Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 2

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ НА СДВИГОВОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

УДК 532.591+517.958

В. М. Тешуков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В работе установлено существование простых волн для системы интегродифференциальных уравнений, описывающей в приближении теории мелкой воды завихренные течения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Проанализированы общие свойства простых волн, найден новый класс точных решений, определяющих распространение волн по стационарному сдвиговому потоку.

Ряд точных решений в классе простых волн для указанной модели был найден в [1–4].

1. Система уравнений простых волн. Система интегродифференциальных уравнений

$$u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0, \quad u_x + v_y = 0, \quad h_t + \left(\int_0^h u\,dy\right)_x = 0 \tag{1.1}$$

описывает в длинноволновом приближении ($H_0/L_0 \ll 1$, H_0, L_0 — характерные масштабы по вертикали и горизонтали) течение идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей $y = h(x,t)$ в поле силы тяжести над ровным дном $y = 0$ [5]. Здесь (u, v) — вектор скорости жидкости; h — глубина слоя; g — ускорение свободного падения; x, y — декартовы координаты на плоскости; t — время. На дне слоя выполняется условие непротекания $v(x,0,t) = 0$.

Уравнения движения удобно анализировать в эйлерово — лагранжевой системе координат x', λ, t' ($\lambda \in [0,1]$), переход к которой задается с помощью решения задачи Коши [6]:

$$x = x', \quad t = t', \quad y = \Phi(x',\lambda,t'), \quad \Phi_t + u(x,\Phi,t)\Phi_x = v(x,\Phi,t), \quad \Phi(x,\lambda,0) = \Phi_0(x,\lambda) \tag{1.2}$$

(уравнение $y = \Phi_0(x,\lambda)$ задает начальное положение лагранжевой поверхности $\lambda = \mathrm{const}$, при этом $\Phi(x,0,t) = 0, \Phi(x,1,t) = h(x,t)$).

В новых координатах уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{gathered} u_t(x,\lambda,t) + u(x,\lambda,t)u_x(x,\lambda,t) + g\int_0^1 H_x(x,\nu,t)\,d\nu = 0, \\ H_t(x,\lambda,t) + (u(x,\lambda,t)H(x,\lambda,t))_x = 0, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где введена новая искомая функция $H(x,\lambda,t) = \Phi_\lambda(x,\lambda,t) > 0$; штрих в обозначениях новых переменных опускается. Решение этой системы позволяет определить

$$y = \int_0^\lambda H(x,\nu,t)\,d\nu, \quad v(x,\nu,t) = \Phi_t(x,\nu,t) + u(x,\nu,t)\Phi_x(x,\nu,t).$$

Замена переменных обратима, если $H = \Phi_\lambda \neq 0$, это условие достаточно выполнить при $t = 0$.

В [1–4] анализировались примеры частных решений вида

$$u = u(\alpha(x,t), y), \quad v = \alpha_x \tilde{v}(\alpha(x,t), y), \quad h = h(\alpha(x,t)) \tag{1.4}$$

системы уравнений (1.1), которые назывались простыми волнами этих уравнений. Для системы (1.3) простые волны введены в [7], по определению это решения вида

$$u = u(\alpha(x,t), \lambda), \quad H = H(\alpha(x,t), \lambda), \tag{1.5}$$

где $\alpha(x,t)$ — функция двух переменных. Легко видеть, что в силу связи (1.2) любое такое решение дает решение (1.4) исходной системы уравнений.

В соответствии с (1.3) простые волны определяются системой уравнений

$$\begin{gathered}(u(\alpha,\lambda) - k)u_\alpha(\alpha,\lambda) + g\int_0^1 H_\alpha(\alpha,\nu)d\nu = 0,\\ (u(\alpha,\lambda) - k)H_\alpha(\alpha,\lambda) + H(\alpha,\lambda)u_\alpha(\alpha,\lambda) = 0, \quad k = -\alpha_t/\alpha_x.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Замечание. Более точно решения вида (1.5) следовало бы называть двойными волнами, так как искомые величины являются функциями двух независимых переменных. Но, учитывая тот факт, что подкласс частных решений системы (1.3), характеризуемый равенствами $u_\lambda \equiv 0, H_\lambda \equiv 0$, содержит простые волны классических уравнений мелкой воды, целесообразно сохранить терминологию для нового класса решений с аналогичными свойствами. При этом решения вида $u = u(\lambda), H = H(\lambda)$, описывающие стационарные сдвиговые течения (в исходных переменных $u = u(y), v = 0, h = \mathrm{const}$), будут играть ту же роль, что и постоянные решения уравнений мелкой воды.

