

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ПРИ ВЗРЫВЕ
НА ПОВЕРХНОСТИ

Н. В. Гусев

(Москва)

Численно исследовано движение газа при нормальном ударе быстролетящего тела о границу плотного полупространства с вакуумом. Получено движение ударной волны, форма и распределение параметров разлетающегося в вакуум газа.

Исследуется движение при возникновении области с большим давлением на границе с вакуумом газа, занимающего полупространство $z > 0$. Предположение цилиндрической симметрии относительно оси z позволяет решать эту в общем случае трехмерную нестационарную задачу как двумерную. Для соответствующей одномерной задачи известны как численное, так и для некоторых газов аналитическое решение, что подробно рассмотрено в [1].

В результате решения двумерной задачи получены профили газодинамических величин, аналогичные решениям в одномерном случае, и выход решения на автомодельное. Чашеобразная поверхность фронта ударной волны с большим градиентом давления на ней «фокусирует» вылетающий газ так, что его нормальная к поверхности $z = 0$ компонента скорости на порядок больше компоненты, параллельной поверхности раздела сред, и лишь в отдельных точках отношение их приближается к 0.4. Поэтому вылетающий газ формируется в виде «факела», профили давления и плотности на оси которого имеют форму, аналогичную одномерному случаю короткого удара, а в плоскости $z = 0$ распределения давления и плотности аналогичны распределениям этих величин в случае сильного точечного взрыва в неограниченной среде.

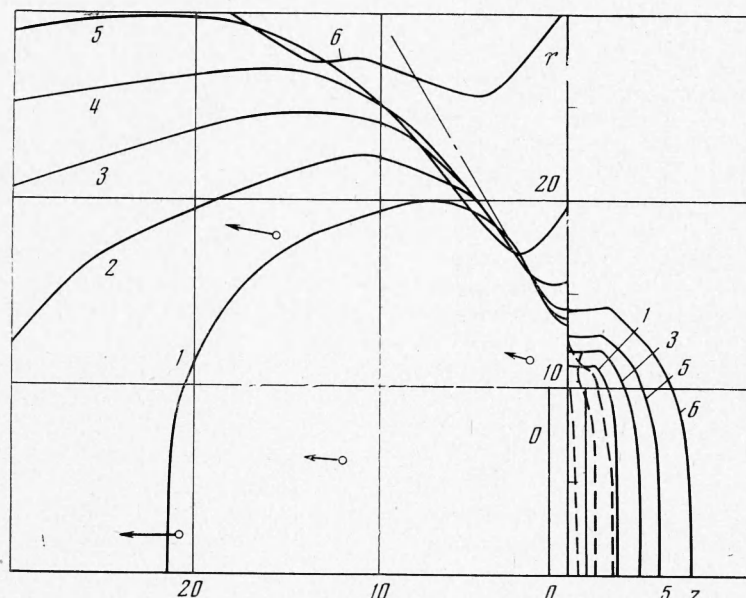
Начальное возмущение рассматриваемой симметричной задачи может быть результатом либо нормального удара тела с большой скоростью о поверхность плотной среды, либо следствием воздействия гигантского импульса лазера или какого-то иного процесса, когда образуется некоторый объем с большим давлением на границе раздела плотной среды с вакуумом или с другой малоплотной средой.

Рассмотрим постановку задачи. Вследствие симметрии начальных условий относительно оси z уравнения не содержат угла поворота вокруг оси z и задача решается в полуплоскости $\varphi = \text{const}$ цилиндрической системы координат r, φ, z .

Слева от поверхности $z = 0$ находится вакуум, справа — однородный холодный идеальный газ с давлением $p = 0$, плотностью $\rho = 1$, скоростью по оси z $u = 0$, скоростью по оси r $v = 0$ и показателем адиабаты $\gamma = 1.4$. Все величины обезразмерены, так что газодинамические уравнения не содержат дополнительных констант. Начальная область имеет форму цилиндра высотой 2 и диаметром 20, основания которого параллельны поверхности $z = 0$, делящей его пополам, а ось цилиндра лежит на оси z (фиг. 1). В начальной области задаются величины $p = 0.4$, $\rho = 1$, $u = v = 0$. Граница области в различные моменты времени изображена кривыми 0 — 6 (фиг. 1).

