К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Ю. А. Березин, В. И. Карпман (Новосибирск)

Найдено нестационарное решение уравнения Кортевега — де Вриса [1], описывающее профиль поверхностной волны конечной, но малой амплитуды на больших расстояниях от начального возмущения.

В работе [1] Кортевег и де Врис получили уравнение, описывающее распространение волн конечной, но малой амплитуды на поверхности тяжелой жидкости, находящейся в канале конечной глубины, которое имеет вид

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+u_0\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{3}{2}\frac{u_0}{h}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{1}{2}u_0\delta^2\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0\quad\left(u_0=\sqrt{gh},\quad\delta^2=\frac{\alpha}{\rho g}-\frac{h^2}{3}\right)\tag{1}$$

Здесь $\eta(x,t)$ — возвышение свободной поверхности жидкости, h — глубина канала, ρ — плотность жидкости, α — коэффициент поверхностного натяжения. Как отмечается в работе [1], это уравнение описывает волны, движущиеся только в одном направлении, т. е. описывает одну из двух движущихся в противоположных направлениях систем волн, которые будут следствием некоторого возмущения, после того как произойдет их полное разделение.

Линеаризация уравнения (1) дает дисперсионное уравнение

$$\omega/k=u_0(1+{}^1/_2\delta^2k^2)\tag{2}$$

которое следует также из известного дисперсионного уравнения для капиллярно-гравитационных волн [2]

$$\omega^2=kg\left(1+\frac{\alpha}{\rho g}k^2\right)\operatorname{th}kh\tag{3}$$

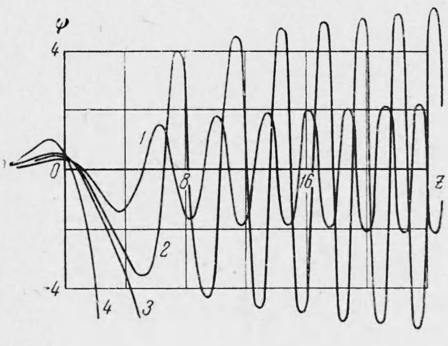
в пределе длинных волн ($kh\ll1$). Таким образом, при выводе уравнения (1) малым параметром будет отношение h/λ — глубины канала к длине волны.

Из уравнения (2) следует, что в зависимости от глубины канала фазовая скорость малых колебаний либо возрастает с увеличением k (при $h<\sqrt{3\alpha/\rho g}$, $\delta^2>0$), либо убывает с ростом k (при $h>\sqrt{3\alpha/\rho g}$, $\delta^2<0$). Будем говорить, что в первом случае имеет место положительная дисперсия, во втором — отрицательная дисперсия.

Стационарные решения уравнения (1), полученные в [1], дают уединенные и периодические («кноидальные») волны конечной амплитуды. Для уединенных волн имеем

$$\eta(x,t)=\mp|\max\eta|\operatorname{sch}^2\left[\left(\frac{|\max\eta|}{h|\delta|^2}\right)^{1/2}\frac{z}{2}\right]\qquad\left(\frac{z=x-ut}{u=u_0(1+{}^1/_2\max\eta/h)}\right)\tag{4}$$

Здесь u — скорость уединенной волны. Отсюда следует, что длина уединенной волны определяется ее амплитудой и величиной $|\delta|$, которую будем называть длиной дисперсии. В случае положительной дисперсии существуют нелинейные стационарные волны типа впадин (знак минус в (4)), а в случае отрицательной дисперсии — волны типа возвышений (знак плюс в (4)).



Фиг. 1

Как было отмечено в работах [3, 4], распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины обнаруживает аналогию с распространением волн конечной амплитуды в разреженной плазме, где также оказывается возможным распространение уединенных и периодических волн, которые были рассмотрены, например, в [5–7]. В работе [8] было получено уравнение для нестационарных волн конечной, но малой амплитуды, распространяющихся в плазме как поперек магнитного поля, так и под малым углом к нему, которое имеет вид, сходный с уравнением (1). Там же было найдено нестационарное решение полученного уравнения, автомодельное по отношению к некоторым переменным. Как будет показано ниже, аналогичное нестационарное решение можно получить и для уравнения (1).