В [8] предложено обобщение понятия гиперболичности для систем уравнений вида

$$\mathbf{U}_t(x,t,\lambda) + A\langle \mathbf{U}_x(x,t,\nu)\rangle = 0 \tag{1.7}$$

(A — нелокальный оператор, действующий по переменной ν при любых фиксированных x, t, зависящий в общем случае от $x, t, \lambda, \mathbf{U}$).

В гиперболическом случае система уравнений (1.7) приводится к соотношениям на характеристиках, определяемых дифференциальными уравнениями $dx/dt = k^\beta(x,t)$:

$$\left(\mathbf{F}^\beta, \mathbf{U}_t + k^\beta \mathbf{U}_x\right) = 0. \tag{1.8}$$

Здесь $\mathbf{F}^\beta$ — собственные функционалы, действующие по переменной λ и являющиеся решением задачи на собственные значения:

$$(\mathbf{F}^\beta, A\langle\varphi\rangle) = k^\beta(\mathbf{F}^\beta, \varphi); \tag{1.9}$$

k^β — соответствующие характеристические собственные значения; $(\mathbf{F}, \varphi)$ — результат действия функционала на гладкую пробную функцию φ. Условия гиперболичности означают, что все k^β, удовлетворяющие (1.9), действительны и что при определенной гладкости вектор-функции $\mathbf{S}$ из совокупности равенств $(\mathbf{F}^\beta, \mathbf{S}) = 0$ следует $\mathbf{S} = 0$. В этом случае уравнения (1.7) и (1.8) эквивалентны, так как (1.8) получается из (1.7) действием $\mathbf{F}^\beta$.

Простые волны уравнений (1.7) являются решениями системы

$$A\langle\mathbf{U}_\alpha\rangle - k\mathbf{U}_\alpha = 0, \quad k = -\alpha_t/\alpha_x.$$

Для простых волн соотношения на характеристиках принимают вид

$$(\mathbf{F}^\beta, (k^\beta - k)\mathbf{U}_\alpha) = (k^\beta - k)(\mathbf{F}^\beta, \mathbf{U}_\alpha) = 0.$$

Если $(\mathbf{F}^\beta, \mathbf{U}_\alpha) = 0$ для всех β, то, как вытекает из предыдущего, $\mathbf{U}_\alpha = 0$, т. е. $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\lambda)$.

Следовательно, нетривиальное решение типа простой волны существует только в том случае, когда для каждой пары значений x, t найдется собственное значение k^β такое, что $k^\beta - k = k^\beta + \alpha_t/\alpha_x = 0$.

Система уравнений (1.3) имеет вид (1.7), если положить $\mathbf{U} = (u, H)^{\mathrm{T}}$ ($(\ ,\ )^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонирование) и

$$A\langle (f_1, f_2)^{\mathrm{T}}\rangle = \Big(uf_1 + g\int\limits_0^1 f_2\,d\nu, Hf_1 + uf_2\Big)^{\mathrm{T}}.$$

Как показано в [8, 9], на любом гладком решении есть только два действительных характеристических значения k_1, k_2, удовлетворяющих характеристическому уравнению

$$1 = g\int\limits_0^1 \frac{H\,d\nu}{(u-k)^2} \qquad (1.10)$$

($k_1 < \min\limits_\lambda u(x,\lambda,t)$, $k_2 > \max\limits_\lambda u(x,\lambda,t)$) и отвечающих дискретному спектру оператора A. Кроме того, определяется непрерывный спектр характеристических значений $k^\lambda = u(x,\lambda,t)$, $\lambda \in (0,1)$.

Из сказанного выше вытекает, что для решения типа простой волны имеются следующие возможности: либо $k = k_1(\alpha)$, либо $k = k_2(\alpha)$, либо $k = u(\alpha, \lambda(\alpha))$ ($\lambda(\alpha)$ — гладкая функция).

