +q_r - \lambda \frac{dq_r}{dz} + (1 + 4\theta) \quad \text{при } z = 0$$

$$f_- = -q_r - \lambda \frac{dq_r}{dz} + (1 + 4\theta) \quad \text{при } z = 1$$

Из (4.7) с использованием (4.6), полагая $f_+ = 1$ и приближенно считая $f_+ - f_- = -4\theta_1$, найдем постоянные C_0 и C_1 , и полученное решение при $\varepsilon_1 = 0$ отметим индексом

$$\theta^0 = -\frac{\varepsilon_2 z^2}{8\lambda} + \left(\frac{\varepsilon_2}{8} + \frac{\theta_1}{2 + \lambda^{-1}} \right) \frac{z}{\lambda} + \left(\frac{\varepsilon_2\lambda(2 + \lambda^{-1})}{8} + \frac{\theta_1}{2 + \lambda^{-1}} \right)$$

$$q_r^0 = \varepsilon_2 z - \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{4\theta}{2 + \lambda^{-1}} \right) \quad (4.8)$$

На фиг. 1 дано распределение температуры при $\lambda = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $\theta_1 = 0.2$ для различных ε_1 , в том числе и для $\varepsilon_1 = 0$. Видно, что при малых ε_1 отличие от решения при $\varepsilon_1 = 0$ заметно лишь вблизи стенок, где имеют место резкие изменения температуры, в пределе переходящие в скачки температуры. Разницу температур при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ (т. е. $\alpha \rightarrow \infty$) и $\varepsilon_1 = 0$ можно записать в виде:

$$\Delta\theta = \frac{1}{4} \left[\frac{4\lambda\theta_1}{2\lambda + 1} - \varepsilon_2\lambda \left(1 + \frac{1}{2\lambda} \right) \right] e^{-\alpha(1-z)/\lambda} - \frac{1}{4} \left[\frac{4\lambda\theta_1}{2\lambda + 1} + \varepsilon_2\lambda \left(1 + \frac{1}{2\lambda} \right) \right] e^{-\alpha z/\lambda}$$

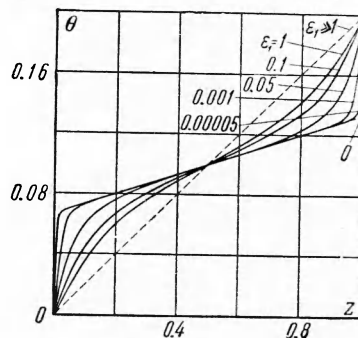
Отсюда видно, что $\Delta\theta$ при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ как угодно мало отличается от 0 в области $0 < z < 1$.

Выпишем решение для случая, когда можно пренебречь лучистым переносом тепла

$$\theta = -\frac{\varepsilon_2 z^2}{\varepsilon_1 2} + \left(\theta_1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) z \quad (4.9)$$

что имеет место либо при $\lambda \rightarrow 0$, либо при $\varepsilon_1 \gg 1$.

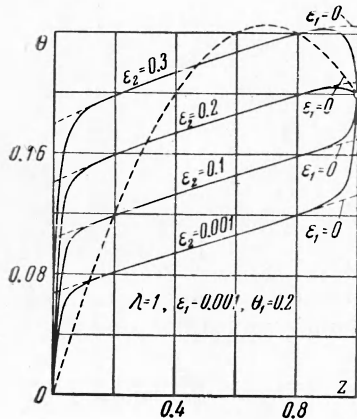
На фиг. 2 пунктиром приведено распределение температуры при $\theta_1 = 0.2$, $\varepsilon_1 = 0.001$, $\varepsilon_2 = 0.001$ и $\lambda = 0$.



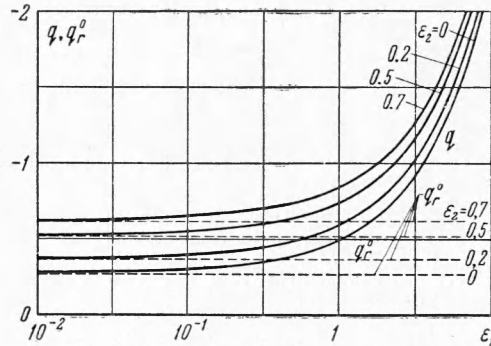
Фиг. 1

Легко заметить, что при наличии лучистого переноса тепла ($\lambda \neq 0$) резко сглаживается профиль температуры между пластинами.

На фиг. 3 показано изменение полного потока тепла q , на фиг. 4 — лучистого потока q_r на одной из пластин ($z=0$) при нескольких значениях ε_2 и $\lambda=1$ в зависимости от ε_1 .

