

УДК 539.3

СКОРОСТЬ ВЫДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ В БАЛКЕ ИЗ МАТЕРИАЛА С РАЗЛИЧНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ ПРИ НАЛИЧИИ В НЕЙ ПРОДОЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ

В. И. Ризов

Университет архитектуры, гражданского строительства и геодезии,
1046 София, Болгария
E-mail: v.rizov_fhe@uacg.bg

Исследуется скорость выделения энергии деформации в нелинейных неоднородных упругих балках при наличии продольных трещин. Для описания различного поведения материала при растяжении и сжатии используются соотношения между напряжениями и деформациями Рамберга — Осгуда. Предполагается, что свойства материала непрерывно изменяются по толщине балки, трещины располагаются по высоте балки произвольно. Исследуется продольная трещина в консольной балке. Для верификации решения используется J -интеграл.

Ключевые слова: неоднородная балка, нелинейный материал, продольная трещина, аналитическое исследование.

DOI: 10.15372/PMTF20190514

Введение. Зависимость свойств материала конструкций от пространственных координат существенно затрудняет анализ процесса их разрушения [1–6]. Актуальность изучения механизмов разрушения неоднородных материалов обусловлена их широким применением в технике. Следует отметить, что функционально-градиентные материалы, являющиеся неоднородными материалами, превосходят традиционные металлические материалы по соотношениям жесткости и прочности с удельным весом [7–11]. Другим важным преимуществом является возможность создавать функционально-градиентные материалы с заданным законом изменения их свойств по пространственным переменным. Указанные выше свойства функционально-градиентных материалов позволяют использовать их в авиационной и космической технике.

Некоторые однородные материалы изготавливаются послойно (один слой накладывается на другой) [11]. При этом между слоями могут образоваться продольные трещины. В работах [12–14] исследуется разрушение балок различной конфигурации при наличии в них продольных трещин. В этих работах используется степенной закон связи между напряжениями и деформациями.

В данной работе предлагается метод определения скорости выделения энергии деформации в балке из нелинейно-упругого материала при наличии в ней продольной трещины. Используются определяющие соотношения Рамберга — Осгуда для материала с различ-

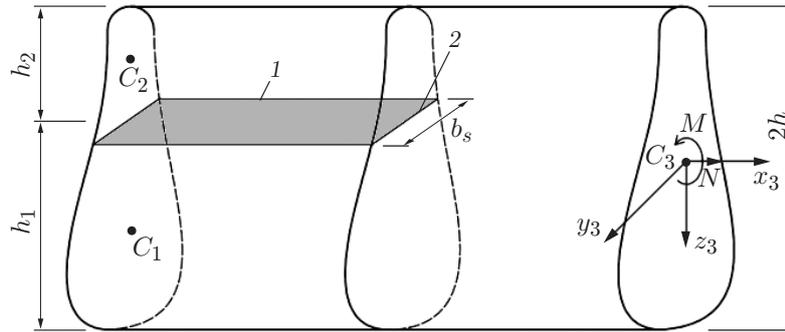


Рис. 1. Элемент балки с продольной трещиной:
1 — трещина, 2 — фронт трещины

ным поведением при растяжении и сжатии. Предлагается общий подход к решению задач о разрушении балок при наличии в них продольных трещин.

1. Теоретическая модель. Элемент балки, содержащий фронт трещины, показан на рис. 1. По высоте балки трещина располагается произвольно. Нижняя и верхняя части балки (по отношению к трещине) имеют различную толщину h_1 и h_2 соответственно. Поперечное сечение балки симметрично относительно оси z_3 , проходящей через центр тяжести. Осевая сила и изгибающий момент, действующие в поперечном сечении балки, расположенном перед фронтом трещины, обозначены соответственно через N и M (см. рис. 1). В работе [12] показано, что выражение для скорости выделения энергии деформации G для балки, схема которой представлена на рис. 1, можно записать в виде

$$G = \frac{1}{b_s} \left(\int_{z_{1n_1}}^{h_{C_1}} u_{0ta_1}^* b(z_1) dz_1 + \int_{-h_1+h_{C_1}}^{z_{1n_1}} u_{0ca_1}^* b(z_1) dz_1 + \int_{z_{2n_2}}^{h_{C_2}} u_{0ta_2}^* b(z_2) dz_2 + \right. \\ \left. + \int_{-h_2+h_{C_2}}^{z_{2n_2}} u_{0ca_2}^* b(z_2) dz_2 - \int_{z_{3n_3}}^{h_{C_3}} u_{0ta_3}^* b(z_3) dz_3 - \int_{-h_1-h_2+h_{C_3}}^{z_{3n_3}} u_{0ca_3}^* b(z_3) dz_3 \right), \quad (1)$$

где величины $z_1, z_{1n_1}, h_{C_1}, h_{C_2}, h_{C_3}, z_2, z_{2n_2}, h_1, h_2, z_3, z_{3n_3}$ определены на рис. 2; $u_{0ta_1}^*, u_{0ca_1}^*$ — плотности дополнительной энергии деформации в зонах растяжения и сжатия соответственно, расположенных в поперечном сечении ниже трещины за ее фронтом; $u_{0ta_2}^*, u_{0ca_2}^*$ — плотности дополнительной энергии деформации в зонах растяжения и сжатия соответственно, расположенных в поперечном сечении выше трещины за ее фронтом; $u_{0ta_3}^*, u_{0ca_3}^*$ — плотности дополнительной энергии деформации в зонах растяжения и сжатия соответственно, расположенных перед фронтом трещины; $b(z_i)$ ($i = 1, 2, 3$) — ширина балки, являющаяся функцией координат z_1, z_2, z_3 ; b_s — ширина балки на высоте, на которой расположена трещина. В формуле (1) учтено, что нижние волокна балки растянуты (см. рис. 1).

