

УДК 539.3

DOI: 10.15372/PMTF202315399

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ГЕТЕРОГЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. Е. Бузюркин, А. Е. Краус, Е. И. Краус, И. И. Шабалин

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
Новосибирск, Россия

E-mails: buzjura@itam.nsc.ru, akraus@itam.nsc.ru, kraus@itam.nsc.ru, shabalin@itam.nsc.ru

Предложен метод определения динамического предела текучести гетерогенных материалов на основе сравнения процессов формирования каверны в реперном и исследуемых материалах. Выполнена серия расчетов процесса проникания удлиненного стержня в массивные однородные и гетерогенные преграды. Получена немонотонная зависимость глубины проникания от скорости движения. На основе анализа результатов расчетов в координатах удельная кинетическая энергия стержня — работа напряжений на пластических деформациях получена оценка предела текучести гетерогенной среды.

**Ключевые слова:** динамический предел текучести, гетерогенный материал, удар, разрушение

**Введение.** Развитие и совершенствование технологий создания материалов с заданными свойствами (аддитивные технологии, ударно-волновое компактирование, электронно-лучевая наплавка, армирование и т. д.), обеспечивающими их оптимальное использование в различных конструкциях, позволило существенно расширить область применения гетерогенных материалов. В настоящее время образовался разрыв между процессом создания сложных гетерогенных материалов и имеющимися знаниями о свойствах данных материалов при интенсивных динамических нагрузках, таких как удар, импульсное и высокоэнергетическое воздействия. Для минимизации затрат на проведение экспериментов и достижения требуемых результатов возникает необходимость совместно с проведением экспериментов по определению свойств созданных материалов разрабатывать математические модели. С развитием вычислительной техники появилась возможность решать все более сложные задачи динамики деформирования и разрушения на основе уточненных расчетных моделей, эффективных численных методов и современных алгоритмов параллельных вычислений. Такой подход позволяет выполнять исследования в области математического моделирования, ускорить процесс анализа и отбора вариантов, проводя эксперимент лишь на этапе финальной оценки свойств созданного перспективного материала и конструкций на его основе.

В работе [1] сформулировано и апробировано новое направление прямого численного моделирования динамического нагружения гетерогенных материалов, т. е. построена замкнутая упругопластическая дискретная модель разрушаемой гетерогенной среды, основанная на случайном распределении включений с заданными концентрацией и формой

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-29-00777).

© Бузюркин А. Е., Краус А. Е., Краус Е. И., Шабалин И. И., 2024

в основном материале, что позволило путем прямого численного моделирования описать процессы высокоскоростного деформирования и разрушения неоднородных твердых сред.

Одной из первых работ, посвященных определению динамических свойств материалов, была работа Дж. Тейлора [2], в которой изложены теоретические основы метода распространения пластических деформаций в металлических стержнях при столкновении с недеформируемой полубесконечной наковальней. Данный метод является классическим тестом для верификации программных кодов, разработанных для моделирования динамических процессов в твердых деформируемых телах (см., например, [3–8]). Поскольку модели материалов развиваются, для определения необходимых параметров разрабатываются новые алгоритмы обработки экспериментальных данных на основе тестов Тейлора. Так, для нахождения параметров известной модели Джонсона — Кука в работе [9] предложена формулировка обратной задачи, основанной на параметрах деформации, полученных с учетом окончательной формы стержня. Данная модель может с достаточной точностью описывать деформацию стержня. Однако, несмотря на простоту и эффективность концепции тестов Тейлора, в работе [10] отмечено отсутствие комплексной теоретической модели, связывающей конститутивные свойства материала с характером деформации стержня, что ограничивает возможность использования тестов Тейлора для определения характеристик материалов. В работе [10] на основе данных [9] сформулирована новая схема для эффективного определения основных параметров металлов, учитывающая большую скорость деформаций. Установлено, что расчетные параметры хорошо согласуются с эталонными значениями.

**1. Постановка задачи.** Выполненный в работах [11–13] анализ процессов проникания сферических ударников в полубесконечную преграду из однородного материала позволил выделить основные безразмерные параметры, главным из которых является отношение кинетической энергии ударника к прочностным параметрам преграды. На основе кривой Златина в работе [14] построена единая моделирующая кривая кратерообразования и предложен способ высокоточного определения динамического предела текучести по параметрам кратера и кинетической энергии ударника.

