ПМТФ, № 3, 1969

О ПЕРЕНОСЕ ЭНЕРГИИ ИЗЛУЧЕНИЕМ В СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

Ю. Д. Шмыглевский

(Москва)

Перенос лучистой энергии в движущихся средах описывается системой интегро-дифференциальных уравнений. Интегральный член уравнений чрезвычайно затрудняет расчеты из-за огромного количества необходимых вычислений. При расчете трехмерных и даже осесимметричных течений в каждой расчетной точке пространства приходится вычислять четырехкратный интеграл по этому пространству.

Ниже рассматривается случай локального термодинамического равновесия. Предполагается наличие смещения спектральных линий по температуре и давлению. Предложено идеализированное представление зависимости коэффициента поглощения газа от частоты. Это представление существенно упрощает механизм лучистого теплообмена и позволяет проинтегрировать в явном виде уравнение переноса. В случае сферической симметрии, рассмотренном для примера, упрощения идут дальше и приводят к дифференциальным уравнениям без интегральных членов. Если излучение и поглощение проходят в конечном количестве спектральных линий, то результирующий приток тепла к частице за счет излучения находится простым суммированием по характерным частотам линий. Предложенное представление коэффициента поглощения в такой форме может быть положено в основу численных методов.

1. Движение идеального излучающего газа в случае локального термодинамического равновесия описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho i\right) + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + H\right) = Q \qquad (1.1)$$
$$p = p\,(\rho, T), \qquad i = i\,(\rho, T), \qquad H = H\,(\rho, T)$$

Здесь t — время, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, T — температура, i — внутренняя энергия единицы массы, H — энтальпия единицы массы.

Поток лучистой энергии на единицу объема, обозначенный через Q, в случае непрерывности функций определяется [1] равенствами (первому интегралу соответствует последний дифференциал, второму — предпоследний и т. д.)

$$Q = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho \varkappa_\nu J_\nu \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\nu - 4\pi\rho \int_0^\infty \varkappa_\nu B_\nu\, d\nu \qquad (1.2)$$

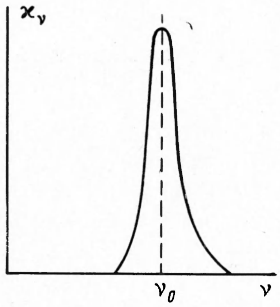
$$\frac{1}{\rho\varkappa_\nu} \frac{\partial J_\nu}{\partial s} = J_\nu - B_\nu \qquad (1.3)$$

Здесь s, ϑ, φ — сферические координаты ($s \geqslant 0$) с центром ($s = 0$) в рассматриваемой точке трехмерной области, ν — частота, $\varkappa_\nu$ — коэффициент поглощения при соответствующей частоте, J_ν — интенсивность потока лучистой энергии на частоте ν вдоль луча $\vartheta = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$ по направлению к рассматриваемой точке, B_ν — отношение коэффициента излучения к коэффициенту поглощения при частоте ν. Величина J_ν определяется уравнением переноса (1.3) и граничным условием, зависящим от задачи. Знаки в уравнении (1.3) и в сооответствующем уравнении книги

[1] различны, так как здесь рассматривается поток лучистой энергии в направлении уменьшения s, а в книге — в направлении увеличения s. Значение B_ν при локальном термодинамическом равновесии определяется формулой

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu / kT) - 1}$$

где h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, c — скорость света.



Фиг. 1

Величина Q определяет приток энергии к единице объема за счет излучения. Первый член правой части равенства (1.2) представляет количество лучистой энергии, поглощенной в единице рассматриваемого объема. Она поглощается из энергии, которая по всем направлениям приходит к этому объему с интенсивностью J_ν. Интегрирование по частоте позволяет найти все количество поглощенной энергии. Второй член правой части (1.2) представляет количество энергии, излучаемой единичным объемом.

Уравнение переноса (1.3) показывает, что интенсивность потока лучистой энергии J_ν по направлению уменьшения s увеличивается излучением (член B_ν) и уменьшается поглощением (член J_ν). Если поглощение отсутствует, то величина J_ν определяется простым интегрированием $-\rho\varkappa_\nu B_\nu$ по s. Если же отсутствует излучение ($B_\nu = 0$), то однородное уравнение (1.3) определяет изменение интенсивности J_ν только за счет поглощения. Эти элементарные замечания будут использованы в дальнейшем.