В данной работе для случаев растяжения и сжатия соответственно используются соотношения между напряжениями и деформациями Рамберга — Осгуда

$$\varepsilon = \frac{\sigma_t}{E_t} + \left(\frac{\sigma_t}{H_t} \right)^{1/n_t}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_c}{E_c} + \left(\frac{\sigma_c}{H_c} \right)^{1/n_c}, \quad (2)$$

где ε — продольная деформация; σ_t, σ_c — растягивающее и сжимающие нормальные напряжения соответственно; $E_t, E_c, H_t, H_c, n_t, n_c$ — константы материала. Предполагается,

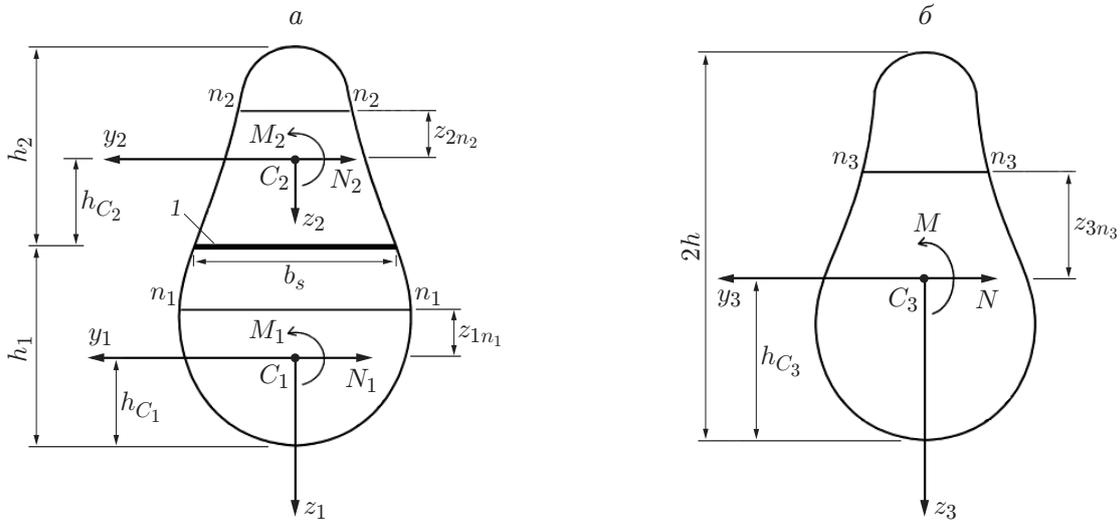


Рис. 2. Поперечные сечения балки с трещиной (1), расположенные за фронтом трещины (а) и перед ним (б):

n_1-n_1 , n_2-n_2 — нейтральные линии, расположенные в верхней и нижней частях поперечного сечения соответственно, n_3-n_3 — нейтральная линия балки

что при растяжении и сжатии модули упругости материала E_t и E_c изменяются непрерывно по высоте балки. В случае соотношений между напряжениями и деформациями Рамберга — Осгуда выражения для плотности дополнительной энергии деформации в зонах растяжения и сжатия, расположенных в нижней части балки за фронтом трещины, записываются в следующем виде [14]:

$$u_{0ta1}^* = \frac{\sigma_t^2}{2E_t} + \frac{n_t \sigma_t^{(1-n_t)/n_t}}{(1+n_t)H_t^{1/n_t}}, \quad u_{0ca1}^* = \frac{\sigma_c^2}{2E_c} + \frac{n_c \sigma_c^{(1-n_c)/n_c}}{(1+n_c)H_c^{1/n_c}}. \quad (3)$$

Для того чтобы вычислить величину G , определенную в формуле (1), величины u_{0ta1}^* и u_{0ca1}^* в (3) нужно представить в виде функций переменной z_1 . Из выражения (2) нельзя определить напряжения σ_t и σ_c в явном виде. Поэтому напряжения σ_t и σ_c раскладываются в ряд Тейлора и в разложениях удерживаются только первые три члена:

$$\sigma_t(z_1) \approx \sigma_t(z_{1t}) + \frac{\sigma_t'(z_{1t})}{1!} (z_1 - z_{1t}) + \frac{\sigma_t''(z_{1t})}{2!} (z_1 - z_{1t})^2; \quad (4)$$

$$\sigma_c(z_1) \approx \sigma_c(z_{1c}) + \frac{\sigma_c'(z_{1c})}{1!} (z_1 - z_{1c}) + \frac{\sigma_c''(z_{1c})}{2!} (z_1 - z_{1c})^2. \quad (5)$$

Здесь $z_{1t} = h_{C1}/2 + z_{1n1}/2$; $z_{1c} = -h_1/2 + h_{C1}/2 + z_{1n1}/2$. В (4) $z_{1n1} \leq z_1 \leq h_{C1}$, поскольку эта формула справедлива в зонах растяжения, расположенных в нижней части балки за фронтом трещины (см. рис. 2,а). В (5) $-h_1 + h_{C1} \leq z_1 \leq z_{1n1}$, так как эта формула справедлива в зонах сжатия, расположенных в нижней части балки за фронтом трещины (см. рис. 2,а).