В настоящей работе с использованием результатов моделирования процессов проникания удлиненных стержней в полубесконечные гомогенные и гетерогенные блоки получена оценка динамического предела текучести гетерогенных материалов.

Используемая в расчетах численная модель гетерогенной среды предложена в работе [1] и апробирована в работах [14–16].

Область, в которой находится металлокерамический гетерогенный композит, покрыта разностной сеткой, ячейки которой имеют треугольную форму. При этом заданный объем керамических включений случайным образом распределяется по объему матрицы. С использованием данного алгоритма в программном комплексе REACTOR [3] можно моделировать различные формы керамических включений в металлической матрице. Для каждой треугольной ячейки заданы свои физико-механические свойства материала. При переходе из одной ячейки в другую характеристики могут изменяться скачкообразно. На границах ячеек выполняются условия совместного движения составляющих гетерогенного материала. Внутри ячеек исследуемые величины определяются с использованием явной разностной схемы.

Следуя [17–19], приведем систему уравнений модели твердого деформируемого тела, включающую следующие уравнения:

— уравнение траектории материальной частицы

$$\dot{x}_i = u_i; \quad (1)$$

— уравнение баланса массы

$$V_0 \rho_0 = V \rho; \quad (2)$$

— уравнение баланса импульса

$$\rho \dot{u}_i = \sigma_{ij,j}; \quad (3)$$

— уравнение баланса внутренней энергии

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (4)$$

где  $\dot{\epsilon}_{ij}$  — тензор скоростей деформаций:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad (5)$$

$\sigma_{ij}$  — тензор напряжений:

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}P + s_{ij}, \quad (6)$$

$s_{ij}$  — девиатор напряжений, характеризующий сдвиговое формоизменение материальной частицы;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Малопараметрическое уравнение состояния принимается в форме уравнения Ми — Грюнайзена [20]

$$P = P_x + \frac{\gamma(V)c_{v,l}T}{V} + \frac{c_{v,e}T^2}{3V(V/V_0)^{2/3}},$$

где  $P_x$  — давление на нулевой изотерме;  $T$  — температура;  $c_v = c_{v,l} + c_{v,e}$  — теплоемкость при постоянном объеме, равная сумме решеточной и электронной теплоемкостей;  $V$ ,  $V_0$  — текущий и начальный удельные объемы;  $\gamma(V)$  — коэффициент Грюнайзена.

Уравнения упругопластического течения принимается в форме уравнений Прандтля — Рейсса

$$\dot{s}_{ij} + d\lambda' s_{ij} = 2G\dot{\epsilon}'_{ij}, \quad \dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{kk}/3 \quad (7)$$

при условии пластичности Губера — Мизеса

$$s_{ij}s_{ij} \leq 2Y_0^2/3, \quad (8)$$

где  $Y_0$  — динамический предел текучести. Вместо процедуры вычисления скалярного множителя  $d\lambda'$  используется известная процедура приведения к кругу текучести компонент девиатора напряжений [19]. В уравнениях (1)–(8) каждый из индексов  $i, j$  принимает значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам проводится суммирование; точка над символом обозначает производную по времени, индекс после запятой — производную по соответствующей координате;  $x_i, u_i$  — компоненты векторов положения и скорости материальной частицы соответственно;  $\rho$  — текущая плотность;  $G$  — модуль сдвига.

Уравнения в частных производных преобразуются в явную разностную схему на разностной сетке вдоль траектории каждой материальной частицы. Процедура построения разностной схемы подробно описана в работах [18, 19].

Для учета процессов разрушения система дополняется соотношениями, связывающими параметры напряженно-деформированного состояния с предельными величинами разрушения материалов [21].

