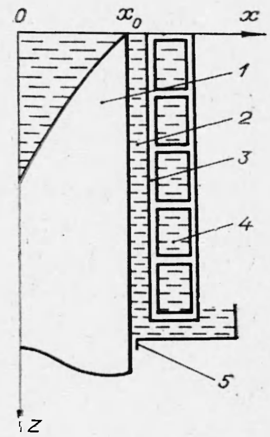
УДК 669.147

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В УСТАНОВКАХ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ

Л. Н. Максимов, А. Н. Черепанов

(*Новосибирск*)

Рассмотрим установившийся процесс затвердевания плоского непрерывного слитка в системе охлаждения с жидкометаллическим теплоносителем, заполняющим зазор между поверхностью слитка и водоохлаждаемой стенкой кристаллизатора (фиг. 1, где *1* — слиток, *2* — жидкометаллический теплоноситель, *3* — стенка, *4* — охлаждающая среда, *5* — капиллярное уплотнение). При этом будем считать, что внешнее водяное охлаждение может регулироваться вдоль слитка, например, посредством секционного теплосъема. Наличие жидкометаллического теплоносителя между поверхностью слитка и водоохлаждаемой стенкой исключает образование газового зазора, что позволяет интенсифицировать процесс охлаждения, делая его равномерным по периметру слитка.



Фиг. 1

Считаем, что переносом тепла вдоль оси Z за счет теплопроводности можно пренебречь по сравнению с конвективным теплопереносом [1], а температура металла в жидкой фазе равна температуре кристаллизации. При этом влияние перегрева расплава будем учитывать соответствующим увеличением скрытой теплоты плавления в приближенном условии Стефана.

1. Если ширина слитка много больше его толщины, то решение рассматриваемой задачи будет зависеть лишь от двух переменных x и z. Выберем декартову систему координат с осью Z, лежащей в плоскости симметрии слитка, а за начало отсчета примем точку пересечения оси Z с плоскостью, проходящей через точку начала кристаллизации. С учетом принятых выше допущений уравнение, определяющее распределение температуры в твердой фазе, имеет вид

$$\rho v C \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{1.1}$$

где v — скорость; ρ — плотность; C — теплоемкость; λ — теплопроводность слитка. При этом указанные теплофизические параметры считаются зависящими от температуры T.

Граничное условие на поверхности слитка запишем в виде закона Ньютона — Рихмана

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = -k\left(T|_{x=x_0} - T_c(z)\right), \tag{1.2}$$

где $2x_0$ — толщина слитка; T_c — температура охлаждающей среды (воды), которая считается заданной функцией координаты z; $k = (R_T +$

$+ R_s + R_c)^{-1}$ — коэффициент теплопередачи; R_T, R_s— термические сопротивления жидкометаллического теплоносителя и стенки; R_c—внешнее термическое сопротивление.

На поверхности кристаллизации должны соблюдаться условия

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=\xi(z)} = \varkappa^* \rho_\text{к} v \xi'(z); \tag{1.3}$$

$$T|_{x=\xi(z)} = T_\text{к}; \tag{1.4}$$

$$\xi(0) = x_0,\ \xi(h) = 0, \tag{1.5}$$

где $\varkappa^* = \varkappa + \frac{1}{2}\frac{(\rho_1 C_1)_\text{ср}}{\rho_\text{к}}\Delta T_\text{пер}$, $\varkappa$ — скрытая теплота плавления; $\Delta\ T_\text{пер}$— перегрев расплава; $(\rho_1 C_1)_\text{ср}$ — среднее значение произведения плотности на теплоемкость жидкой фазы; $T_\text{к}$ — температура кристаллизации; $\rho_\text{к}$ — плотность твердой фазы при $T = T_\text{к}$; $\xi(z)$ — поверхность кристаллизации; h — глубина жидкой лунки (штрих в (1.3) означает дифференцирование по z).