Формулы (4), (5) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_t(z_1) \approx \beta_{0t} + \beta_{1t}(z_1 - z_{1t}) + \beta_{2t}(z_1 - z_{1t})^2; \quad (6)$$

$$\sigma_c(z_1) \approx \beta_{0c} + \beta_{1c}(z_1 - z_{1c}) + \beta_{2c}(z_1 - z_{1c})^2. \quad (7)$$

Коэффициенты $\beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{0c}, \beta_{1c}, \beta_{2c}$ определяются с использованием формулы (2). Поскольку отношение длины пролета балки к ее толщине велико, распределение деформаций по высоте балки в ее нижней части вычисляется с использованием гипотезы плоских сечений Бернулли:

$$\varepsilon = \varkappa_1(z_1 - z_{1n_1}) \quad (8)$$

(z_{1n_1} — координата нейтральной линии в нижней части поперечного сечения (см. рис. 2, а); \varkappa_1 — кривизна нейтральной линии в нижней части балки).

Подставляя (6)–(8) в (2), получаем

$$\begin{aligned} \varkappa_1(z_1 - z_{1n_1}) = & [\beta_{0t} + \beta_{1t}(z_1 - z_{1t}) + \beta_{2t}(z_1 - z_{1t})^2]/E_t + \\ & + [\beta_{0t} + \beta_{1t}(z_1 - z_{1t}) + \beta_{2t}(z_1 - z_{1t})^2]^{1/n_t}/H_t^{1/n_t}; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_1(z_1 - z_{1n_1}) = & [\beta_{0c} + \beta_{1c}(z_1 - z_{1c}) + \beta_{2c}(z_1 - z_{1c})^2]/E_c + \\ & + [\beta_{0c} + \beta_{1c}(z_1 - z_{1c}) + \beta_{2c}(z_1 - z_{1c})^2]^{1/n_c}/H_c^{1/n_c}. \quad (10) \end{aligned}$$

Подставляя $z_1 = z_{1t}$ в (9) и $z_1 = z_{1c}$ в (10), находим следующие выражения:

$$\varkappa_1(z_{1t} - z_{1n_1}) = \frac{\beta_{0t}}{E_t} + \frac{\beta_{0t}^{1/n_t}}{H_t^{1/n_t}}, \quad \varkappa_1(z_{1c} - z_{1n_1}) = \frac{\beta_{0c}}{E_c} + \frac{\beta_{0c}^{1/n_c}}{H_c^{1/n_c}}. \quad (11)$$

Вычисляя первую и вторую производные по z_1 от выражения (9) и подставляя в них $z_1 = z_{1t}$, имеем

$$E'_t \varkappa_1(z_{1t} - z_{1n_1}) + E_t \varkappa_1 = \beta_{1t} + \frac{1}{H_t^{1/n_t}} \left(E'_t \beta_{0t}^{1/n_t} + \frac{E_t}{n_t} \beta_{0t}^{1/n_t - 1} \beta_{1t} \right); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E''_t \varkappa_1(z_{1t} - z_{1n_1}) + 2E'_t \varkappa_1 = & 2\beta_{2t} + \frac{1}{H_t^{1/n_t}} \left[E''_t \beta_{0t}^{1/n_t} + \frac{E'_t}{n_t} \beta_{0t}^{1/n_t - 1} \beta_{1t} + \right. \\ & \left. + \beta_{2t} \left(\frac{E'_t}{n_t} \beta_{0t}^{1/n_t - 1} + E_t \frac{1 - n_t}{n_t^2} \beta_{0t}^{(1-2n_t)/n_t} \beta_{1t} \right) + 2 \frac{E_t}{n_t} \beta_{0t}^{(1-n_t)/n_t} \beta_{2t} \right], \quad (13) \end{aligned}$$

где E'_t, E''_t — значения первой и второй производных E_t по z_1 при $z_1 = z_{1t}$. Вычисляя первую и вторую производные по z_1 от выражения (10) и подставляя в них $z_1 = z_{1c}$, находим

$$E'_c \varkappa_1(z_{1c} - z_{1n_1}) + E_c \varkappa_1 = \beta_{1c} + \frac{1}{H_c^{1/n_c}} \left(E'_c \beta_{0c}^{1/n_c} + \frac{E_c}{n_c} \beta_{0c}^{1/n_c - 1} \beta_{1c} \right); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} E''_c \varkappa_1(z_{1c} - z_{1n_1}) + 2E'_c \varkappa_1 = & 2\beta_{2c} + \frac{1}{H_c^{1/n_c}} \left[E''_c \beta_{0c}^{1/n_c} + \frac{E'_c}{n_c} \beta_{0c}^{1/n_c - 1} \beta_{1c} + \right. \\ & \left. + \beta_{2c} \left(\frac{E'_c}{n_c} \beta_{0c}^{1/n_c - 1} + E_c \frac{1 - n_c}{n_c^2} \beta_{0c}^{(1-2n_c)/n_c} \beta_{1c} \right) + 2 \frac{E_c}{n_c} \beta_{0c}^{(1-n_c)/n_c} \beta_{2c} \right], \quad (15) \end{aligned}$$

где E'_c, E''_c — значения первой и второй производных E_c при $z_1 = z_{1c}$.