**2. Численное моделирование.** Проведем численное моделирование взаимодействия стального стержня (диаметр  $D = 1$  см, удлинение  $L/D = 15$ ) с массивным блоком. Начальная скорость стержня находится в диапазоне  $0 \div 5000$  м/с. Массивный блок из гетерогенного металлокерамического материала, радиус которого на порядок превышает радиус налетающего на него стержня, помещался в защитное кольцо, а с тыльной стороны опирался на жесткую плиту (рис. 1). Защитное кольцо из тяжелого материала обеспечивает минимальное отражение волн на границе его контакта с блоком. Толщина блока выбиралась в зависимости от скорости движения стержня, т. е. чем выше скорость стержня, тем

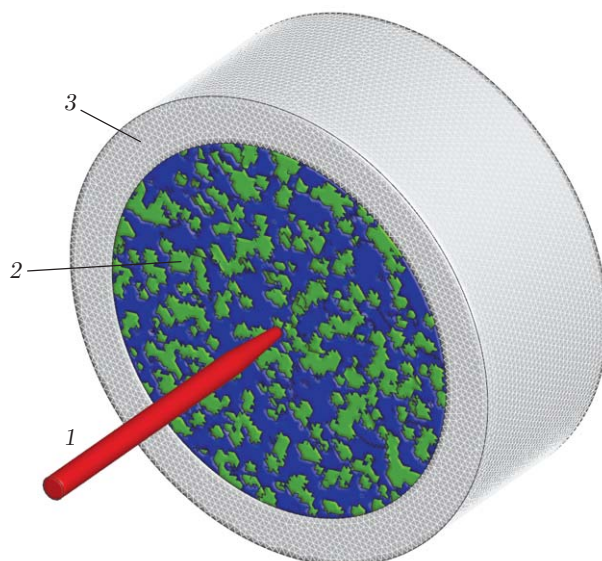


Рис. 1. Схема установки для моделирования процесса проникания удлиненных стержней в массивный блок:

1 — стержень из стали, 2 — массивная преграда из смеси Al5083 —  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , 3 — защитное кольцо

больше толщина и радиус блока, при этом глубина каверны не должна достигать тыльной стороны блока. В качестве гетерогенного материала использовался кермет на основе алюминиевого сплава Al5083 с включениями из керамики  $\text{Al}_2\text{O}_3$  с заданными значениями объемной доли 10, 20 и 30 %. Данные о физико-механических свойствах материалов представлены в работе [15].

На рис. 2 представлены результаты расчета зависимости относительной глубины каверны  $L_c/L_p$  ( $L_c$  — глубина каверны;  $L_p$  — начальная длина стального стержня) от начальной скорости  $u$  движения стержня при различных значениях объемной доли керамики  $\beta$  в гетерогенной преграде. Как и ожидалось, получена немонотонная зависимость глубины каверны от скорости движения стержня, причем для всех гетерогенных материалов с различной объемной долей керамики. С увеличением доли керамики в гетерогенном материале происходит увеличение предела текучести полученного гетерогенного материала, поэтому амплитуда немонотонности уменьшается. В работе [13] установлено, что немонотонный характер изменения глубины каверны обусловлен различием динамических пределов текучести материалов сталкивающихся тел.

Немонотонная зависимость относительной длины стержня после его внедрения в преграду  $L_r/L_p$  ( $L_r$  — остаточная длина стержня в момент его остановки в каверне) от скорости соударения представлена на рис. 3. Заметим, что данный эффект исчезает при увеличении концентрации керамики в гетерогенной мишени, т. е. предела текучести гетерогенного материала мишени.

Как показывает численное моделирование, в результате высокоскоростного (более 1000 м/с) взаимодействия удлиненного стержня и массивной преграды в гидродинамическом приближении форма каверны представляет собой цилиндрическую полость с полусферической головной частью. На рис. 4 показан процесс проникания длинного стального стержня в гетерогенные массивные блоки на основе сплава алюминия Al5083 с объемной долей керамики  $\text{Al}_2\text{O}_3$   $\beta = 10$  %. При проникании стержня его материал растекается по дну каверны, а при достижении предельных деформаций фрагментируется и выносится