Переходя к переменной Кирхгофа

$$\Theta = \int\limits_{T_\text{к}}^{T} \lambda(T)\,dT, \tag{1.6}$$

запишем уравнения (1.1)—(1.5) в виде

$$\frac{v\rho C}{\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}; \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = -k\left(\frac{1}{\lambda_\text{ср}}\Theta\Big|_{x=x_0} + T_\text{к} - T_\text{c}\right); \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big|_{x=\xi(z)} = \varkappa^*\rho_\text{к} v\xi'(z); \tag{1.9}$$

$$\Theta|_{x=\xi(z)} = 0; \tag{1.10}$$

$$\xi(0) = x_0,\ \xi(h) = 0. \tag{1.11}$$

Условие (1.8) получено линеаризацией соотношения (1.2). Для этого теплопроводность $\lambda(T)$, стоящая под знаком интеграла в (1.6), заменялась ее средним значением $\lambda_\text{ср}$ в рассматриваемом интервале изменения температуры. Интегрируя (1.6) при $\lambda(T) = \lambda_\text{ср}$, находим величину Θ в точке $x = x_0$

$$\Theta|_{x=x_0} = \lambda_\text{ср}(T|_{x=x_0} - T_\text{к}).$$

Выразив отсюда температуру $T|_{x=x_0}$ и подставив ее значение в (1.2), получим соотношение (1.8).

Для некоторых металлов температуропроводность $\lambda/\rho C = a$ является более слабой функцией температуры, чем определяющие ее теплофизические величины ρ, C и λ, поэтому с достаточной точностью ее можно считать постоянной. В общем случае будем полагать

$$a_\text{ср} = \lambda/\rho C,$$

где $a_\text{ср}$—среднее значение температуропроводности.

Приведем уравнения (1.6)—(1.11) к безразмерному виду, выбрав в качестве характерных величин x_0, $T_\text{к}$, $\lambda_\text{к}$, $C_\text{к}$, где $\lambda_\text{к}$, $C_\text{к}$— теплопроводность и теплоемкость соответственно при $T=T_к$. Обозначая чертой вверху безразмерные величины, получим

$$\bar{\Theta}=\int_{1}^{\bar{T}}\bar{\lambda}(\bar{T})\,d\bar{T}; \tag{1.12}$$

$$\mathrm{Pe}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial\bar{z}}=a_{ср}\frac{\partial^2\bar{\Theta}}{\partial\bar{x}^2}; \tag{1.13}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial\bar{x}}\right|_{\bar{x}=1}=-\mathrm{Bi}\left(\frac{1}{\bar{\lambda}_{ср}}\bar{\Theta}\Big|_{\bar{x}=1}+1-\bar{T}_с\right); \tag{1.14}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial\bar{x}}\right|_{\bar{x}=\bar{\xi}}=\bar{\varkappa}^*\,\mathrm{Pe}\,\bar{\xi}'(\bar{z}); \tag{1.15}$$

$$\bar{\Theta}|_{\bar{x}=\bar{\xi}}=0; \tag{1.16}$$

$$\bar{\xi}(0)=1,\quad \bar{\xi}(\bar{h})=0, \tag{1.17}$$

где $\mathrm{Pe}=\dfrac{v\rho_к C_к x_0}{\lambda_к}$ — критерий Пекле; $\mathrm{Bi}=\dfrac{kx_0}{\lambda_к}$ — критерий Био.

Решение уравнения (1.13) при условиях (1.15), (1.16) можно представить в виде разложения в ряд аналогично работе [2]

$$\Theta(x,z)=-\varkappa^*\,\mathrm{Pe}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Pe}}{a_{ср}}\right)^i\frac{1}{(2i+2)!}\frac{\partial^{i+1}}{\partial z^{i+1}}[x-\xi(z)]^{2i+2}. \tag{1.18}$$

Здесь и далее черту над безразмерными величинами опускаем.

Из соотношения (1.18) с учетом условия (1.14) получим для определения функции $\xi(z)$ уравнение

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Pe}}{a_{ср}}\right)^i\left[\frac{1}{(2i-1)!}\frac{d^i}{dz^i}(1-\xi)^{2i-1}+\frac{\mathrm{Bi}}{\lambda_{ср}}\frac{1}{(2i)!}\frac{d^i}{dz^i}(1-\xi)^{2i}\right]=\frac{\mathrm{Bi}}{\varkappa^* a_{ср}}(1-T_с). \tag{1.19}$$

Уравнение (1.19) при заданной функции $T_с$ необходимо проинтегрировать с учетом условий (1.17).