Назовем буквами a, d точки пересечения границы отрицательным и положительным направлениями оси z . На отрезке ad оси z в силу симметрии задачи ставится условие «стенки». Назовем буквами b, c точки пересечения оси r границей слева и справа. Для начальной области они совпадают, затем точка b перемещается выше c и на отрезке bc ставится условие стенки. Расчет с учетом проникающих через bc возмущений показал целесообразность такого упрощения при достигнутой точности реше-

ния, так как максимальное изменение параметров газа в возмущаемой области менее 10%, а сама она мала. Участок ab граничит с вакуумом, cd — с холодным плотным покоящимся газом, т. е. $p = 0$, $\rho = 1$, $u = v = 0$.



Фиг. 1

В области решается система уравнений газовой динамики

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial \rho r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u r}{\partial z} + \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho u r}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2) r}{\partial z} + \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho v r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v r}{\partial z} + \frac{\partial (p + \rho v^2) r}{\partial r} = p \\
 & \frac{\partial \rho (e + (u^2 + v^2)/2) r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u (e + p/\rho + (u^2 + v^2)/2) r}{\partial z} + \\
 & + \frac{\partial \rho v (e + p/\rho + (u^2 + v^2)/2) r}{\partial r} = 0
 \end{aligned}$$

где внутренняя энергия e связана с p , ρ уравнением состояния идеального газа $p = (\gamma - 1) \rho e$. Схема для (1) составляется и численно решается методом, описанным в [2,3].

Условие на ab достигается движением обращенных в сторону вакуума граней ячеек со скоростью $w_0 + 2c_0/(\gamma - 1)$, где w_0 — нормальная к границе ab скорость газа прилегающей к вакууму ячейки, c_0 — скорость звука в ней. Давление, плотность и скорости на самой границе полагаются равными нулю.

В условии на cd внешнее давление считается не точным нулем, а полагается равным в каждый момент счета давлению на фронте ударной волны, уменьшенному в 10^4 раз, что с большой точностью аппроксимирует бесконечно сильную ударную волну и облегчает программирование по сравнению с бесконечным отношением давлений. При желании можно задать отношение и большим на несколько порядков, но уже при выбранном

значении получается сжатие в ударной волне в 5.96 раза при предельном значении 6.

Рассмотрим разностную схему. При получении схемы из (1) учитывается, что в отличие от [3] решаемая задача не выходит на стационарный режим. Поэтому там, где необходимо, проведено усреднение размеров ячейки для соседних моментов времени, что оказывается достаточной мерой, так как перемещение ячейки за один временной шаг мало, и можно пренебречь членами выше первого порядка величины смещения ячейки. При вычислениях вводится ограничение на шаг по времени так, чтобы сдвиг ячеек за этот шаг был мал по сравнению с размером ячеек.

Выбранная сетка отличается от [3] тем, что начала лучей сетки находятся на оси r , а не на оси z , что удлиняет расчетные формулы. Такое изменение сделано для удобства расчета задачи с падающим по оси z излучением. Оказалось, что задача разлета в вакууме плохо аппроксимируется в сетке с началами лучей на оси z . При первых шагах по времени возникают недопустимо большие паразитные скорости v . В сетке с началами лучей на оси r этот эффект не возникает, что указывает на важность выбора вида сетки при расчете разлета в вакуум. Различие связано, по-видимому, с тем, что при разлете возникают большие скорости, и при выборе начал лучей на оси r движение ячеек по лучам сетки происходит в направлении скорости, что ведет к лучшему сохранению энергии и массы. Если слева от ab заменить вакуум газом с плотностью порядка единицы, то, как показывают расчеты, для такой задачи обе сетки одинаково пригодны.