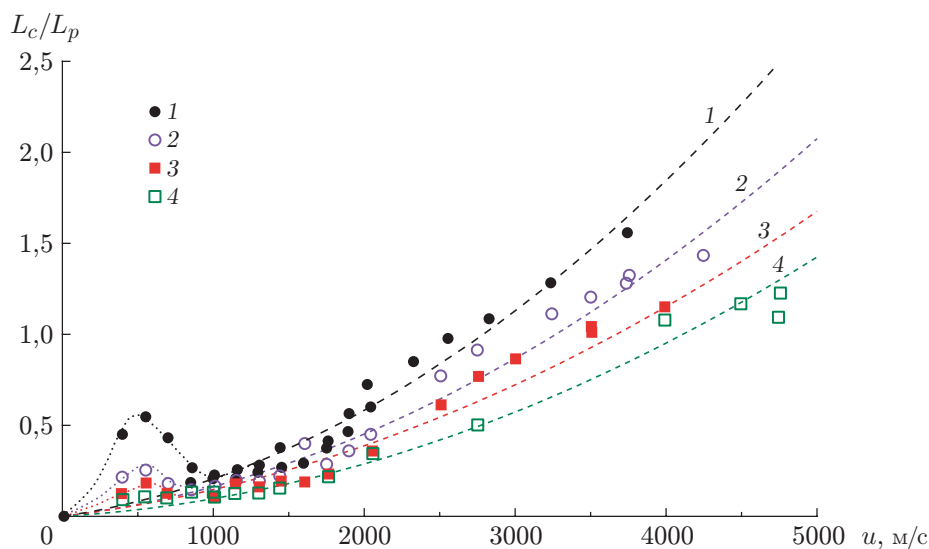


Рис. 2. Зависимость относительной глубины каверны в массивных блоках от скорости движения стержня при различных значениях объемной доли керамики ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) в гетерогенной преграде:

1 —  $\beta = 0$ , 2 —  $\beta = 10\%$ , 3 —  $\beta = 20\%$ , 4 —  $\beta = 30\%$ ; точки — результаты расчета, линии — аппроксимация результатов расчета методом наименьших квадратов

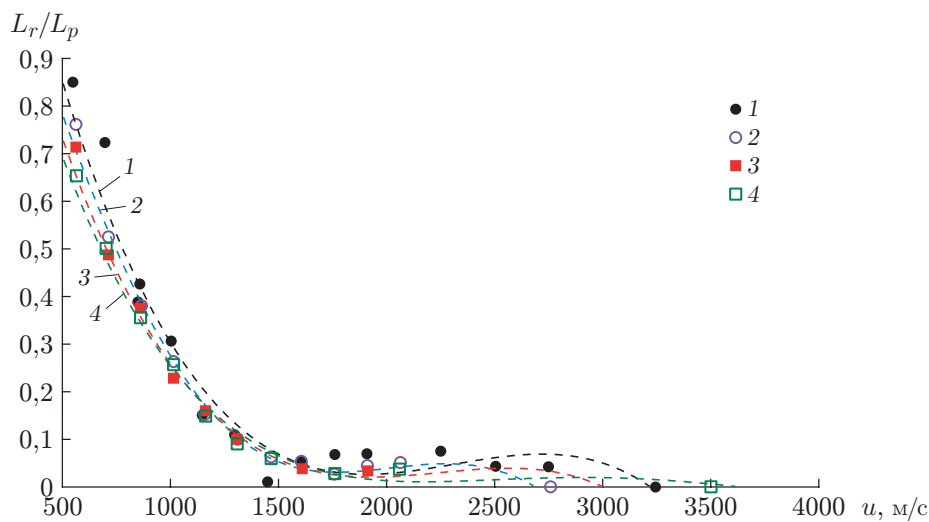


Рис. 3. Зависимость относительной длины стержня после его внедрения в преграду  $L_r/L_p$  от скорости движения стержня при различных значениях объемной доли керамики ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) в гетерогенной преграде:

1 —  $\beta = 0$ , 2 —  $\beta = 10\%$ , 3 —  $\beta = 20\%$ , 4 —  $\beta = 30\%$ ; точки — результаты расчета, линии — аппроксимация результатов расчета методом наименьших квадратов