Полученное уравнение (1.19) удобно использовать для решения обратной задачи (нахождения закона охлаждения слитка) при заданной форме поверхности кристаллизации $\xi(z)$ и глубине жидкой лунки h.

Проведем исследование при $\mathrm{Bi}=\mathrm{const}$, $T_с=\mathrm{const}$. В этом случае, ограничиваясь первым членом ряда в (1.19), с учетом первого условия (1.17) найдем

$$\xi(z)=1+\frac{\lambda_{ср}}{\mathrm{Bi}}-\sqrt{\frac{2\lambda_{ср}\Delta T}{\varkappa^*\,\mathrm{Pe}}z+\frac{\lambda_{ср}^2}{\mathrm{Bi}^2}}, \tag{1.20}$$

где $\Delta T=1-T_с$, или, возвращаясь к размерным величинам, запишем (1.20) в виде

$$\xi(z)=x_0-\frac{\lambda_{ср}}{k}-\sqrt{\frac{2\lambda_{ср}\Delta T}{\varkappa^*\rho_к v}z+\frac{\lambda_{ср}^2}{k^2}}. \tag{1.21}$$

При бесконечно большой интенсивности теплосъема ($k \to \infty$) выражение (1.21) совпадает по форме с известным законом «квадратного корня» для задачи Стефана [3]

$$\xi_1(z) = x_0 - \xi(z) = \beta\sqrt{z},$$

где $\xi_1(z)$ — толщина твердой фазы; $\beta = (2\lambda_{\text{ср}}\Delta T/\varkappa^*\rho_{\text{к}}v)^{1/2}$. Удовлетворяя (1.20), второму условию (1.17), найдем глубину жидкой лунки

$$h = \frac{(1 + 2\lambda_{\text{ср}}/\mathrm{Bi})\,\varkappa^*\mathrm{Pe}}{2\lambda_{\text{ср}}\Delta T},$$

или в размерных величинах

$$(1.22)\qquad \begin{aligned} h &= (1/2)A\,(1 + 2b/x_0)\,x_0^2 v,\\ A &= \lambda_{\text{ср}}\Delta T/\varkappa^*\rho_{\text{к}},\quad b = \lambda_{\text{ср}}/k. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что величина h прямо пропорциональна скорости вытяжки слитка и при $x_0/2b \gg 1$ меняется как квадрат толщины слитка. В случае $x_0/2b \ll 1$ (слабая интенсивность теплосъема) глубина жидкой лунки h зависит линейно от толщины слитка.

Скорость кристаллизации $v_{\text{к}}$ связана со скоростью вытяжки v соотношением [4]

$$v_{\text{к}} = v\sin\varphi,$$

где φ — угол между направлением касательной в некоторой точке поверхности кристаллизации и осью z. Так как $\sin\varphi = -\xi'(z)\{1 + [\xi'(z)]^2\}^{-1}$, то

$$(1.23)\qquad v_{\text{к}} = -v\xi'(z)\{1 + [\xi'(z)]^2\}^{-1}.$$

Из (1.21) имеем

$$(1.24)\qquad \xi'(z) = A(2Az + vb^2)^{-1}.$$

Подставив (1.24) в (1.23) и перейдя к переменной $y = z/h$, где h определяется выражением (1.22), получим

$$(1.25)\qquad v_{\text{к}} = A\left[\left(x_0^2 + 2bx_0\right)y + b^2 + (A/v)^2\right]^{-1/2}.$$

Следуя [4], определим предельную скорость кристаллизации $v_{\text{к}}^*$ как предел величины $v_{\text{к}}$ при $k,\ v \to \infty$. Из (1.25) имеем

$$v_{\text{к}}^* = A/x_0y^{1/2}.$$

Таким образом, величины $v_{\text{к}}$ и $v_{\text{к}}^*$ монотонно убывают вдоль поверхности кристаллизации. В точке $y = 1$