Характерный вид зависимости $\varkappa_\nu$ от ν при так называемом излучении в линии показан на фиг. 1. Кроме того, $\varkappa_\nu$ зависит от температуры и давления, $\varkappa_\nu = \varkappa(\nu, p, T)$. Зависимость от p и T меняет форму кривой (фиг. 1) и смещает ее на другие частоты. О состоянии исследований излучения в линиях см. [2].

В случае узких линий, т. е. малого интервала по ν, в котором $\varkappa_\nu \neq 0$, простейший приближенный подход к расчету переноса лучистой энергии может быть связан с представлением функции $\varkappa_\nu$ в виде

$$\varkappa_\nu = K(p, T)\, \delta(\nu - \nu_0) \tag{1.4}$$

Здесь $\delta(\nu - \nu_0)$ есть δ-функция Дирака, $\nu_0 = n(p, T)$ — частота, соответствующая центру тяжести площади, заключенной между кривой $\varkappa_\nu$ и $\varkappa = 0$ на фиг. 1 (такой выбор функции ϑ сделан для определенности). Величина $K(p, T)$ равна

$$K(p, T) = \int_0^\infty \varkappa_\nu \, d\nu$$

Будем предполагать, что по крайней мере одна из производных $\partial n / \partial p$ и $\partial n / \partial T$ в каждой точке не равна нулю.

Применимость введенного представления $\varkappa_\nu$ и вызванная им погрешность вычислений здесь рассматриваться не будут.

Уравнение переноса (1.3) может быть формально проинтегрировано в предположении, что все входящие в него функции за исключением J_ν известны [1]. В рассматриваемой точке величина s равна нулю (s — радиус сферических координат). Пусть расстояние до границы области вдоль луча равно $S(\vartheta, \varphi)$. Тогда, если определяется интенсивность потока J_ν, приходящего в точку $s=0$, интегрирование дает ($\varepsilon>0$)

$$J_\nu^+(0)=J_\nu(S)\,e^{-\tau_\nu^+(0,\,S)}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^S B_\nu e^{-\tau_\nu^+(0,\,s')}\varkappa_\nu\rho\,ds' \qquad (1.5)$$

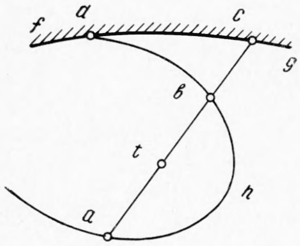
$$\tau_\nu^+(0,s')=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^{s'}\varkappa_\nu\rho\,ds'' \qquad (1.6)$$

Индекс плюс здесь связывается с пределом при $\varepsilon=+0$. В равенстве (1.5) величина $J_\nu(S)$ есть интенсивность потока лучистой энергии при частоте ν, идущего от границы области в направлении, определяемом выбранными величинами ϑ и φ. Величина τ_ν носит название оптической толщины слоя $(0, s')$ при частоте ν.

Если в направлении ϑ, φ граница области удалена на бесконечность, а идущий из бесконечности поток лучистой энергии в направлении рассматриваемой точки отсутствует, то

$$J_\nu^+(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^\infty B_\nu e^{-\tau_\nu^+(0,\,s')}\varkappa_\nu\rho\,ds' \qquad (1.7)$$

2. В случае непрерывности коэффициента поглощения использование формул (1.5) и (1.3) не вызывает затруднений. В случае, когда он представлен δ-функцией, для расчета поглощения лучистой энергии в окрестности изучаемой точки необходимо отдельно найти величины J_ν до и после прохождения потока через эту точку. Для этого предварительно нужно вычислить оптические толщины



Фиг. 2

$$\tau_1=\tau_\nu^+(0,S), \qquad \tau_2=\tau_\nu^-(0,S)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\varepsilon}^S\varkappa_\nu\rho\,ds'' \qquad (2.1)$$