Перейдем в (1) к новым переменным

$$\eta = \mp \frac{1}{3} 2^{2/3} h f, \qquad \xi = 2^{1/3} |\mu|^{-1/2} \frac{x - u_0 t}{h}, \qquad \tau = \mp |\mu|^{-1/2} \frac{u_0 t}{h} \left(\mu = \frac{\delta^2}{h^2}\right) \tag{5}$$

Здесь верхний знак соответствует случаю положительной дисперсии ($\delta^2 > 0$), нижний — отрицательной дисперсии ($\delta^2 < 0$). В результате получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} = 0 \tag{6}$$

Уравнение (6) инвариантно относительно преобразования

$$\tau \to \gamma \tau, \qquad \xi \to \gamma^{1/3} \xi, \qquad f \to \gamma^{-2/3} f \tag{7}$$

Поэтому полагаем

$$f(\xi, \tau) = -\tau^{-2/3} \psi(z), \qquad z = -\tau^{-1/3} \xi \tag{8}$$

и после подстановки (8) в (6) получаем уравнение

$$3\psi''' + 3\psi\psi' + z\psi' + 2\psi = 0 \tag{9}$$

Такое уравнение было исследовано авторами в [8], где показано, что семейство решений уравнения (9), затухающих при $z \to -\infty$, имеет при $z \to -\infty$ асимптотику

$$\psi(z) = \frac{1}{2} C (3^{-1/3} |z|)^{1/4} \exp\left[-2\left(\frac{|z|}{3}\right)^{3/2}\right] \tag{10}$$

Здесь C — некоторая произвольная постоянная. Уравнение (9) было решено численно на ЭВМ с использованием асимптотики (10) для определения значений $\psi(z)$, $\psi'(z)$, $\psi''(z)$ при некоторых больших отрицательных z. Результаты решения приведены на фиг. 1. Кривые *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют значениям $C = 1.0$, 1.6, 1.8, 5.0. При $C \leqslant 1.6$ функция $\psi(z)$ имеет осциллирующий характер (кривые *1*, *2*); при $C \geqslant 1.8$ решения представляются кривыми типа *3*, *4* и не имеют физического смысла. Как показано в работе [8], решение $\psi(z)$ при достаточно малых C (согласно численному решению, при $C \leqslant 1.6$) имеет при $z \to +\infty$ асимптотику

$$\psi(z) = z^{1/4} \{C_1 \cos[2(1/3 z)^{3/2}] + C_2 \sin[2(1/3 z)^{3/2}]\} \tag{11}$$

Здесь C_1, C_2 — некоторые произвольные постоянные. При достаточно больших C (согласно численному решению, при $C \geqslant 1.8$) решение $\psi(z)$ имеет в некоторых точках, зависящих от значения C, полюс второго порядка. Действительно, если постоянная C в (10) достаточно велика, то в области небольших z в уравнении (9) можно пренебречь двумя последними членами, и при больших по модулю ψ ($\psi < 0$) будем иметь

$$\psi(z) = -12(z - \beta)^{-2} \tag{12}$$

где β — произвольная постоянная. Таким образом, при достаточно больших C решения уравнения (9) расходятся как $(z - \beta)^{-2}$, причем β уменьшается с увеличением C.

Используя формулы (5) и (8), запишем возвышение свободной поверхности жидкости

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{3} 2^{2/3} h \mu^{1/3} \left(\frac{h}{u_0 t}\right)^{2/3} \psi \left\{\left(\frac{2h}{\mu u_0 t}\right)^{1/3} \frac{x - u_0 t}{h}\right\} \tag{13}$$

В случае положительной дисперсии ($h < \sqrt{3\alpha / \rho g}$) для достаточно больших x и t имеем

при $u_0 t < x$

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{3} 2^{3/4} h \mu^{1/4} \left(\frac{h}{u_0 t}\right)^{3/4} \left(\frac{x - u_0 t}{h}\right)^{1/4} \left\{C_1 \cos\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \left(\frac{h}{\mu u_0 t}\right)^{1/2} \left(\frac{x - u_0 t}{h}\right)^{3/2}\right] + \right.$$
$$\left. + C_2 \sin\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \left(\frac{h}{\mu u_0 t}\right)^{1/2} \left(\frac{x - u_0 t}{h}\right)^{3/2}\right]\right\} \tag{14}$$