Разностная схема получается при интегрировании уравнений (1) по ячейкам, причем в них получаются постоянные средние величины и сохраняется полная энергия, импульс и масса. По этим величинам вычисляется плоский распад разрыва на границе ячеек [3]. Способы усреднения в ячейках на оси z и в находящихся на расстоянии от нее различны. Пусть скорость v пропорциональна r вблизи оси z , на которой она обращается в нуль при симметричной задаче. Усредняя v по прилегающей к оси ячейке с $\Delta z = 1$, $\Delta r = R$, получим в случае постоянной плотности ρ и скорости v , линейно меняющейся от 0 до V , что импульс и масса в ячейке

$$g = \int_0^R \frac{rV}{R} \rho r dr = \rho V \frac{R^2}{3}, \quad m = \int_0^R \rho r dr = \frac{\rho R^2}{2}$$

откуда усредненная скорость $v = g / m = 2/3 V$.

Для вычисления распада разрыва следует проводить усреднение не по цилиндрической ячейке, как было сделано выше, а по параллелепипеду. Тогда

$$g = \int_0^R \frac{rV}{R} \rho dr = \rho V \frac{R}{2}, \quad m = \int_0^R \rho dr = \rho R, \quad v = \frac{g}{m} = \frac{V}{2}$$

При усреднении в цилиндрическом случае получается завышенная в $4/3$ раза величина скорости v на границе ячейки на оси z . При уменьшении r — размера ячейки — этот эффект пропадает.

Аналогичное сравнение усреднений для энергии дает поправочный множитель $9/8$ при v^2 в выражении для полной энергии.

Контрольные вычисления показали, что для выбранной сетки поправки решение существенно не улучшают.

В случае сильных волн разрежения возможно попадание границы ячеек в «веер» волны разрежения [4]. Это потребовало бы уточнения формул

[2] распада разрыва. Были проведены вычисления проверки влияния такого уточнения на решение в одномерной и двумерной задачах короткого удара. Уточнение оказалось необходимым лишь в очень разреженной области с малым давлением, плотностью и далеко от ударной волны. При этом наблюдалось незначительное улучшение точности в одномерной задаче (лучше сохранялась энергия), а в двумерном случае изменения были не заметны в силу более низкой общей точности решения. Поэтому при выбранном законе движения сетки уточнение формул распада не проводилось.

Наилучшая аппроксимация получается при таком перемещении, когда максимальный устойчивый шаг по времени одинаков для всех получаемых ячеек [3]. На практике размер ячейки выбирался из принципа равенства массы в ячейках. Расчетная область разбивалась на подобласти с гладкими решениями, в которых размеры ячеек менялись по закону типа геометрической прогрессии так, чтобы размеры ячеек противоположных границ были обратно пропорциональны плотности в них. Выделение областей с границами на особенностях решения дает возможность получить разрывные решения точно, не аппроксимируя их гладкими функциями.

В одномерных задачах можно автоматизировать процесс выделения областей гладкого решения [5]. В двумерном случае это трудно осуществить и приходится задавать области разбиения в начальных условиях.

При скачке давления или скорости, меньшем 0.1, распад разрыва вычисляется по приближенным формулам. В противном случае велись итерации до сходимости с точностью 0.5%.

На фиг. 1 изображено положение в различные моменты времени границы возмущения, распространяющегося от начальной области (прямоугольник 0). Кривые 0—6 соответствуют времени $t = 0.2, 3.5, 4.8, 6.3, 9.1, 18.3$. Кривые 2, 4 фронта ударной волны опущены.

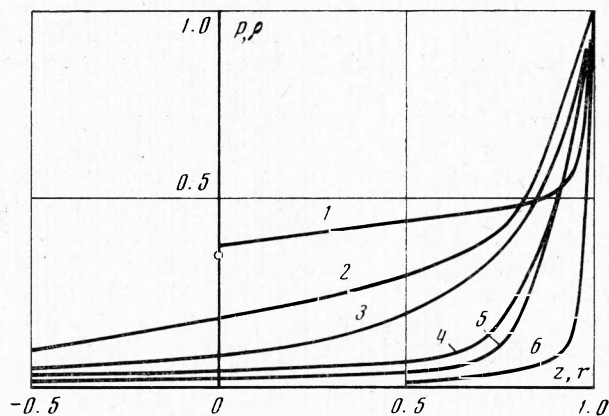
Стрелками показано поле скоростей для $t = 9.1$. Пунктирные линии отмечают прохождение z -составляющей скорости u через нуль для кривых 1, 3, 5. На движение точки b влияет граничное условие стенки bc на оси r . В [6] получено автомодельное решение для движения вблизи b и найдено, в частности, что угол между осью r и границей с вакуумом в ней равен 27.7° для $\gamma = 1.5$. Штрихпунктирная прямая проведена под углом 30° к оси r . Видно, что кривые 1—5 ее касаются. В последующие моменты времени начинает сказываться условие стенки.