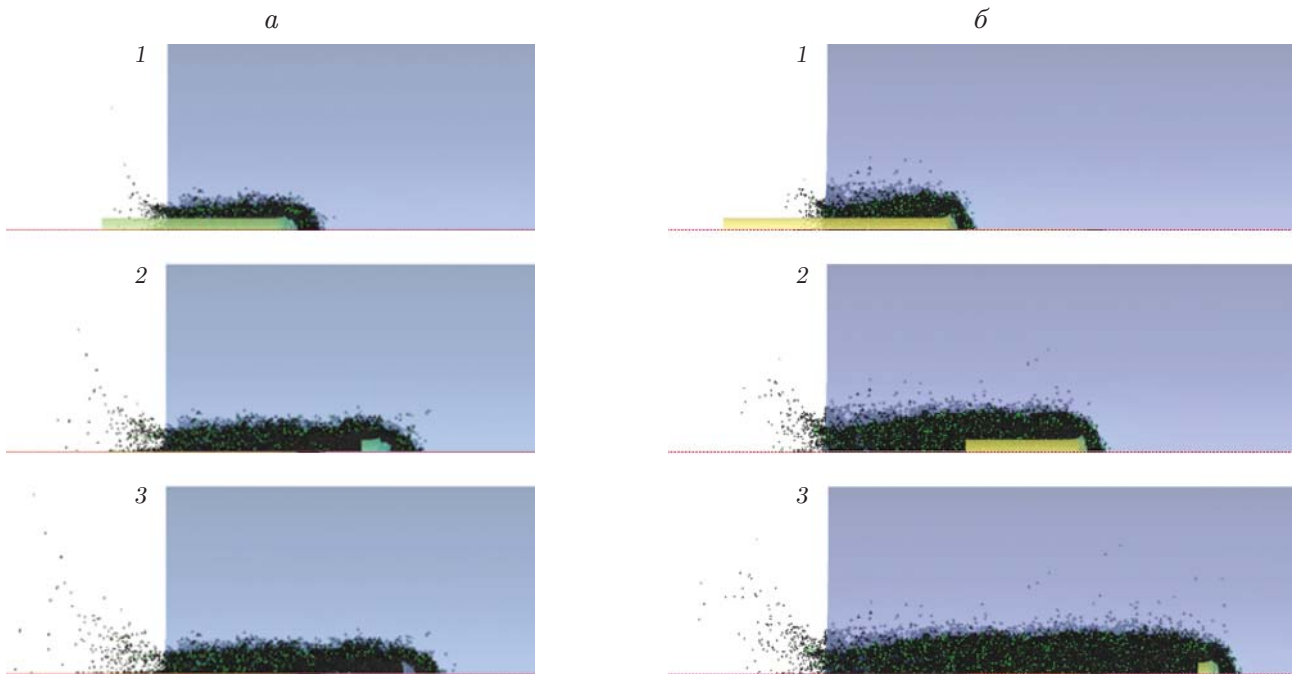


Рис. 4. Процесс проникания длинного стального стержня в гетерогенные массивные блоки при различных значениях начальной скорости:

*a* —  $u = 2500$  м/с (1 —  $t = 50$  мкс, 2 —  $t = 100$  мкс, 3 —  $t = 150$  мкс), *б* —  $u = 4250$  м/с (1 —  $t = 25$  мкс, 2 —  $t = 50$  мкс, 3 —  $t = 75$  мкс)

на стенку каверны. Таким образом, запасенная кинетическая энергия стержня расходуется на формирование каверны в материале массивного блока, а также на разрушение и пластическую деформацию самого стержня. Следует отметить, что формы каверн, особенно при больших скоростях удара, подобны как для однородных, так и для гетерогенных материалов.

Поскольку объем каверны определяется кинетической энергией ударяющего стержня и пределом текучести материала массивного блока [14], представим результаты расчетов в виде зависимости удельной работы напряжений на пластических деформациях  $Z$  от кинетической энергии стержня  $E_k$ . Функция  $Z$  является суммой двух слагаемых: удельной работы напряжений на пластических деформациях при образовании каверны в блоке и удельной работы напряжений на пластических деформациях ударяющего стержня:

$$E_k = \frac{\rho_p u^2}{2}, \quad Z = \frac{V_c Y_t}{V_p} + \left(1 - \frac{V_r}{V_p}\right) Y_p. \quad (9)$$

Здесь  $E_k$  — удельная кинетическая энергия;  $Y_t$ ,  $Y_p$  — пределы текучести материалов массивного блока и стержня;  $V_c$  — объем каверны;  $V_p$ ,  $V_r$  — начальный и остаточный объемы стержня;  $\rho_p$  — плотность материала стержня.