В результате получаем систему шести уравнений (11)–(15) относительно восьми неизвестных $\beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{0c}, \beta_{1c}, \beta_{2c}, z_{1n_1}, \varkappa_1$. Еще два уравнения можно получить, записывая уравнения равновесия нижней части поперечного сечения балки

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \int_{z_{1n_1}}^{h_{C_1}} \sigma_t b(z_1) dz_1 + \int_{-h_1+h_{C_1}}^{z_{1n_1}} \sigma_c b(z_1) dz_1, \\
 M_1 &= \int_{z_{1n_1}}^{h_{C_1}} \sigma_t z_1 b(z_1) dz_1 + \int_{-h_1+h_{C_1}}^{z_{1n_1}} \sigma_c z_1 b(z_1) dz_1.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь σ_t, σ_c определены в (6), (7); N_1, M_1 — осевая сила и изгибающий момент в нижней части балки соответственно (см. рис. 2,а). Для заданных геометрии балки, нагрузок и свойств материала балки уравнения (11)–(16) можно решить относительно $\beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{0c}, \beta_{1c}, \beta_{2c}, z_{1n_1}, \varkappa_1$ с использованием пакета MatLab.

Для того чтобы вычислить плотность дополнительной энергии в областях растяжения и сжатия, расположенных в верхней части балки, нужно записать формулы (3) в следующем виде:

$$u_{0ta_2}^* = \frac{\sigma_{gt}^2}{2E_t} + \frac{n_t \sigma_{gt}^{(1-n_t)/n_t}}{(1+n_t)H_t^{1/n_t}}, \quad u_{0ca_2}^* = \frac{\sigma_{gc}^2}{2E_c} + \frac{n_c \sigma_{gc}^{(1-n_c)/n_c}}{(1+n_c)H_c^{1/n_c}} \tag{17}$$

(σ_{gt}, σ_{gc} — нормальные напряжения в зонах растяжения и сжатия соответственно), а в уравнениях (6), (7), (11)–(16) величины $\beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{0c}, \beta_{1c}, \beta_{2c}, z_1, z_{1n_1}, \varkappa_1, z_{1t}, z_{1c}, h_{C_1}, h_1, N_1, M_1$ заменить на величины $\beta_{g0t}, \beta_{g1t}, \beta_{g2t}, \beta_{g0c}, \beta_{g1c}, \beta_{g2c}, z_2, z_{2n_2}, \varkappa_2, z_{2t}, z_{2c}, h_{C_2}, h_2, N_2, M_2$ соответственно. Здесь $z_{2n_2}, \varkappa_2, N_2, M_2$ — координата нейтральной линии, кривизна нейтральной линии, осевая сила и изгибающий момент в верхней части балки соответственно (см. рис. 2,а).

Для того чтобы вычислить величины $u_{0ta_3}^*, u_{0ca_3}^*$, нужно записать формулы (3) следующим образом:

$$u_{0ta_3}^* = \frac{\sigma_{rt}^2}{2E_t} + \frac{n_t \sigma_{rt}^{(1-n_t)/n_t}}{(1+n_t)H_t^{1/n_t}}, \quad u_{0ca_3}^* = \frac{\sigma_{rc}^2}{2E_c} + \frac{n_c \sigma_{rc}^{(1-n_c)/n_c}}{(1+n_c)H_c^{1/n_c}} \tag{18}$$

(σ_{rt}, σ_{rc} — нормальные напряжения в областях растяжения и сжатия в поперечном сечении, расположенных перед фронтом трещины), а в формулах (6), (7), (11)–(16) величины $\beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{0c}, \beta_{1c}, \beta_{2c}, z_1, z_{1n_1}, \varkappa_1, z_{1t}, z_{1c}, h_{C_1}, h_1, N_1, M_1$ заменить на величины $\beta_{r0t}, \beta_{r1t}, \beta_{r2t}, \beta_{r0c}, \beta_{r1c}, \beta_{r2c}, z_3, z_{3n_3}, \varkappa_3, z_{3t}, z_{3c}, h_{C_3}, h_1 + h_2, N_3, M_3$, где $z_{3n_3}, \varkappa_3, N_3, M_3$ — соответственно координата нейтральной линии, кривизна нейтральной линии, осевая сила и изгибающий момент в поперечном сечении, расположенном перед фронтом трещины (см. рис. 2,б).

Выражение для скорости выделения энергии деформации можно получить, подставляя (3), (17), (18) в (1). Интегрирование в формуле (1) можно выполнить с использованием пакета MatLab.