Пусть рассматриваемая точка обозначена через a. В изучаемом пространстве проведем какую-либо плоскость через луч ac, выходящий из точки a с выбранными значениями углов ϑ и φ. Совместим эту плоскость с плоскостью фиг. 2. Линию пересечения границы области с нашей плоскостью обозначим через fg. Пусть величинам p и T в точке a отвечает частота излучения $\nu_0=n(p,T)$. Выделим в трехмерной области поверхность, во всех точках которой частота ν_0 равна частоте n в точке a. Линию пересечения этой поверхности с нашей плоскостью обозначим через $ahbd$. (Если ν_0 не зависит от давления, то линией $ahbd$ будет изотерма.) Будем предполагать в дальнейшем, что прямая ac пересекает поверхность постоянной частоты ν_0 в двух точках. Обобщения на более сложные случаи не представляют труда, но делают рассуждения менее ясными.

Газ в окрестности точки a способен поглощать лучистую энергию только на частоте ν_0, соответствующей p_a и T_a. Поэтому в связи с точкой a будет рассматриваться излучение только на этой частоте. Соответствующий индекс нигде ставиться не будет ради упрощения обозначений. Отсюда уже виден принцип, вытекающий из выбранного представления коэффициента поглощения (1.4) и существенно облегчающий изучение процессов переноса энергии: обмен лучистой энергией внутри области осуществляется только между точками поверхностей с одним и тем же значением частоты ν_0.

Вычислим вначале величину τ_1, определяемую формулами (2.1) и (1.6). Если в точке t прямой ac величина $n\,(p,\,T)$ достигает максимума или минимума, то равенство (2.1) с учетом (1.6) и (1.4) следует переписать в виде

$$\tau_1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{s_t} F\,ds'' + \int_{s_t}^{S} F\,ds'' \tag{2.2}$$

$$F = K\,(p,\,T)\,\rho\delta\,[n\,(p,\,T) - \nu_0].$$

Из последней формулы следует, что $F = 0$ при $s \neq 0$ и $s \neq s_b$, так как во всех других точках излучение и поглощение происходят на других частотах и $n\,(p,\,T) \neq \nu_0$.

Интегрирование ведется вдоль прямой ac. На этой прямой $p = p\,(s)$, $T = T\,(s)$, $\rho = \rho\,(s)$, а следовательно, и n является функцией от s. На участках монотонной зависимости n от s дифференциал ds'' можно записать в виде

$$ds'' = m\,dn, \quad m = \left(\frac{\partial n}{\partial T}\frac{dT}{ds} + \frac{\partial n}{\partial p}\frac{dp}{ds}\right)^{-1} \tag{2.3}$$

Величины T и p зависят от времени и точки пространства. Полные производные в последнем равенстве означают дифференцирование вдоль ac при фиксированном времени. Подставляя выражение для ds'' из (2.3) в равенство (2.2) и учитывая, что $F = 0$ при $s \in (0,\ s_t]$, получим

$$\tau_1 = \int_{n_t}^{n_c} mK\rho\delta\,(n - \nu_0)\,dn$$

где величины m, K, ρ рассматриваются теперь как функции от n на отрезке tc.

Ранее было сделано предположение, что прямая ac пересекает поверхность $n = \nu_0$ только в точках a и b. Если в пространстве нет других поверхностей с $n = \nu_0$, то на интервале $(0, S]$ равенство $n = \nu_0$ достигается только в точке b. Используя последнее равенство, получим

$$\tau_1 = (mK\rho)_b\,\mathrm{sign}\left(\frac{dn}{ds}\right)_b = (|\,m\,|\,K\rho)_b \tag{2.4}$$

Здесь было использовано равенство

$$\int_0^{\infty} \delta\,(n - \nu_0)\,dn = 1$$

Производная $dn/\,ds$ вычисляется вдоль прямой ac.