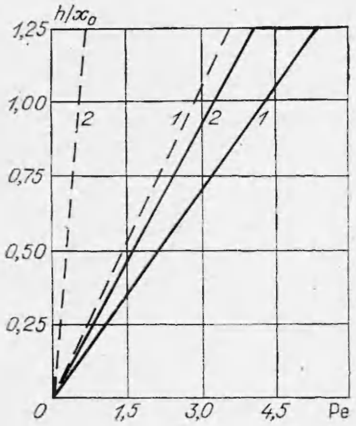
$$(1.26)\qquad v_{\text{к}}^* = v_{\text{к}1}^* = A/x_0.$$

С учетом (1.26) соотношение (1.25) можно представить в виде

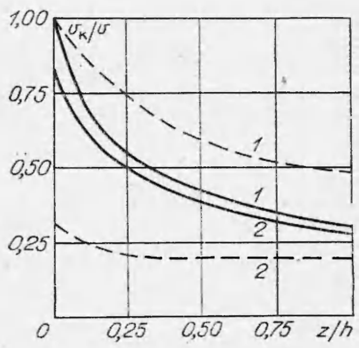
$$(1.27)\qquad v_{\text{к}}^* = vv_{\text{к}1}^*\left\{[(1 + 2b/x_0)\,y + (b/x_0)^2]\,v^2 + v_{\text{к}1}^{*2}\right\}^{-1/2},$$

следовательно, величина $v_к \to 0$ как при $k \to 0$ ($b \to \infty$), так и при $v \to 0$. В точке $y = 0$ при $k \to \infty$ ($b \to 0$) $v_к \to v$. Выражение (1.27) при $y = 1$, $k \to \infty$ ($b \to 0$) совпадает по виду с формулой работы [4].

Приведем результаты расчета процесса затвердевания алюминиевого слитка толщиной $5 \cdot 10^{-3}$ м при $\Delta T = 620°C$; $\Delta T_{пер} = 40°C$; $\lambda_{ср} = 208$; $\varkappa^* = 100$; $\rho_к = 2{,}53 \cdot 10^3$ и слитка титана толщиной 0,2 м при $\Delta T = 1620°C$; $\Delta T_{пер} = 300°C$; $\lambda_{ср} = 23$; $\varkappa^* = 122{,}17$; $\rho_к = 4{,}2 \cdot 10^3$ (λ, ккал/м·ч·К, ρ, кг/м^3, $\varkappa$, ккал/кг). На фиг. 2 представлены зависимости



Фиг. 2



Фиг. 3

относительной глубины жидкой лунки от числа Pe (штриховые линии — алюминиевый слиток: кривая *1* — Bi $= \infty$, *2* — Bi $= 0{,}464$, сплошные — слиток титана: кривая *1* — Bi $= \infty$, *2* — Bi $= 4{,}2$). Фиг. 3 иллюстрирует изменение относительной скорости кристаллизации вдоль фронта затвердевания слитков алюминия и титана при различных значениях чисел Bi (численные значения и обозначения кривых те же, что и на фиг. 2).

Заметим, что проведенный анализ найденного решения ограничен учетом лишь первого члена ряда, однако полученные формулы качественно правильно отражают основные закономерности описываемого процесса затвердевания, что следует из их сопоставлений с известными решениями [1, 2, 4]. Учет второго члена ряда дал в контрольном примере поправку во втором знаке после запятой. При этом ввиду нелинейности дифференциального уравнения (1.19) решение не может быть представлено в аналитическом виде и требует привлечения численных методов.