Для балки прямоугольного сечения формула (1) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 G &= \int_{z_{1n_1}}^{h_{C_1}} u_{0ta_1}^* dz_1 + \int_{-h_1+h_{C_1}}^{z_{1n_1}} u_{0ca_1}^* dz_1 + \int_{z_{2n_2}}^{h_{C_2}} u_{0ta_2}^* dz_2 + \int_{-h_2+h_{C_2}}^{z_{2n_2}} u_{0ca_2}^* dz_2 - \\
 &\quad - \int_{z_{3n_3}}^{h_{C_3}} u_{0ta_3}^* dz_3 - \int_{-h_1-h_2+h_{C_3}}^{z_{3n_3}} u_{0ca_3}^* dz_3. \tag{19}
 \end{aligned}$$

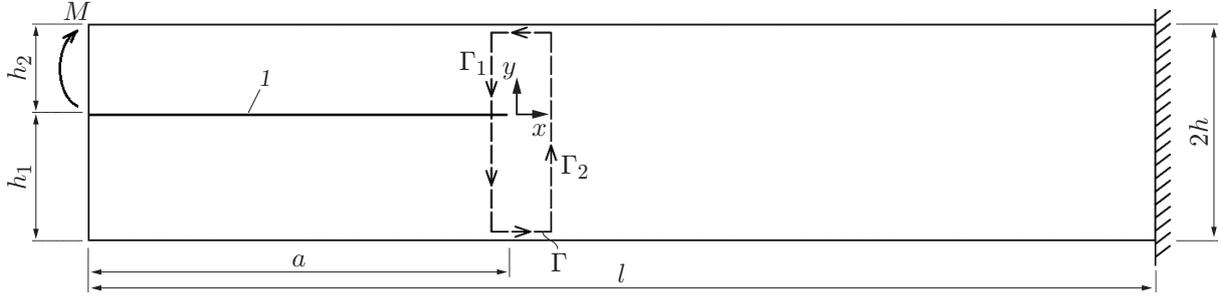


Рис. 3. Схема балки с продольной трещиной (1)

2. Пример. Метод, изложенный в п. 1, применяется для анализа скорости выделения энергии деформации в консоли при наличии в ней продольной трещины (рис. 3). Поперечным сечением балки является прямоугольник шириной b и высотой $2h$. Толщины нижней и верхней частей балки равны h_1 и h_2 соответственно, длина трещины — a . Балка нагружена изгибающим моментом M , приложенным на свободном конце верхней части консоли. Нижняя часть балки свободна от напряжений, поэтому $u_{0ta_1}^* = 0$, $u_{0ca_1}^* = 0$.

Модули упругости E_t , E_c изменяются по высоте балки в соответствии с законами

$$E_t = E_{t0} \left[1 + \delta_t \sin \left(\frac{z_3 + h}{2h} \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad E_c = E_{c0} \left[1 + \delta_c \sin \left(\frac{z_3 + h}{2h} \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (20)$$

где E_{t0} , E_{c0} — значения модулей E_t и E_c на верхней и нижней поверхностях балки соответственно; δ_t , δ_c — константы, определяющие величину градиентов модулей E_t , E_c . Ось z_3 — вертикальная ось, проходящая через центр тяжести поперечного сечения ($-h \leq z_3 \leq h$).

Выражения для плотностей энергии деформации $u_{0ta_2}^*$, $u_{0ca_2}^*$ в верхней и нижней частях балки получаются следующим образом. Запишем формулы (20) в виде

$$E_t = E_{t0} \left[1 + \delta_t \sin \left(\frac{z_2 + h_2/2}{2h} \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad E_c = E_{c0} \left[1 + \delta_c \sin \left(\frac{z_2 + h_2/2}{2h} \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (21)$$

где $-h_2/2 \leq z_2 \leq h_2/2$. Затем в формулах (6), (7) величины β_{0t} , β_{1t} , β_{2t} , β_{0c} , β_{1c} , β_{2c} , z_1 , z_{1t} , z_{1c} заменим на величины β_{g0t} , β_{g1t} , β_{g2t} , β_{g0c} , β_{g1c} , β_{g2c} , z_2 , z_{2t} , z_{2c} соответственно, после чего подставим выражения (6), (7) в уравнения равновесия (16). В уравнении (16) заменим величины $b(z_1)$, h_{C1} , z_{1n_1} , h_1 , N_1 , M_1 на величины b , $h_2/2$, z_{2n_2} , h_2 , N_2 , M_2 соответственно. В результате получаем

$$\begin{aligned} N = & b \left\{ \beta_{0t} \left(\frac{h_2}{2} - z_{2n_2} \right) + \frac{\beta_{1t}}{2} \left[\left(\frac{h_2}{2} - z_{2t} \right)^2 - (z_{2n_2} - z_{2t})^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\beta_{2t}}{3} \left[\left(\frac{h_2}{2} - z_{2t} \right)^3 - (z_{2n_2} - z_{2t})^3 \right] \right\} + b \left\{ \beta_{0t} \left(z_{2n_2} + \frac{h_2}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\varphi_{1t}}{2} \left[(z_{2n_2} - z_{2t})^2 - \left(-\frac{h_2}{2} - z_{2n_2} \right)^2 \right] + \frac{\beta_{2c}}{3} \left[(z_{2n_2} - z_{2t})^3 - \left(-\frac{h_2}{2} - z_{2t} \right)^3 \right] \right\}; \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = & b \left\{ \frac{\beta_{0t}}{2} \left(\frac{h_2^2}{4} - z_{2n_2}^2 \right) + \beta_{1t} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{h_2^3}{8} - z_{2n_2}^3 \right) - \frac{z_{2t}}{2} \left(\frac{h_2^2}{4} - z_{2n_2}^2 \right) \right] + \right. \\ & \left. + \beta_{2t} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{h_2^4}{16} - z_{2n_2}^4 \right) - \frac{2z_{2t}}{3} \left(\frac{h_2^3}{8} - z_{2n_2}^3 \right) + \frac{z_{2t}^2}{2} \left(\frac{h_2^2}{4} - z_{2n_2}^2 \right) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+ b \left\{ \frac{\varphi_{0c}}{2} \left(z_{2n_2}^2 - \frac{h_2^2}{4} \right) + \varphi_{1c} \left[\frac{1}{3} \left(z_{2n_2}^3 + \frac{h_2^3}{8} \right) - \frac{z_{2t}}{2} \left(z_{2n_2}^2 - \frac{h_2^2}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. + \varphi_{2c} \left[\frac{1}{4} \left(z_{2n_2}^4 - \frac{h_2^4}{16} \right) - \frac{2z_{2t}}{3} \left(z_{2n_2}^3 + \frac{h_2^3}{8} \right) + \frac{z_{2t}^2}{2} \left(z_{2n_2}^2 - \frac{h_2^2}{4} \right) \right] \right\}, \quad (23)$$