В данной работе изучаются простые волны, отвечающие дискретному характеристическому спектру. Для определенности рассмотрим случай $k = k_2(\alpha)$ (случай $k = k_1(\alpha)$ анализируется аналогично).

В [8] показано, что условия на характеристиках для системы (1.3) допускают запись в инвариантах Римана:

$$\begin{gathered} R_t + uR_x = 0, \quad \omega_t + u\omega_x = 0, \qquad r_{it} + k_i r_{ix} = 0, \\ R = u - g\int\limits_0^1 \frac{H'd\nu}{u'-u}, \quad \omega = u_\lambda/H, \quad r_i = k_i - g\int\limits_0^1 \frac{H'd\nu}{u'-k_i}. \end{gathered} \qquad (1.11)$$

Здесь $u = u(x,\lambda,t); u' = u(x,\nu,t); H' = H(x,\nu,t)$; интеграл в представлении функции R понимается в смысле главного значения по Коши. Для рассматриваемой простой волны из (1.11) вытекают равенства

$$R = R_0(\lambda), \quad \omega = \omega_0(\lambda), \quad r_1 = r_1^0 = \mathrm{const}. \qquad (1.12)$$

Функции $R_0(\lambda), \omega_0(\lambda)$, постоянная r_1^0 определяются из условий примыкания простой волны к заданному сдвиговому потоку $u = u_0(\lambda)$, $H = H_0(\lambda)$ по граничной характеристике $\alpha = \mathrm{const}$. Функция $k(x,t) = k_2(x,t)$ должна удовлетворять уравнению

$$k_t + kk_x = 0. \qquad (1.13)$$

Любое решение уравнения (1.13) и соотношения (1.12) задают простую волну $u = u(k,\lambda), H = H(k,\lambda)$. При этом функции u, H находятся как решения системы нелинейных интегральных уравнений, следующих из (1.11), (1.12). Ввиду сложности этих уравнений дадим прямое доказательство существования решения системы уравнений (1.6), используя соотношения (1.12) как интегралы этой системы.

2. Существование и свойства простых волн. В дальнейшем в качестве переменной α выбирается глубина

$$h(x,t)=\int\limits_0^1 H\,d\nu.$$

Заметим, что характеристики простой волны движутся с постоянными скоростями $dx/dt = k$ и область определения простой волны в пространстве x,λ,t покрыта однопараметрическим семейством плоскостей ($h(x,t) = \mathrm{const}$), на каждой из которых u и H зависят только от λ. Естественно рассмотреть задачу о примыкании простой волны по характеристике $h = h_m = \mathrm{const}$ к заданному сдвиговому потоку:

$$\begin{gathered} u_h=-g(u-k)^{-1}, \qquad H_h=gH(u-k)^{-2}, \\ h=\int\limits_0^1 H d\nu, \qquad u\Big|_{h=h_m}=V_0(\lambda), \qquad H\Big|_{h=h_m}=H_0(\lambda) \end{gathered} \tag{2.1}$$

(h_m — постоянная глубина примыкающего сдвигового потока). Здесь и далее больший характеристический корень k_2 уравнения (1.10) обозначается как k.

Из (2.1) следует такое свойство простой волны: если $u(h_m,\lambda_1) = u(h_m,\lambda_2)$, то $u(h,\lambda_1) = u(h,\lambda_2)$ всюду в области определения. Этот факт вытекает из однородности уравнения для разности $\delta = u(h,\lambda_1) - u(h,\lambda_2)$:

$$\delta_h = g\delta(u(h,\lambda_1)-k)^{-1}(u(h,\lambda_2)-k)^{-1}, \quad \delta(h_m)=0.$$

Следовательно, если профиль горизонтальной скорости монотонный по λ при $h = h_m$ ($u_0'(\lambda)\neq 0$), то $u_\lambda(h,\lambda)\neq 0$.