Не помещившаяся на фиг. 1 часть расчетной области для кривых 2—6 содержит газ малой плотности и давления. Координата точки a пересечения границы области с отрицательным направлением оси z для кривых 1—6 равна $-21.4, -32, -43.6, -55.5, -71, -156$.

Ниже точки c и справа от оси r на фиг. 1 находится сжатый газ с плотностью ≈ 5 , слева от r — разреженный газ волны разрежения с плотностью ≈ 0.1 . Ниже точки c на оси r находится контактный разрыв. При достаточно малом размере ячеек он должен вычисляться точно. Можно при не очень малых ячейках получить хорошую аппроксимацию, взяв размеры ячеек, соответствующие равенству оптимального шага по времени для ячеек по обе стороны разрыва [3].

Поэтому для повышения точности угол наклона соседнего справа с осью r луча менялся в процессе вычислений так, чтобы оптимальные шаги по времени для ячеек слева и справа от оси r были равны. Решение в результате изменялось незначительно. Например, кривые 1—4 (фиг. 1) вычислялись с поворотом луча. Затем задача была решена с фиксированным равномерным по углу от оси z распределением лучей, и была получена кривая, практически совпадающая с 4, и кривые 5, 6.

Эффективность счета по затратам машинного времени при этом менялась больше чем в 2 раза. При повороте луча уменьшался размер ячейки на пересечении луча с осью r , что сказывается на величине шага по времени. Решение получилось такое же, как плотность справа от оси r



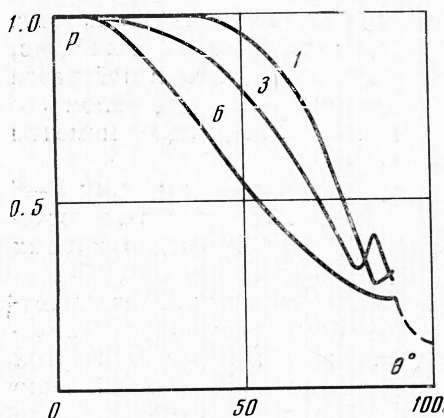
Фиг. 2

резко уменьшается вниз от точки c и контактный разрыв имеет малый размер по оси r . Например, для кривой 6 сдвиг вниз от точки c на 7% расстояния ее до оси z дает уменьшение плотности в десять раз. Контактный разрыв занимает $\sim 15\%$ площади отверстия вылета газов на поверхности $z = 0$.

Распределение плотности и давления по оси r при $t = 18.3$ справа от контактного разрыва показано кривыми 1—6 на фиг. 2, где все величины

нормированы на их значения на фронте волны. Плотность совпадает с точностью до ошибки счета с профилем в волне точечного взрыва в неограниченной среде. Давление отличается от случая точечного взрыва несколько больше, но при $r = 0$ график проходит рядом с точкой для точечного взрыва, которая помечена на фиг. 2 кружочком на оси ординат.

Кривая 2 — давление, 5 — плотность на оси z при $t > 7.5$. Для сравнения приведены фиг. 3, 4 давления и плотности одномерной задачи при $t \rightarrow \infty$. Скорость u на оси z линейна по z , проходит через нуль при $z = 0.5$, т. е. аналогична одномерному случаю.