при этом учтено, что $N_2 = 0$; $M_2 = M$ (см. рис. 2). После замены в уравнениях (11)–(15) величин β_{0t} , β_{1t} , β_{2t} , β_{0c} , β_{1c} , β_{2c} , z_{1n_1} , \varkappa_1 , z_{1t} , z_{1c} на величины β_{g0t} , β_{g1t} , β_{g2t} , β_{g0c} , β_{g1c} , β_{g2c} , z_{2n_2} , \varkappa_2 , z_{2t} , z_{2c} соответственно и подстановки в полученные уравнения выражений (21) уравнения (11)–(15), (22), (23) можно решить с помощью пакета MatLab. Затем, подставляя σ_{gt} , σ_{gc} в (17), можно вычислить $u_{0ta_2}^*$, $u_{0ca_2}^*$.

Из уравнений (11)–(15), (22), (23) можно также определить величины β_{r0t} , β_{r1t} , β_{r2t} , β_{r0c} , β_{r1c} , β_{r2c} , z_{3n_3} , \varkappa_3 . Для этого величины β_{g0t} , β_{g1t} , β_{g2t} , β_{g0c} , β_{g1c} , β_{g2c} , z_{2n_2} , \varkappa_2 , z_{2t} , z_{2c} , $h_2/2$, h_2 , N_2 , M_2 нужно заменить на величины β_{r0t} , β_{r1t} , β_{r2t} , β_{r0c} , β_{r1c} , β_{r2c} , z_{3n_3} , \varkappa_3 , z_{3t} , z_{3c} , h , $2h$, N_3 , M_3 соответственно, где $N_3 = 0$; $M_3 = M$. Решив уравнения (11)–(15), (22), (23), можно вычислить плотность дополнительной энергии деформации в поперечном сечении балки перед фронтом трещины, подставив σ_{rt} , σ_{rc} в (18).

Полагая $u_{0ta_1}^* = 0$, $u_{0ca_1}^* = 0$, подставляя (17), (18) в (19) и заменяя h_{C_2} и h_{C_3} на $h_2/2$ и h соответственно, интегрирование уравнения (19) можно выполнить с использованием пакета MatLab.

Для верификации предложенного метода вычисленная скорость выделения энергии деформации сравнивается с J -интегралом [15], который вычисляется вдоль контура Γ (штриховая линия на рис. 3). В нижней части балки J -интеграл равен нулю. J -интеграл можно представить в виде суммы $J = J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2}$, где J_{Γ_1} , J_{Γ_2} — значения J -интеграла вдоль участков Γ_1 , Γ_2 контура Γ соответственно (участок Γ_1 находится в верхней части поперечного сечения балки, расположенного над трещиной, участок Γ_2 — в поперечном сечении балки, расположенном перед фронтом трещины). Выражение для J -интеграла вдоль участка Γ_1 записывается в виде

$$J_{\Gamma_1} = \int_{z_{2n_2}}^{h_2/2} \left[u_{0ta_2} \cos \alpha - \left(p_{xt} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{yt} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dz_2 + \\ + \int_{-h_2/2}^{z_{2n_2}} \left[u_{0ca_2} \cos \alpha - \left(p_{xc} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{yc} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dz_2, \quad (24)$$

где $p_{xt} = -\sigma_{gt}$; $p_{xc} = -\sigma_{gc}$; $p_{yt} = p_{yc} = 0$; $\partial u / \partial x = \varepsilon = \varkappa_2(z_2 - z_{2n_2})$; $\cos \alpha = -1$. Выражения для плотностей энергии деформации u_{0ta_2} , u_{0ca_2} имеют вид [14]

$$u_{0ta_2} = \frac{\sigma_{gt}^2}{2E_t} + \frac{\sigma_{gt}^{(1-n_t)/n_t}}{(1+n_t)H_t^{1/n_t}}, \quad u_{0ca_2} = \frac{\sigma_{gc}^2}{2E_c} + \frac{\sigma_{gc}^{(1-n_c)/n_c}}{(1+n_c)H_c^{1/n_c}}, \quad (25)$$

где E_t , E_c определены в (21).