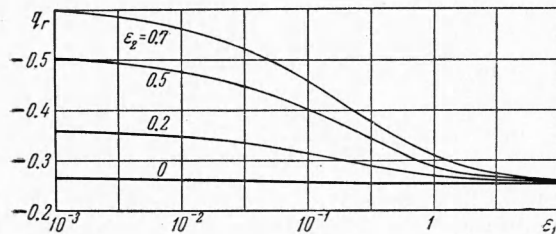


Фиг. 2



Фиг. 3

Легко заметить, что при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ поток тепла q стремится к значению радиационного потока q_r^0 , вычисленному при отсутствии обычной теплопроводности, а при $\varepsilon_1 \gg 1$



Фиг. 4

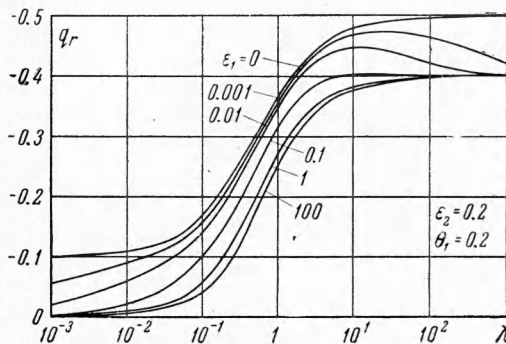
тепло, которое выделяется из-за трения, переносится главным образом обычной теплопроводностью и почти не влияет на лучистый поток (фиг. 4).

На фиг. 5 дано изменение лучистого потока тепла для $\varepsilon_2 = 0.2$, $\theta_1 = 0.2$ и различных ε_1 , в зависимости от λ на пластине $z=0$.

При малых λ и при больших λ лучистый поток при наличии хотя бы малой обычной теплопроводности ($\varepsilon_1 \ll 1$) существенно отличается от лучистого потока при $\varepsilon_1 = 0$.

Это объясняется тем, что лучистый поток при малых λ , когда справедливо приближение лучистой теплопроводности, пропорционален λ , а при больших λ , когда существенно объемное высвечивание, поток обратно пропорционален λ (за вычетом свободно проходящего через прозрачную область между пластинами потока $1/2 (f_+ - f_-) = 2\theta_1$), т. е. доля лучистого потока в общем количестве уносимого тепла максимальна при λ порядка единицы и мала при $\lambda \gg 1$ и $\lambda \ll 1$.

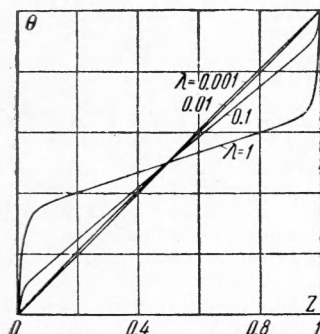
Если же $\varepsilon_1 = 0$, то выделившееся из-за трения тепло переносится только лучистым потоком при любых λ , что и приводит к сильному отличию между q_r и q_r^0 при $\lambda \ll 1$ и $\lambda \gg 1$.



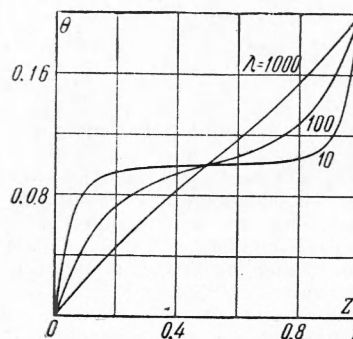
Фиг. 5

На пластине $z = 1$ характер изменения потоков аналогичен рассмотренному.

На фиг. 6, 7 показано распределение температур при $\theta_1 = 0.2$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 = 0.001$ при различных λ . Видно, что даже при малых ε_1 скачки исчезают с уменьшением лучистого потока, т. е. при $\lambda \ll 1$ и при $\lambda \gg 1$, и распределение температуры целиком определяется обычной теплопроводностью.



Фиг. 6



Фиг. 7

§ 5. Для некоторых предельных случаев упростим задачу, где длина пробега зависит от температуры. Пусть $q_m = 0$, т. е. $\varepsilon_1 = 0$. Тогда

$$q_r = \varepsilon_2 z + C_0$$

$$\lambda^2 l(T) \frac{d}{dz} (l(T) \varepsilon_2) = \varepsilon_2 z + C_0 + \lambda l(T) T^3 \frac{dT}{dz}$$

Пусть лучистый поток тепла описывается приближением лучистой теплопроводности ($\lambda \ll 1$)

$$q_r = -8\lambda l(T) T^3 \frac{dT}{dz}, \quad q = q_r + \varepsilon_1 q_m = -(8\lambda l(T) T^3 + \varepsilon_1) \frac{dT}{dz} = \varepsilon_2 z + C_0 \quad (5.3)$$

Оба эти уравнения легко интегрируются.

Течение Куэтта с учетом излучения без осреднения по частотам и углам рассмотрено в работе [5], где система уравнений газовой динамики и лучистого переноса сведена к нелинейному интегродифференциальному уравнению только для случая объемного высвечивания ($\lambda \gg 1$); уравнение удается решить методом последовательных приближений.

Для осредненного уравнения переноса в случае $\lambda \gg 1$ и при малой разности температур решение можно получить путем некоторого упрощения (4.1) и (4.3). При большой разности температур возникает нелинейное уравнение второго порядка, которое можно проинтегрировать численно.

Поступила
10 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. ИЛ., 1956.
2. Унзольд А. Физика звездных атмосфер, ИЛ., 1959.
3. Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. Теоретическая астрофизика, ГИТТЛ, 1952.
4. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 1.
5. Robert and Madeleine Goulard. Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. Preprints of Papers. 1959, p. 126.