На рис. 5 представлена зависимость работы напряжений на пластических деформациях от кинетической энергии ударяющего стержня. Видно, что большинство расчетных точек зависимости удельной пластической работы  $Z$  от удельной кинетической энергии лежат на прямых. Таким образом, при  $E_k < 15$  МДж/м<sup>3</sup> часть стержня находится в зоне упругости, при увеличении  $E_k$  процесс проникания происходит в режиме развитого пластического течения. Согласно полученным результатам расчетов для всех рассмотренных гетерогенных преград область пластического течения появляется при скоростях взаимодействия  $u \geq 1000$  м/с (см. рис. 3).

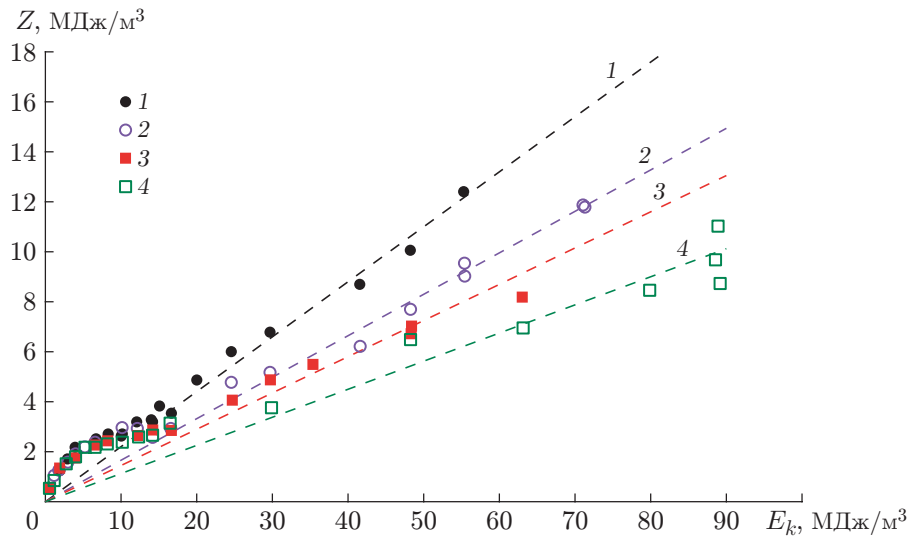


Рис. 5. Зависимость работы напряжений на пластических деформациях от кинетической энергии ударяющего стержня при различных значениях объемной доли керамики в гетерогенной преграде:

1 —  $\beta = 0$ , 2 —  $\beta = 10\%$ , 3 —  $\beta = 20\%$ , 4 —  $\beta = 30\%$ ; точки — результаты расчета, линии — аппроксимация результатов расчета методом наименьших квадратов

В работе [1] на основе результатов численного эксперимента показано, что предел текучести гетерогенной среды можно определить по массовой доле компонентов:

$$Y_{mix} = (1 - \alpha)Y_m + \alpha Y_c \quad (10)$$

( $\alpha$  — массовая доля керамики;  $Y_m, Y_c$  — пределы текучести металла и керамики). Значениям объемной доли керамики  $\beta = 10, 20, 30\%$  соответствуют значения массовой доли керамики  $\alpha = 13,17; 25,45; 36,70\%$ . С использованием (10) при значениях параметров алюминиевого сплава Al5083  $\rho_m = 2710 \text{ кг/м}^3$ ,  $Y_m = 0,475 \text{ ГПа}$  и керамики  $\text{Al}_2\text{O}_3$   $\rho_c = 3700 \text{ кг/м}^3$ ,  $Y_c = 2,9 \text{ ГПа}$  получаем значения предела текучести гетерогенной мишени, приведенные в табл. 1.