Связь температуры с величиной $\Theta(x, z)$ устанавливается соотношением (1.12). Для получения явной зависимости функции T от переменных x, z необходимо задать конкретную зависимость теплопроводности от температуры. В достаточно широком интервале изменения температуры эту зависимость можно аппроксимировать линейным законом

$$\lambda(T) = \mu + \omega T. \tag{1.28}$$

Подставив (1.28) в (1.12) и выполнив соответствующие преобразования, получим

$$T(x, z) = -\mu/\omega + \sqrt{(1 + \mu/\omega)^2 + 2\Theta(x, z)/\omega}, \tag{1.29}$$

где $\Theta(x, z)$ определяется соотношениями (1.18,) (1.19). С точностью до первого члена ряда в (1.18), (1.19) имеем

$$(1.30)\qquad \Theta(x, z) = -\lambda_{\text{ср}}\Delta T\left(1 - \frac{\lambda_{\text{ср}}/\text{Bi} + 1 - x}{\sqrt{A_1 z + (\lambda_{\text{ср}}/\text{Bi})^2}}\right), \quad A_1 = 2\lambda_{\text{ср}}\Delta T/\varkappa^* \text{Pe}.$$

Таким образом, распределение температуры в твердой фазе слитка в области $0 \leqslant z \leqslant h$ будет определяться соотношениями (1.29), (1.30) при линейном законе изменения теплопроводности от температуры (1.28). В общем случае для задания зависимости λ от T, близкой к реальной, можно использовать многочлен более высокой степени, или принять кусочно-линейную аппроксимацию.

Важной характеристикой процесса кристаллизации непрерывного слитка является скорость охлаждения на фронте кристаллизации $v_T = |\partial T/\partial t|_{x=\xi}$, где время t определяется через текущую координату z и скорость вытяжки v соотношением

$$(1.31)\qquad t = z/v.$$

Имея в виду, что $\partial\Theta/\partial z|_{x=\xi} = \partial T/\partial z|_{x=\xi}$, из (1.18) найдем

$$(1.32)\qquad |\partial T/\partial z|_{x=\xi} = \varkappa^* \text{ Pe}[\xi'(z)]^2.$$

Или, возвращаясь в (1.32) к размерным величинам и принимая во внимание (1.24), (1.31), получим

$$(1.33)\qquad v_T = \frac{\lambda_{\text{ср}}^2 (T_{\text{к}} - T_{\text{с}})^2}{\varkappa^*\rho_{\text{к}}\lambda_{\text{к}}(x_0 - \xi + \lambda_{\text{ср}}/k)^2},$$

где $\xi(z)$ определяется выражением (1.20).

Из (1.33) следует, что скорость охлаждения на фронте кристаллизации при рассматриваемом законе теплоотдачи не зависит от скорости вытяжки и определяется тремя факторами: толщиной слитка, физическими свойствами металла и интенсивностью охлаждения. Наибольшее значение рассматриваемая величина v_T имеет в точке $z = 0$, убывая с ростом z как квадрат эффективной толщины образовавшейся корочки слитка

$$\xi_{\text{эфф}}(z) = x_0 - \xi(z) + \lambda_{\text{ср}}/k.$$

Из уравнения (1.32) с учетом (1.23), (1.33) получим соотношение, связывающее скорость охлаждения на фронте кристаллизации со скоростью кристаллизации. В размерных величинах имеем

$$v_T = \frac{\varkappa^*\rho_{\text{к}}}{\lambda_{\text{к}}}\frac{v^2 v_{\text{к}}^2}{v^2 - v_{\text{к}}^2}.$$

Очевидно, что для постоянства величины v_T по всему фронту кристаллизации необходимо, чтобы скорость кристаллизации также была величиной постоянной.

Ниже получим условие охлаждения, при котором имеет место постоянство указанных величин. Для этого примем

$$(1.34)\qquad \xi = 1 - y, \quad y = z/h,$$

считая, что температура охлаждающей среды (либо число $\mathrm{Bi}(y)$) является неизвестной функцией y. Подставив (1.34) в (1.18) и выполнив соответствующие преобразования, получим

$$\Theta(x, y) = \varkappa^* a_{\text{ср}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} [\beta(x - 1 + y)]^i, \quad \beta = \mathrm{Pe}/h a_{\text{ср}}.$$

Последнее можно представить в виде

$$(1.35) \qquad \Theta(x, y) = \varkappa^* a_{\text{ср}}\{1 - \exp[\beta(x - 1 + y)]\}.$$