J -интеграл вдоль участка Γ_2 вычисляется следующим образом:

$$J_{\Gamma_2} = \int_{z_{3n_3}}^h \left[u_{0ta_3} \cos \alpha_1 - \left(p_{xt_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + p_{yt_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right] (-dz_3) + \\ + \int_{-h}^{z_{3n_3}} \left[u_{0ca_3} \cos \alpha_1 - \left(p_{xc_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + p_{yc_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right] (-dz_3). \quad (26)$$

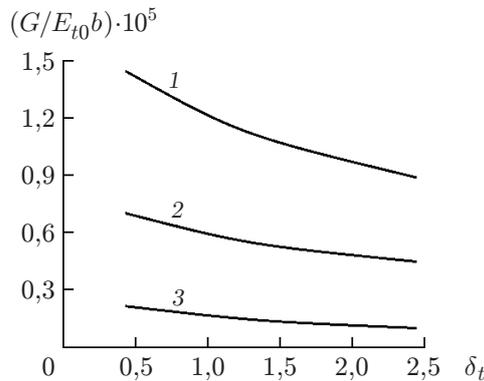


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость скорости выделения энергии деформации от параметра δ_t :
 1 — $h_2/(2h) = 0,25$, 2 — $h_2/(2h) = 0,50$, 3 — $h_2/(2h) = 0,75$

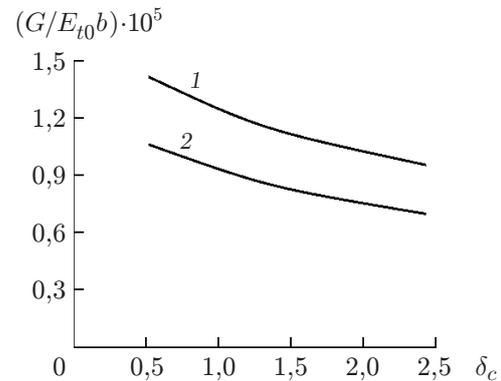


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость скорости выделения энергии деформации от параметра δ_c :
 1 — нелинейный материал, 2 — линейно-упругий материал

Здесь $p_{xt_1} = \sigma_{rt}$; $p_{xc_1} = \sigma_{rc}$; $p_{yt_1} = p_{yc_1} = 0$; $\partial u / \partial x_1 = \varkappa_3(z_3 - z_{3n_3})$; $\cos \alpha_1 = 1$. Плотности энергии деформации u_{0ta_3} и u_{0ca_3} определены в (25). Для того чтобы вычислить эти плотности, величины σ_{gt} и σ_{gc} нужно заменить на σ_{rt} и σ_{rc} соответственно. Модули упругости E_t и E_c , содержащиеся в выражениях (25), определены в (20). Интегралы (24), (26) можно вычислить с использованием пакета MatLab. Сумма J -интегралов (24), (26) представляет собой скорость выделения энергии (19), что подтверждает корректность предложенного в работе метода определения скорости выделения энергии деформации. Скорость выделения энергии вычислялась также с сохранением более трех членов в рядах Тейлора. При этом вычисленное значение скорости выделения энергии деформации отличалось от значения, вычисленного с сохранением трех членов в рядах Тейлора, менее чем на 2 %.

Ниже приведены результаты параметрического исследования скорости выделения энергии деформации с использованием соотношения (19) для консольной балки (см. рис. 3). Вычислялась безразмерная скорость выделения энергии деформации $G_N = G/(E_{t0}b)$ при значениях параметров $b = 0,02$, $h = 0,006$ м, $M = 80$ Н·м. Положение трещины по высоте балки определяется отношением $h_2/(2h)$. Константы δ_t и δ_c характеризуют градиенты модулей упругости E_t и E_c по высоте балки. На рис. 4 приведена зависимость $G_N = G/(E_{t0}b)$ от величины δ_t при $E_{c0}/E_{t0} = 0,8$, $\delta_c/\delta_t = 0,6$, $H_t/E_{t0} = 0,7$, $H_c/E_{t0} = 0,9$, $n_c = n_t = 0,6$ и различных значениях отношения $h_2/(2h)$. С увеличением δ_t скорость выделения энергии деформации уменьшается. Это обусловлено тем, что жесткость балки увеличивается с увеличением δ_t . Также скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения $h_2/(2h)$ вследствие увеличения жесткости части балки, расположенной выше трещины.

На рис. 5 приведена зависимость безразмерной скорости выделения энергии деформации от величины δ_c при $\delta_t = 0,5$ и $h_2/(2h) = 0,25$. При увеличении δ_c скорость выделения энергии деформации уменьшается. На рис. 5 приведена также зависимость $G_n(\delta_c)$ для балки из линейно-упругого неоднородного материала (соотношения для этого материала получаются из (1) при $H_t \rightarrow \infty$ и $H_c \rightarrow \infty$). Из приведенных зависимостей следует, что для балки из нелинейно-упругого неоднородного материала скорость выделения энергии деформации больше. Нелинейное поведение материала учитывается вторым членом в правой части соотношений Рамберга — Осгуда (2), который зависит от констант H_t , H_c ,