Найдем теперь величину τ_2, определяемую равенством (2.1). Вспоминая (2.2), можно записать

$$\tau_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varkappa_\nu\rho\,ds'' + \tau_1$$

Как и раньше представим ds'' в виде (2.3). Получим, используя (1.4)

$$\tau_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{n_{-\varepsilon}}^{n_\varepsilon} mK\rho\delta\,(n - \nu_0)\,dn + \tau_1 \tag{2.5}$$

где $n_{-\varepsilon}$ и n_ε являются частотами $n\,(p,\,T)$ при значениях p и T, соответствующих $s = -\varepsilon$ и $s = \varepsilon$ на прямой ac. В случае непрерывности функций p и T на этой прямой величина ν_0 заключена между $n_{-\varepsilon}$ и n_ε. Поэтому интеграл в последнем равенстве вычисляется и формула (2.5) дает

$$\tau_2 = (|m|\,K\rho)_a + \tau_1 \tag{2.6}$$

При вычислении полного потока лучистой энергии Q в дальнейшем необходимо будет знать J_ν, а следовательно и τ_2, при всех значениях ϑ и φ, используемых в равенстве (1.2). Поэтому величину m_a, входящую в формулу, удобно преобразовать к виду, не содержащему производных по s в различных направлениях. Используя (2.3), величину $m_a(\vartheta, \varphi)$ можно записать в виде

$$m_a = \left[(\nabla T \cdot \mathbf{s}) \frac{\partial n}{\partial T} + (\nabla p \cdot \mathbf{s}) \frac{\partial n}{\partial p}\right]^{-1} \qquad (2.7)$$

Здесь $\mathbf{s}$ — единичный вектор, направленный по лучу с углами ϑ, φ в сторону возрастания s, а круглые скобки правой части равенства означают скалярные произведения.

3. Определим плотность потока лучистой энергии J_ν на частоте ν_0, приходящего в точку a. Эта величина в случае ограниченной или безграничной области может быть найдена из равенства (1.5) или (1.7). Второе слагаемое правой части (1.5) можно записать в виде суммы трех интегралов

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{S} B_\nu e^{-\tau_\nu{}^+(0,\, s')} \varkappa_\nu \rho\, ds' = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{s_b-\varepsilon} B_\nu e^{-\tau_\nu{}^+} \varkappa_\nu \rho\, ds' -$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\tau_\nu{}^+(0,\, s_b-\varepsilon)}^{\tau_\nu{}^+(0,\, s_b+\varepsilon)} B_\nu\, de^{-\tau_\nu{}^+} + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{s_b+\varepsilon}^{S} B_\nu e^{-\tau_\nu{}^+} \varkappa_\nu \rho\, ds'$$

Подынтегральные выражения первого и третьего членов правой части этого равенства содержат множителем величину $\varkappa_\nu$, которая равна нулю при $s' \in (0,\, s_b)$ и $s' \in (s_b,\, S)$. Остальные сомножители — ограниченные величины. Поэтому первое и третье слагаемые равны нулю. Производя интегрирование, получим

$$- B_{\nu b} \lim_{\varepsilon\to 0} \left[e^{-\tau_\nu{}^+(0,\, s_b+\varepsilon)} - e^{-\tau_\nu{}^+(0,\, s_b-\varepsilon)}\right]$$

Но $\tau_\nu{}^+(0,\, s_b + \varepsilon) = \tau_\nu{}^+(0,\, S) = \tau_1$, так как величина $\varkappa_\nu$ при $s \in (s_b,\, S]$ равна нулю. Величина $\tau_\nu{}^+(0,\, s_b - \varepsilon) = 0$, так как величина $\varkappa_\nu$ при $s \in (0,\, s_b)$ тоже равна нулю. Отсюда получаем окончательно, сопоставляя последние результаты с равенством (1.5)

$$J_\nu{}^+(0) = J_\nu(S)\, e^{-\tau_1} + B_{\nu b}(1 - e^{-\tau_1}) \qquad (3.1)$$

где τ_1 определяется равенством (2.4).

В случае неограниченной области и при отсутствии излучения на бесконечности из (1.7) найдем

$$J_\nu{}^+(0) = B_{\nu b}\; (1 - e^{-\tau_1}) \qquad (3.2)$$

Здесь использовано равенство $\tau_\nu{}^+(0,\, \infty) = \tau_1$ при условии, что луч ac только один раз пересекает поверхность с постоянным значением $n(p,\, T) = \nu_0$.

Первое слагаемое правой части (3.1) имеет обычный вид и показывает зависимость затухания интенсивности потока лучистой энергии от оптической толщины преодолеваемого ею слоя. Второе слагаемое правой части равенства (3.1) и правая часть формулы (3.2) дают результирующую величину J_ν, порождаемую элементом поверхности с $n = \nu_0$.