Следует отметить, что зависимость (10) получена для гетерогенной среды на основе аддитивной модели смеси [22–24] за фронтом плоской ударной волны без учета разрушения материала. Как правило, такой режим достаточно сложно реализовать в натурном эксперименте, что затрудняет получение экспериментального значения предела текучести гетерогенного материала. Поэтому для экспериментального определения предела текучести гетерогенного материала можно использовать методику внедрения удлиненного стержня в полубесконечную массивную преграду. Из (9) следует, что удельная работа на пластических деформациях  $Z$  пропорциональна пределу текучести. Линейную часть функции  $Z$  описывает коэффициент  $K_{zi}$ , т. е. для каждой концентрации керамики  $i$  в металлической матрице можно записать  $Z_i = K_{zi}E_k$ , где индекс  $i$  принимает значения 2, 3, 4. Тангенс угла наклона каждой прямой  $K_{zi}$  пропорционален пределу текучести смеси, определяемому по формуле

$$Y_{mix} = Y_m K_{z,mix}/K_{z,m}, \quad (11)$$

где  $K_{z,mix}, K_{z,m}$  — тангенсы углов наклона гетерогенного материала и металла.

В табл. 1 приведены значения предела текучести гетерогенного материала, вычисленные по соотношениям (10), (11). Из табл. 1 следует, что значения погрешности вычисления эффективного предела текучести гетерогенного материала по двум предложенным методам различаются, причем с увеличением концентрации керамики они увеличиваются.

Таблица 1

Зависимость предела текучести от массовой доли керамики в гетерогенном материале

$\alpha$ , %	$Y_{mix}$ , ГПа		$\delta$ , %
	Расчет по формуле (10)	Расчет по формуле (11)	
0	0,475	0,475	—
13,17	0,800	0,740	8,1
25,45	1,100	0,880	25,0
36,70	1,380	1,080	27,8

Примечание.  $\delta$  — погрешность.

Таблица 2

Зависимость предела текучести от объемной доли керамики в гетерогенном материале

$\beta$ , %	$Y_{mix}$ , ГПа		$\delta$ , %
	Расчет по формуле (12)	Расчет по формуле (11)	
0	0,475	0,475	—
10	0,720	0,740	2,70
20	0,960	0,880	9,09
30	1,200	1,080	11,11

Если в формуле (10) вместо массовой доли керамики  $\alpha$  использовать объемную долю  $\beta$ , то для предела текучести смеси получим формулу

$$Y_{mix} = (1 - \beta)Y_m + \beta Y_c. \quad (12)$$

Результаты расчетов по формулам (11), (12) приведены в табл. 2. При объемной концентрации керамики  $\beta = 30$  % погрешность вычисления эффективного предела текучести по обеим формулам незначительно превышает 10 %.

**Закключение.** Таким образом, для оценки эффективного динамического предела текучести гетерогенных материалов при высокоскоростном деформировании с учетом разрушения можно использовать процесс внедрения удлиненного стержня в полубесконечную преграду.

Сравнение результатов численных расчетов процесса внедрения удлиненного стержня в массивные преграды показывает, что добавление керамики в металлическую матрицу оказывает существенное влияние на глубину проникания. Это обусловлено значительным увеличением предела текучести гетерогенного материала. Так, добавление керамики  $Al_2O_3$  с массовой долей 15 % приводит к увеличению предела текучести мишени практически в два раза.

Обнаружена немонотонная зависимость длины стержня после его внедрения в преграду от скорости соударения.

На основе анализа результатов расчетов проникания стержней в гетерогенные мишени получена оценка эффективного динамического предела текучести гетерогенной среды в зависимости от объемных долей компонентов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Kraus E. I., Shabalin I. I., Shabalin T. I.** Numerical analysis of wave propagation in a cermet composite // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1893. 030130.
2. **Taylor G.** The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. 1. Theoretical considerations // Proc. Roy. Soc. A: Math., Phys. Engng Sci. 1948. V. 194, N 1038. P. 289–299.