при $u_0 t > x$

$$\eta(x, t) = -\frac{h}{3} C \left(\frac{\mu}{2\sqrt[3]{3}}\right)^{1/4} \left(\frac{h}{u_0 t}\right)^{3/4} \left(\frac{u_0 t - x}{h}\right)^{1/4} \exp\left\{-\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \left(\frac{h}{\mu u_0 t}\right)^{1/2} \left(\frac{u_0 t - x}{h}\right)^{3/2}\right\} \tag{15}$$

В случае отрицательной дисперсии ($h > \sqrt{3\alpha / \rho g}$) для достаточно больших x и t имеем

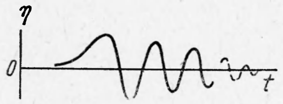
при $u_0 t < x$

$$\eta(x, t) = \frac{h}{3} C \left(\frac{|\mu|}{2 \cdot 3^{1/3}}\right)^{1/4} \left(\frac{h}{u_0 t}\right)^{3/4} \left(\frac{x - u_0 t}{h}\right)^{1/4} \exp\left\{-\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \left(\frac{h}{|\mu| u_0 t}\right)^{1/2} \left(\frac{x - u_0 t}{h}\right)^{3/2}\right\} \tag{16}$$

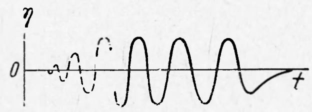
при $u_0 t > x$

$$\eta(x, t) = \frac{1}{3} 2^{3/4} h |\mu|^{1/4} \left(\frac{h}{u_0 t}\right)^{3/4} \left(\frac{u_0 t - x}{h}\right)^{1/4} \left\{C_1 \cos\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \left(\frac{h}{|\mu| u_0 t}\right)^{1/2} \left(\frac{u_0 t - x}{h}\right)^{3/2}\right] + C_2 \sin\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \left(\frac{h}{|\mu| u_0 t}\right)^{1/2} \left(\frac{u_0 t - x}{h}\right)^{3/2}\right]\right\} \tag{17}$$

Форма поверхности жидкости в некоторой фиксированной точке x, описываемой формулами (14)—(17), качественно (без соблюдения масштаба), изображена на фиг. 2 и 3, из которых фиг. 2 соответствует возвышению поверхности жидкости в случае отрицательной дисперсии, а фиг. 3 — возвышению поверхности жидкости в случае положительной дисперсии. По аналогии с [8], заключаем, что эти решения



Фиг. 2



Фиг. 3

описывают асимптотическую форму свободной поверхности жидкости после некоторого начального возмущения, сосредоточенного вблизи точки $x = 0$, при достаточно больших x и t не слишком далеко от фронта волны $x = u_0 t$ (под фронтом волны здесь понимается фронт возмущения, распространяющегося со скоростью $u_0 = \sqrt{gh}$). Части профиля, показанные на фиг. 2 и 3 пунктиром, соответствуют удаленным от фронта областям, которые не описываются формулами (14)—(17).

В заключение авторы благодарят Р. З. Сагдеева за постоянное внимание к работе и ценные обсуждения.

Поступила 11 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Korteweg D. J., Vries G. de. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. Philos. Mag., 1895, vol. 39, ser. 5.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1954.
3. Сагдеев Р. З. Об одной аналогии между волнами на поверхности тяжелой жидкости и нелинейными колебаниями плазмы. Доклад на Рижской конференции по магнитной гидродинамике, 1960.
4. Gardner C. S., Morikawa G. K. Similarity in the asymptotic behavior of collision — free hydromagnetic waves. Preprint, New York. University, 1960.
5. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы. Ядерный синтез, 1961, т. 1, № 1.
6. Карпман В. И. О структуре фронта ударной волны, распространяющейся под углом к магнитному полю в разреженной плазме. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 8.
7. Казанцев А. П. Об установившемся течении плазмы в магнитном ноле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, № 4.
8. Березин Ю. А., Карпман В. И. К теории нестационарных волн конечной амплитуды в разреженной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 46, № 5.