Определим теперь интенсивность потока лучистой энергии, прошедшего через точку a, в предположении, что излучение в точке a отсутствует. Тогда в ε-окрестности точки a величина J_ν будет определяться однородным вариантом уравнения (1.3)

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial s} = \rho\varkappa_\nu J_\nu$$

Интегрирование вдоль прямой ac дает

$$J_\nu^-(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} J_\nu(-\varepsilon) = J_\nu^+(0)\, e^{-(\tau_2-\tau_1)}$$

где $\tau_2 - \tau_1$ легко находится из равенства (2.6)

$$\tau_3 = \tau_2 - \tau_1 = (|m|\ K\rho)_a \tag{3.3}$$

Величина, на которую уменьшилась интенсивность потока лучистой энергии при прохождении через точку a, определяется разностью $\Delta J_\nu(0) = J_\nu^+(0) - J_\nu^-(0)$. Эту разность можно записать для ограниченной области в виде

$$\Delta J_\nu(0) = (1 - e^{-\tau_3})\,[J_\nu(S)\, e^{-\tau_1} + B_{\nu b}(1 - e^{-\tau_1})] \tag{3.4}$$

а при $J_\nu(S) = 0$ — в виде

$$\Delta J_\nu(0) = B_{\nu b}(1 - e^{-\tau_1})\,(1 - e^{-\tau_3}) \tag{3.5}$$

Для получения этих формул были использованы равенства (3.1) и (3.2).

Величина $\Delta J_\nu(0)$ представляет собой потерю интенсивности потока лучистой энергии за счет поглощения в точке a.

4. Вычислим теперь полный поток лучистой энергии Q_1, поглощаемый единицей объема. Сделаем это вначале для непрерывного коэффициента поглощения.

Потеря интенсивности потока лучистой энергии за счет поглощения в одном направлении при частоте ν на длине ds равна $dJ_\nu = J_\nu\rho\varkappa_\nu ds$. Потеря потока в цилиндрическом элементе поперечного сечения $d\sigma$ и высоты ds равна $J_\nu\rho\varkappa_\nu ds d\sigma$ или $J_\nu\rho\varkappa_\nu dw$ (где dw — элемент объема). Потеря потока в единице объема составляет $J_\nu\rho\varkappa_\nu$. Для получения полного потока, поглощаемого единицей объема, необходимо произвести интегрирование по частотам и по телесному углу. В результате получаем первое слагаемое правой части равенства (1.2)

$$Q_1 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho\varkappa_\nu J_\nu \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\nu$$

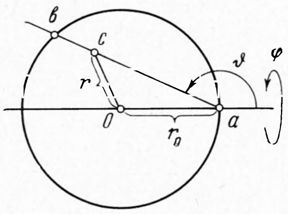
Найдем теперь величину Q_1 в случае разрывного представления коэффициента поглощения (1.4). В цилиндрическом элементе поперечного сечения $d\sigma$ и высоты ds потеря потока лучистой энергии в направлении $-\mathbf{s}$ при частоте ν_0 равна $\Delta J_\nu(0) d\sigma$. На всех частотах $n(p, T)$, отвечающих значениям p и T в цилиндрическом элементе, потеря потока составляет величину $\Delta J_\nu(0)\,|dn/ds|\, d\sigma\, ds$ или $\Delta J_\nu(0)\,|m|^{-1}\, dw$, где m определяется формулой (2.3). Потеря потока в единице объема равна $\Delta J_\nu |m|^{-1}$. Для получения полного потока, поглощаемого единицей объема, необходимо произвести интегрирование по телесному углу. В результате получаем

$$Q_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Delta J_\nu(0)\,|m|^{-1} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

Необходимость в новом интегрировании по частотам здесь не возникает, так как каждой точке пространства соответствует одна определенная частота.

Количество энергии Q_2, излучаемой единицей объема, вычисляется интегрированием второго слагаемого правой части (1.2). Получим

$$Q_2 = 4\pi B_{\nu a} K_a \rho_a$$



Фиг. 3

Разность $Q_1 - Q_2$ дает искомую величину

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Delta J_\nu(0)\,|m|^{-1} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi - 4\pi B_\nu K \rho \tag{4.1}$$

где все величины берутся в точке a, $\Delta J_\nu(0)$ определяется формулой (3.4) или (3.5), а частота в точке a находится из равенства $\nu_0 = n(p, T)$.