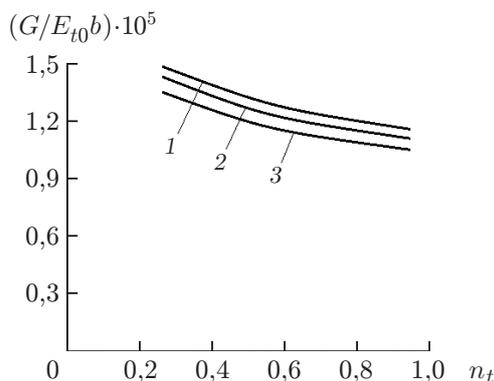


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость скорости выделения энергии деформации от параметра n_t :
 1 — $H_t/E_{t0} = 0,5$, 2 — $H_t/E_{t0} = 1,0$, 3 — $H_t/E_{t0} = 2,0$

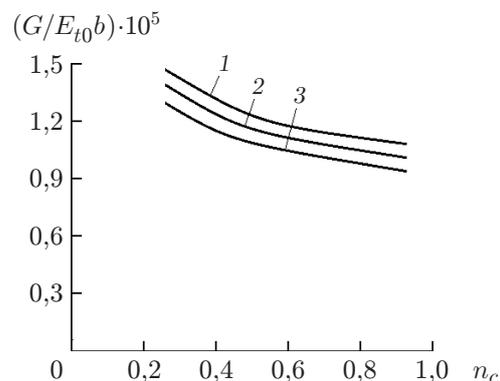


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость скорости выделения энергии деформации от параметра n_c :
 1 — $H_c/E_{t0} = 0,5$, 2 — $H_c/E_{t0} = 1,0$, 3 — $H_c/E_{t0} = 2,0$

n_t , n_c . Результаты исследования влияния этих параметров на скорость выделения энергии деформации приведены на рис. 6, 7. Видно, что скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением параметров n_t , n_c , H_t/E_{t0} , H_c/E_{t0} .

Заключение. Предложен метод вычисления скорости выделения энергии деформации в балке из нелинейно-упругого материала при наличии в ней продольной трещины. Используются соотношения между напряжениями и деформациями Рамберга — Осгуда. Поперечное сечение балки симметрично относительно оси, проходящей через центр тяжести. Свойства материала балки непрерывно изменяются по ее высоте. Поведение материала различно при растяжении и сжатии. Расположение трещины по высоте балки произвольно. С использованием предложенного метода исследована скорость выделения энергии деформации в консоли с прямоугольным поперечным сечением, содержащей продольную трещину. Для верификации предложенного метода использован J -интеграл. Установлено, что скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением градиента механических характеристик материала по высоте балки и толщины части балки, расположенной над трещиной. Скорость выделения энергии деформации для балки из нелинейно-упругого материала больше, чем для балки из линейно-упругого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Erdogan F.** Fracture mechanics of functionally graded materials // Comput. Engng. 1995. V. 5. P. 753–770.
2. **Paulino G. C.** Fracture in functionally graded materials // Engng Fracture Mech. 2002. V. 69. P. 1519–1530.
3. **Tilbrook M. T., Moon R. J., Hoffman M.** Crack propagation in graded composites // Composites Sci. Technol. 2005. V. 65. P. 201–220.
4. **Carpinteri A., Pugno N.** Cracks in re-entrant corners in functionally graded materials // Engng Fracture Mech. 2006. V. 73. P. 1279–1291.
5. **Upadhyay A. K., Simha K. R. Y.** Equivalent homogeneous variable depth beams for cracked FGM beams; compliance approach // Intern. J. Fracture. 2007. V. 144. P. 209–213.

6. **Shi-Dong Pan, Ji-Cai Feng, Zhen-Gong Zhou, Wu-Lin-Zhi.** Four parallel non-symmetric mode-III cracks with different lengths in a functionally graded material plane // Strength, Fracture Complexity. 2009. V. 5. P. 143–166.
7. **Markworth A. J., Ramesh K. S., Parks W. P. (Jr.)** Review: modeling studies applied to functionally graded materials // J. Materials Sci. 1995. V. 30. P. 2183–2193.
8. **Butcher R. J., Rousseau C. E., Tippur H. V.** A functionally graded particulate composite: Measurements and failure analysis // Acta Materialia. 1999. V. 47. P. 259–268.
9. **Gasik M. M.** Functionally graded materials: bulk processing techniques // Intern. J. Materials Product Technol. 2010. V. 39. P. 20–29.
10. **Uslu Uysal M.** Buckling behaviors of functionally graded polymeric thin-walled hemispherical shells // Steel Composite Structures. 2016. V. 21. P. 849–862.
11. **Bohidar S. K., Sharma R., Mishra P. R.** Functionally graded materials: A critical review // Intern. J. Res. 2014. V. 1. P. 289–301.
12. **Rizov V. I.** An analytical solution to the strain energy release rate of a crack in functionally graded beams // Europ. J. Mech. A. Solids. 2017. V. 65. P. 301–312.
13. **Rizov V. I.** Delamination in a two-dimensional functionally graded beam // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2018. V. 59, N 1. P. 146–152.
14. **Rizov V. I.** Lengthwise fracture analyses of functionally graded beams by the Ramberg — Osgood equation // Engng Rev. 2018. V. 38. P. 309–320.
15. **Broek D.** Elementary engineering fracture mechanics. S. l.: Springer, 1986.

*Поступила в редакцию 12/XI 2018 г.,
после доработки — 18/II 2019 г.
Принята к публикации 25/II 2019 г.*