Задачу о примыкании простой волны к сдвиговому течению с немонотонным профилем скорости можно свести к задаче с монотонным профилем. Действительно, пусть профиль скорости $V_0(\lambda)$ имеет вид, изображенный на рис. 1: $V_0'(\lambda) > 0$ при $0 \leqslant \lambda < \lambda_*$, $V_0'(\lambda) < 0$ при $\lambda_* < \lambda \leqslant 1$. Пусть $V_0(\lambda_1) = V_0(1)$. Определим функцию $f(\lambda)$ на интервале (λ_1,λ_*) равенством $V_0(\lambda) = V_0(f(\lambda))$. Согласно сказанному выше, равенство $u(h,\lambda) = u(h,f(\lambda))$ ($\lambda_* \leqslant f(\lambda) \leqslant 1$) будет выполнено в области простой волны. Введем функцию $H_1(h,\lambda) = H(h,f(\lambda))f'(\lambda)$ и функцию $H_2(h,\lambda)$, определенную следующим образом: $H_2(h,\lambda) = H(h,\lambda)$ при $\lambda\in[0,\lambda_1]$, $H_2(h,\lambda) = H(h,\lambda) - H_1(h,\lambda)$ при $\lambda \in (\lambda_1,\lambda_*)$. Так как

$$\int\limits_0^1 \frac{H d\nu}{(u-k)^s} = \int\limits_0^{\lambda_1} \frac{H(h,\nu)d\nu}{(u(h,\nu)-k)^s} + \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_*} \frac{(H(h,\nu)-H(h,f(\nu))f'(\nu))d\nu}{(u(h,\nu)-k)^s} = \int\limits_0^{\lambda_*} \frac{H_2(h,\nu)d\nu}{(u(h,\nu)-k)^s},$$

$$s=0,\,1,\,2,\ldots,$$

то для $u(h,\lambda), H_2(h,\lambda)$ возникает задача вида (2.1) на отрезке $\lambda\in[0,\lambda_*]$ с монотонным профилем скорости: $V_0'(\lambda)\neq 0$ при $\lambda\in[0,\lambda_*)$ (интегралы по отрезку [0,1] в (1.10) и (2.1) заменяются интегралами по отрезку $[0,\lambda_*]$. Если указанная задача решена, то необходимо дополнительно решить линейную задачу $K_h = gK(u-k)^{-2}$, $K(h_m,\lambda) = H_0(\lambda) + H_0(f(\lambda))f'(\lambda)$ для функции $K(h,\lambda) = H(h,\lambda) + H_1(h,\lambda)$.

Затем восстанавливается решение исходной задачи с немонотонным профилем скорости: при $\lambda\in[0,\lambda_1]$ оно совпадает с решением редуцированной задачи; при $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_*]$ $u(h,\lambda)$ совпадает с решением редуцированной задачи, а $H = 2^{-1}(H_2+K)$; при $\lambda\in[\lambda_*,1]$ $u(h,\lambda) = u_r(h,f^{-1}(\lambda))$, $H(h,\lambda) = [(2f')^{-1}(K-H_2)](h,f^{-1}(\lambda))$. Здесь u_r — решение редуцированной задачи; $f^{-1}(\lambda)$ — функция, обратная f. Случай немонотонного профиля скорости с конечным числом точек смены знака производной рассматривается аналогично. Отметим две особенности редуцированной задачи: во-первых, функция

$H_2(h_m, \lambda)$ разрывна при переходе через $\lambda = \lambda_1$ и соответственно $H_2(h, \lambda)$ обладает тем же свойством; во-вторых, $u_\lambda(h, \lambda_*) = 0$.

В дальнейшем предполагаем, что $V_0'(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \neq 1$. Конкретно будет рассматриваться случай, когда $V_0' \geqslant 0$ (задача на интервале $[0, \lambda_*]$ сводится к задаче на интервале [0,1] растяжением переменной λ).

Дифференцирование характеристического уравнения дает дифференциальное уравнение для определения функции $k(h)$:

$$k_h = -\frac{3}{2}\int\limits_0^1 \frac{H d\nu}{(u-k)^4}\Big(\int\limits_0^1 \frac{H d\nu}{(u-k)^3}\Big)^{-1}, \quad k(h_m) = k_2^0. \tag{2.2}$$

Начальное условие для этого уравнения является требованием совпадения характеристической скорости на границе с k_2^0 — бо́льшим действительным корнем уравнения (1.10) при $u = V_0(\lambda)$, $H = H_0(\lambda)$. Из (2.1) можно также получить дифференциальное уравнение для функции $u_\lambda(h, \lambda)$:

$$u_{\lambda h} = g u_\lambda (u-k)^{-2}, \quad u_\lambda(h_m, \lambda) = V_0'(\lambda). \tag{2.3}$$

Докажем локальную теорему существования решения задачи (2.1)–(2.3), предполагая, что $V_0(\lambda)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $H_0(\lambda)$ — непрерывная функция, $H_0(\lambda) > \delta > 0$, $k_0 - V_0(\lambda) > \delta > 0$. Введем банахово пространство B элементов $\mathbf{V} = (u, u_\lambda, H, k)$ с нормой $\|\mathbf{V}\| = \max\limits_\lambda |u| + \max\limits_\lambda |u_\lambda| + \max\limits_\lambda |H| + |k|$.