Выражением (1.29) с учетом (1.35) определяется распределение температуры в образовавшейся корочке слитка. Дифференцируя функцию $\Theta(x, y)$ из (1.35) по x, найдем значение потока тепла $q(x, y)$ вдоль оси X в произвольной точке (x, y) твердой фазы

$$q(x, y) = \frac{\varkappa^* \mathrm{Pe}}{h} \exp[\beta(x - 1 + y)].$$

Отсюда следует, что на поверхности кристаллизации $x = 1 - y$ величина потока тепла q сохраняет постоянное значение, это соответствует условию (1.15). Из соотношений (1.14)—(1.17) с учетом (1.34) найдем выражение для глубины жидкой лунки

$$(1.36) \qquad h = \varkappa^* \mathrm{Pe}/q_0,$$

где $q_0 = \mathrm{Bi}(0)[1 - T_{\text{c}}(0)]$ — значение потока тепла в точке начала кристаллизации ($x = 1$, $y = 0$).

Распределение потока тепла по поверхности слитка ($x = 1$) имеет вид

$$q_1 = (\varkappa^* \mathrm{Pe}/h) e^{\beta y}.$$

Отсюда видно, что величина $q_1(y)$ при форме жидкой лунки (1.34) является монотонно возрастающей функцией координаты y. Следовательно, интенсивность внешнего теплосъема должна возрастать вдоль направления движения слитка. Такой режим охлаждения можно обеспечить увеличением коэффициента теплопередачи или снижением температуры охлаждающей среды вдоль координаты y. Заметим, что в случае $T_{\text{c}} = \mathrm{const}$, $\mathrm{Bi} = \mathrm{const}$ поток тепла $q_1(y)$ является монотонно убывающей функцией y (см. (1.30)).

Из условия (1.14) определяется закон изменения $\mathrm{Bi}(y)$ (или $T_{\text{c}}(y)$), требуемый для отвода потока тепла $q_1(y)$. Выражение для $\mathrm{Bi}(y)$ при заданной функции $T_{\text{c}}(y)$ имеет вид

$$\mathrm{Bi}(y) = q_1[1 + \alpha(1 - e^{\beta y}) - T_{\text{c}}(y)]^{-1}, \quad \alpha = \frac{\varkappa^* a_{\text{ср}}}{\lambda_{\text{ср}}},$$

где h определяется соотношением (1.36).

Для положительности величины $\mathrm{Bi}(y)$ необходимо наложить условие

$$(1.37) \qquad 1 + \alpha(1 - e^{\beta y}) \geqslant T_{\text{c}}(y),$$

означающее, что температура поверхности слитка не может быть ниже температуры охлаждающей среды. Подставив в (1.37) выражение для h и выполнив соответствующие преобразования, получим ограничения сверху на величину q_0, при которой существует рассматриваемое решение

$$q_0 \leqslant \varkappa^* a_{\text{ср}} \ln\{1 + \alpha^{-1}[1 - T_{\text{c}}(h)]\}.$$

Скорость кристаллизации $v_{\text{к}}$ определяется из (1.23) с учетом (1.34), (1.36)

$$v_{\text{к}} = v[1 + (\varkappa^* \text{Pe}/q_0)^2]^{-1}.$$

Для безразмерной скорости охлаждения на фронте кристаллизации v_T из (1.32), (1.34), (1.36) имеем

$$v_T = q_0^2/\varkappa^* \text{Pe}.$$

2. Известные решения задачи Стефана [2, 3, 5] содержат, как правило, предположения о равенстве температуры расплава по всему объему жидкой фазы температуре кристаллизации. Однако в реальных условиях начальная температура жидкого металла превышает температуру кристаллизации на величину перегрева расплава, что сказывается на скорости затвердевания и распределении температур в твердой фазе.

Строгое решение задачи о затвердевании слитка при наличии перегрева расплава связано с необходимостью интегрирования уравнения теплопроводности для жидкой и твердой фаз с условием Стефана на границе их раздела, что представляет принципиальные трудности для аналитических методов и требует привлечения численных методов решения.

Приведем вывод условия Стефана, приближенно учитывающего поток тепла за счет перегрева расплава, для случая затвердевания непрерывных слитков и слитков ограниченных объемов.