3. **Kraus A. E., Kraus E. I., Shabalin I. I.** Reactor 3D software performance on penetration and perforation problems // Behavior of materials under impact, explosion, high pressures and dynamic strain rates / Ed. by M. Y. Orlov, P. M. Visakh. Cham: Springer Intern. Publ., 2023. P. 83–101. (Advanced structured materials; V. 176).
4. **Белов Г. В., Гусаров А. П., Марков В. А. и др.** Применение теста Тейлора для исследования динамических механических свойств высокопористого алюминиевого сплава // Наука и образование: Машиностроение и компьютер. технологии. 2012. [Электрон. ресурс]. DOI: 10.7463/0912.0442058.
5. **Bayandin Y. V., Bilalov D. A., Uvarov S. V.** Verification of wide-range constitutive relations for elastic-viscoplastic materials using Taylor — Hopkinson test // Comput. Continuum Mech. 2020. V. 13, N 4. P. 449–458.
6. **Брагов А. М.** Экспериментально-теоретическое исследование процессов высокоскоростного деформирования и разрушения материалов различной физической природы с использованием метода Кольского и его модификаций / А. М. Брагов, А. Ю. Константинов, А. К. Ломунов. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2018.
7. **Радченко П. А., Батуев С. П., Радченко А. В.** Влияние вращения ударника на разрушение при высокоскоростном ударе // Физ. мезомеханика. 2021. Т. 24, № 6. С. 25–35.
8. **Радченко П. А., Батуев С. П., Радченко А. В.** Влияние формы ударника из высокопрочной стали на его разрушение при высоких скоростях деформации // Изв. вузов. Физика. 2021. Т. 64, № 5. С. 44–51.
9. **Chakraborty S., Shaw A., Banerjee B.** An axisymmetric model for Taylor impact test and estimation of metal plasticity // Proc. Roy. Soc. A: Math., Phys. Engng Sci. 2015. V. 471, N 2174. 20140556.
10. **Sen S., Banerjee B., Shaw A.** Taylor impact test revisited: Determination of plasticity parameters for metals at high strain rate // Intern. J. Solids Structures. 2020. V. 193/194. P. 357–374.
11. **Витман Ф. Ф., Златин Н. А.** О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании. 1. Состояние и теория вопроса // Журн. техн. физики. 1963. Т. 33, № 6. С. 982–989.
12. **Беляков Л. В., Витман Ф. Ф., Златин Н. А.** О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании. 2. О моделировании удара шара по полупространству // Журн. техн. физики. 1963. Т. 33, № 9. С. 900–995.
13. **Златин Н. А.** Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях / Н. А. Златин, А. П. Красильщиков, Г. И. Мишин, Н. Н. Попов. М.: Наука, 1974.
14. **Краус Е. И., Фомин В. М., Шабалин И. И.** Построение единой кривой моделирования процесса кратерообразования компактными ударниками различной формы // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 5. С. 199–210.
15. **Краус А. Е., Краус Е. И., Шабалин И. И.** Стойкость керамик к удару в численном эксперименте // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 5. С. 190–198.
16. **Краус А. Е., Краус Е. И., Шабалин И. И., Бузюркин А. Е.** Эволюция ударного импульса в гетерогенной упругопластической среде // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 3. С. 147–157.
17. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике / Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
18. **Фомин В. М.** Высокоскоростное взаимодействие тел / В. М. Фомин, А. И. Гулидов, Г. А. Сапожников, И. И. Шабалин, В. А. Бабаков, В. Ф. Куропатенко, А. Б. Киселев, Ю. А. Тришин, А. И. Садырин, С. П. Киселев, И. Ф. Головнев. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
19. **Wilkins M. L.** Computer simulation of dynamic phenomena: Scientific computation. Berlin; Heidelberg: Springer, 1999.

20. **Kraus E. I., Shabalin I. I.** A few-parameter equation of state of the condensed matter // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 774. 012009.
21. **Kraus A., Buzyurkin A., Shabalin I., Kraus E.** Numerical modelling of high-speed loading of periodic interpenetrating heterogeneous media with adapted mesostructure // Appl. Sci. 2023. V. 13, N 12. 7187.
22. **Николаевский В. Н.** Гидродинамический анализ ударных адиабат гетерогенных смесей веществ // ПМТФ. 1969. № 3. С. 82–88.
23. **Дремин А. Н., Карпухин И. А.** Метод определения ударных адиабат дисперсных веществ // ПМТФ. 1960. № 3. С. 184–188.
24. **Краус Е. И., Фомин В. М., Шабалин И. И.** Учет электронных составляющих в уравнении состояния при расчете ударных волн в смеси металлов // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2001. № 9. С. 78–84.

*Поступила в редакцию 6/X 2023 г.,  
после доработки — 6/X 2023 г.  
Принята к публикации 27/XI 2023 г.*

---