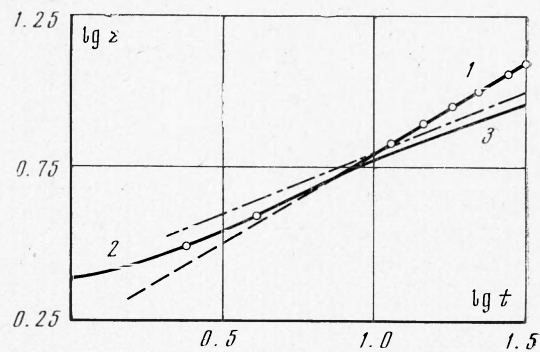


Фиг. 3

На фиг. 3 сплошной линией показано изменение давления на фронте ударной волны в зависимости от угла θ между лучом из начала координат в точку фронта и осью z . Кривые 1, 3, 6 соответствуют времени 2, 4.8, 18.3, пунктирный участок — давлению на продолжении линии ударного фронта в примыкающую со стороны $z < 0$ волну разрежения. Характер установления давления при 80° объясняется наличием угла в начальной области.

Если устремить радиус начальной цилиндрической области к ∞ , то задача превратится в одномерную. Ее решение известно, но для сравнения выхода на автомодельность она была вычислена одномерным вариантом этой же схемы, и на фиг. 4 помещены соответствующие кривые. Сначала движение фронта вдоль оси z у обеих задач одинаково и происходит по кривой 2. Затем одномерное движение выходит на прямую 1 с наклоном 0.6, а двумерное — на прямую 3. Штрихпунктирная прямая проведена с наклоном 0.4, что соответствует точечному взрыву в неограниченной среде. К сожалению, точность расчета недостаточна для определения зависимости показателя автомодельности от γ .

Решена такая же задача с начальной областью в виде полусферы. Результаты мало отличаются от продемонстрированных выше. Для исследования автомодельного решения такая начальная форма оказалась менее пригодной, так как автомодельное распределение величин для нее устанавливается в несколько раз дольше, чем для тонкого диска.



Фиг. 4

Ошибки, судя по контрольным суммам для массы и энергии, росли со временем, не зависели от измельчения шага по времени и составили 11 и 15% соответственно при $t = 18.3$.

Сетка состояла из 34 лучей и 21 точки на каждом из них. Это потребовало вместе с программой 13 листов памяти. Время счета 100 временных слоев 4 мин. Программа составлена на алголе, транслировалась через систему «связь» α -транслятором. Это дало экономию машинного времени в 3.2 раза по сравнению с обычным алгольным транслятором. Возможности машины позволяют увеличить число ячеек в восемь раз, но время счета задачи растет пропорционально квадрату числа точек.

Кривая 6 (фиг. 1) при запасе устойчивости 0.6 по временному шагу и равномерном распределении лучей по углам была получена на 2400-м шаге по времени, было затрачено ~ 2 час машинного времени. Эффективным оказалось применение подвижной сетки и переменного шага по пространству. Такое же количество шагов по времени для одномерной задачи с сеткой из 40 ячеек позволило просчитать движение фронта ударной волны до расстояний в 2×10^4 от размеров начальной области с точностью 0.5% и потребовало 5 мин счета.

Необходимость запаса устойчивости подтверждается следующим примером. При расчете стационарной ударной волны выделяются области 1, 2 счета перед волной и за ней. Сетка в них равномерная. Граница между областями следит за фронтом ударной волны, и в области 1 величины на границе с 2 берутся из ближайшей ячейки области 1, так как возмущения из 2 в нее не проникают. В процессе счета с максимальным устойчивым шагом Δt в первоначально невозмущенной области 1 возникают паразитные волны растущей амплитуды. При счете с запасом устойчивости эти волны не наблюдаются.

Критерий устойчивости получен в [2] для линеаризованных уравнений. В нелинейном случае критерий может нарушаться.

Автор благодарен О. С. Рыжову за внимание и интерес к работе.

Поступила 1 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
 2. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47, вып. 3.
 3. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
 4. Иванов М. Я. К расчету течения газа в ударной трубе переменного сечения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
 5. Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Д., Плинер Л. А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М., «Наука», 1970.
 6. William J. Rae. Initial free surface motion of an impulsively loaded half space. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, No. 12.
-