В случае непрерывного слитка будем исходить из тех же допущений, что и выше. Тогда условие Стефана на границе раздела фаз при наличии перегрева расплава имеет вид

$$\left[\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\right]_{x=\xi(z)} = \varkappa \rho_{\text{к}} v \xi'(z). \tag{2.1}$$

Здесь индексами 1, 2 обозначены величины, относящиеся к жидкой и твердой фазам соответственно. Остальные обозначения те же, что и выше.

Уравнение теплопроводности для жидкой фазы

$$\rho_1 C_1 v \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{1}{x^\nu} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^\nu \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\right)$$

проинтегрируем по x от 0 до $\xi(z)$, умножив предварительно его левую и правую части на x^ν, где $\nu = 0$ в случае плоского слитка, $\nu = 1$ в случае цилиндрического слитка. С учетом условия симметрии $\partial T_1/\partial x|_{x=0}$ получим

$$\left[\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\right]_{x=\xi(z)} = \frac{(C_1\rho_1)_{\text{ср}} v}{\xi^\nu} \int_0^\xi \frac{\partial T_1}{\partial z} x^\nu dx. \tag{2.2}$$

При этом величину $C_1\rho_1$ принимаем равной ее среднему значению в рассматриваемом интервале изменения температуры.

Выражение

$$\int_0^\xi \frac{\partial T_1}{\partial z} x^\nu dx$$

представим в виде

$$\int_0^{\xi} \frac{\partial T_1}{\partial z} x^\nu dx = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\xi} T_1 x^\nu dx - T_\text{к} \xi^\nu \xi'. \tag{2.3}$$

Заменяя величину T_1, стоящую под знаком интеграла в правой части выражения (2.3), ее средним значением в объеме жидкой фазы, найдем

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\xi} T_1 x^\nu dx = T_{1\text{ср}} \xi^\nu \xi'. \tag{2.4}$$

Принимая далее $T_{1\text{ср}} = (T_0 + T_\text{к})/2$, где T_0 — температура расплава в точке $z = 0$, $x = 0$, и подставив (2.4) в (2.3), получим

$$\int_0^{\xi} \frac{\partial T_1}{\partial z} x^\nu dx = (T_\text{ср} - T_\text{к}) \xi^\nu \xi'. \tag{2.5}$$

С учетом выражений (2.2), (2.5) условие (2.1) принимает вид

$$\left[\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\right]_{x=\xi(z)} = \rho_\text{к} v \left[\varkappa + \frac{(C_1\rho_1)_\text{ср}}{2\rho_\text{к}} (T_0 - T_\text{к})\right] \xi'(z). \tag{2.6}$$

Введя эффективную величину скрытой теплоты плавления

$$\varkappa^* = \varkappa + \frac{(C_1\rho_1)_\text{ср}}{2\rho_\text{к}} (T_0 - T_\text{к}),$$

представим соотношение (2.6) в виде

$$[\lambda_2 \partial T_2/\partial x]_{x=\xi(z)} = \rho_\text{к} v \varkappa^* \xi'(z).$$

В случае затвердевания ограниченного объема вывод будет аналогичен предыдущему, если вместо координаты z ввести время $t = z/v$.

Таким образом, учет перегрева расплава равносилен увеличению скрытой теплоты плавления на величину, пропорциональную перегреву жидкой фазы с коэффициентом пропорциональности, равным $(C_1\rho_1)_\text{ср}/2\rho_\text{к}$.

Авторы выражают благодарность В. Т. Борисову за полезное обсуждение работы.

Поступила 22 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов Н. А., Швидковский Е. Г.** Теория непрерывного слитка.— ЖТФ, 1947, т. 17, вып. 2.
2. **Любов Б. Я.** Вычисление скорости затвердевания металлического слитка. — «Докл. АН СССР», 1949, т. 68, № 5.
3. **Вейник А. И.** Теория затвердевания отливки. М., Машгиз, 1960.
4. **Добаткин В. И.** Непрерывное литье и литейные свойства сплавов. М., Оборонгиз, 1948.
5. **Темкин Д. Е.** Температурное поле в кристаллизующемся слитке цилиндрической формы.— «Инж.-физ. журн.», 1962, т. 5, № 4.