5. В качестве примера рассмотрим течение газа в безграничном пространстве со сферической симметрией. Течение будет изучаться в некоторый момент времени. Меридиональная плоскость такого течения изображена на фиг. 3. Пусть расстояние r от точки a до центра симметрии O равно r_0. Ось местной системы сферических координат s, ϑ, φ расположим так, чтобы она совпадала с прямой Oa.

В рассматриваемый момент t известны зависимости $p(r)$ и $T(r)$, а следовательно, на основании (1.1),— и $\rho(r)$. Вычислим $\tau_1 = \tau_\nu^+(0, \infty)$ при $^1/_2\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$. Используем формулу (2.4). Величины K, ρ, $\partial n / \partial T$, $\partial n / \partial p$ зависят только от r и t, но не зависят от углов ϑ и φ. При фиксированном времени производные вдоль луча ab, входящие в (2.3), равны

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T(r, t)}{\partial r}\frac{dr}{ds}, \qquad \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p(r, t)}{\partial r}\frac{dr}{ds}$$

где dr / ds — производная вдоль луча ab. Из фиг. 3 видно, что

$$r = \sqrt{s^2 + 2r_0 s\cos\vartheta + r_0^2}$$

Отсюда

$$\left.\frac{dr}{ds}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{s + r_0\cos\vartheta}{\sqrt{s^2 + 2r_0 s\cos\vartheta + r_0^2}}\right|_{r=r_0} = -\cos\vartheta \tag{5.1}$$

и далее,

$$\tau_1 = -K\rho\,\mathrm{sign}\left(\frac{dn}{dr}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial n}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{-1}\sec\vartheta \qquad (r = r_0)$$

Подчеркнем, что здесь в момент t все величины кроме $\sec\vartheta$ зависят только от r. Поэтому удобно написать

$$\tau_1 = -N(r)\sec\vartheta, \quad N(r) = K\rho\left|\frac{dn}{ds}\right|^{-1} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \pi\right) \tag{5.2}$$

Найдем величину τ_3, используя равенство (3.3) и выражение для m_a в форме (2.7). При $^1/_2\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ имеем равенство

$$\mathrm{sign}\,\frac{dn}{ds} = -\,\mathrm{sign}\,\frac{dn}{dr}$$

В результате получим

$$\tau_3 = \tau_1 \qquad (^1/_2\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$$

Простота полученного равенства следует из того, что острые углы между хордой ab и касательными к окружности $r = r_0$ в точках a и b одинаковы по абсолютной величине.

Определим теперь величину Q. Воспользуемся формулами (2.7), (5.1), (3.5) и (4.1). Учтем, что $\Delta J_\nu(0) = 0$, если $\vartheta \in [0, \pi/2)$. При вычислении интеграла введем подстановку $z = -\sec\vartheta$. Тогда найдем

$$\int_0^\pi \Delta J_\nu(\vartheta)\,|m|^{-1}\sin\vartheta\, d\vartheta = -\left|\frac{\partial n}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial n}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial r}\right| B_\nu \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - e^{N\sec\vartheta})^2 \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= B_\nu \left|\frac{dn}{dr}\right| \int_1^\infty (1 - 2e^{-Nz} + e^{-2Nz})\frac{dz}{z^3} = B_\nu \left|\frac{dn}{dr}\right| \left[\frac{1}{2} - 2E_3(N) + E_3(2N)\right]$$

Через E_q обозначена интегрально-показательная функция

$$E_q(R) = \int_1^\infty e^{-Rz}\frac{dz}{z^q}, \qquad qE_{q+1}(R) = e^{-R} - RE_q(R)$$

О вычислении $E_1(R) = \mathrm{Ei}(R)$ см. работу [3]. Функция N определена равенством (5.2). Продолжим вычисление величины Q. Вычисленный интеграл по переменной ϑ зависит только от r и не зависит от φ. Поэтому интегрирование по φ в (4.1) дает множитель 2π. Окончательно получаем

$$Q = 2\pi B_\nu \left|\frac{dn}{dr}\right| \left[\frac{1}{2} - 2E_3(N) + E_3(2N)\right] - 4\pi B_\nu K\rho \qquad (5.3)$$

где все величины определяются при выбранном значении r и, кроме того,

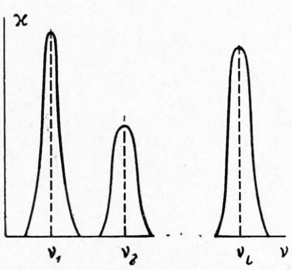
$$\frac{dn}{dr} = \frac{\partial n}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial n}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad N = K\rho \left|\frac{dn}{dr}\right|^{-1}$$

В уравнении энергии системы (1.1) величина Q является теперь функцией от r в соответствии с формулой (5.3).

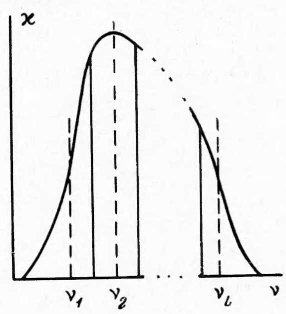
6. В случае нескольких линий излучения и поглощения в спектре газовой среды (фиг. 4) коэффициент поглощения можно представить в виде

$$\varkappa = \sum_{l=1}^{L} K_l(p, T)\,\delta[\nu - \nu_l(p, T)]$$

где $K_l(p, T)$ — площадь, ограниченная соответствующей частью графика $\varkappa(\nu)$ и осью $\varkappa = 0$. Значения ν_l могут определять абсциссы центров тяжести этих площадок.



Фиг. 4



Фиг. 5

В таком же виде можно приближенно представить и зависимость $\varkappa(\nu)$, изображенную на фиг. 5 (некогерентное излучение).

В рассматриваемой точке a давление и температура равны p и T. Этим значениям соответствуют частоты $\nu_1(p, T)$, $\nu_2(p, T)$, $\ldots\nu_L(p, T)$. Газ в точке a способен поглощать и излучать энергию именно на этих частотах. Рассмотрим в пространстве поверхности $\nu = \nu_{1a}$, $\nu = \nu_{2a}, \ldots \nu = \nu_{La}$. Пусть луч, определяемый углами ϑ и φ, пересекает эти поверхности в точках $b_1, b_2, \ldots b_L$. Для каждой из частот $\nu_{1a}, \nu_{2a}, \ldots \nu_{La}$ поверхности с другими значениями частоты будут оптически прозрачными. Это означает, что на каждой частоте потеря интенсивности потока лучистой энергии $\Delta J_{\nu l}(0)$ за счет поглощения в точке a вычисляется по-прежнему по формуле (3.5) или (3.4), где b есть точка пересечения прямой ac с поверхностью, на которой частота ν имеет соответствующее значение $\nu_{la} = \nu_l(p_a, T_a)$.

Например, при $J_\nu(S) = 0$ имеем

$$\Delta J_{\nu l}(0) = B_{\nu lb}(1 - e^{-\tau_{1l}})(1 - e^{-\tau_{3l}})$$

$$\tau_{1l} = (|m_l| K_l \rho)_b, \qquad \tau_3 = (|m_l| K_l \rho)_a$$

$$m_l = \left(\frac{\partial \nu_l}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial \nu_l}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial s}\right)^{-1}$$

Здесь индексы νl отвечают частоте ν_l, а буквы a и b отмечают соответствующие точки.

Потеря $\Delta J(0)$ за счет поглощения в точке a на всех частотах находится простым суммированием

$$\Delta J(0) = \Delta J_{\nu 1}(0) + \Delta J_{\nu 2}(0) + \ldots + J_{\nu L}(0)$$

Поток лучистой энергии Q определяется как и в формуле (4.1)

$$Q = \sum_{l=1}^{L}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Delta J(0)\,|m|^{-1}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi - 4\pi\rho\sum_{l=1}^{L} B_{\nu l}K_l$$

но если возникает несколько поверхностей с одним значением ν_l, то необходимо добавить суммирование и по этим поверхностям.

Поступила 14 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
2. Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М., Изд. «Наука», 1967.
3. Таблицы интегральной показательной функции., М, Изд-во АН СССР, 1954.