Первые три компоненты вектора $\mathbf{V}$ — непрерывные функции переменного $\lambda \in [0, 1]$, последняя компонента — действительное число. Задачу (2.1)–(2.3) можно представить в общей форме:

$$d\mathbf{V}/dh = \mathbf{F}(\mathbf{V}), \quad \mathbf{V}(h_m) = \mathbf{V}_0. \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{F}(\mathbf{V})$ — нелинейный оператор в пространстве B. Согласно известной теореме существования решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [10], в случае, когда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при $\|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\| < \varepsilon$ справедливы неравенства

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{V})\| \leqslant M, \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{V}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{V}_2)\| \leqslant K\|\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2\|, \tag{2.5}$$

задача (2.4) при $|h - h_m| < \delta_1 = \min(\varepsilon M^{-1}, K^{-1})$ имеет единственное решение $\mathbf{V}(h) \in B$ такое, что $\|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\| < \varepsilon$.

Проверим выполнение условий приведенной теоремы. Рассмотрим шар $\|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\| < 2^{-1}\delta$. Для элементов из этого шара $|u - k| > 2^{-1}\delta$, $|H| > 2^{-1}\delta$. Действительно,

$$|u - k| = |V_0 - k_0 + u - V_0 + k_0 - k| \geqslant |V_0 - k_0| - \|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\| > 2^{-1}\delta,$$

$$|H| = |H_0 + H - H_0| \geqslant |H_0| - \|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\| > 2^{-1}\delta.$$

В силу непрерывности выражений, определяющих $\mathbf{F}(\mathbf{V})$ при $|u - k| > 2^{-1}\delta$, $|H| > 2^{-1}\delta$, существуют постоянные $M(\delta, \|\mathbf{V}_0\|), K(\delta, \|\mathbf{V}_0\|)$, для которых справедливы неравенства (2.5). Тогда, согласно приведенной выше теореме, решение задачи (2.4) существует и единственно для $|h - h_m| < \delta_1(\delta, \|\mathbf{V}_0\|)$. Как указывалось ранее, при рассмотрении задачи с немонотонным профилем $V_0(\lambda)$ возникает необходимость вводить разрывы функции $H(h, \lambda)$. Локальную теорему существования решения можно получить и в этом случае. Если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < 1$ — точки разрыва функции H, то в качестве элементов B рассматриваются векторы $(u_1, u_{1\lambda}, H_1, u_2, u_{2\lambda}, H_2, \ldots, u_{n+1}, u_{n+1\lambda}, H_{n+1}, k)$, первые компоненты которых являются непрерывными функциями на отрезках $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ ($\lambda_0 = 0, \lambda_{n+1} = 1$), и все рассуждения повторяются. Для полученного таким способом решения можно доказать, используя уравнения (2.1)–(2.3), что u будет непрерывно дифференцируемой функцией по λ, а H — кусочно-непрерывной функцией с точками разрыва $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Докажем теорему существования решения задачи о простой волне в целом по h, предполагая, что

$$\begin{gathered} V_0'(\lambda) > 0, \quad \lambda \in [0,1), \quad k_0 > V_0(1) + \delta, \\ (\omega_0(\lambda))^{-1} = H_0(\lambda)(V_0'(\lambda))^{-1} \geqslant a > 0, \quad H_0(\lambda) > \delta > 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Лемма. *На любом решении задачи* (2.1)–(2.3) *выполнены неравенства*

$$(gh)^{1/2} + a^{-1}h \geqslant k - u \geqslant (gh)^{1/2}(1 + h^{1/2}g^{-1/2}a^{-1})^{-1}. \tag{2.7}$$

Доказательство. В малой окрестности $h = h_m$ неравенства $k > u_1 > u > u_0(u_1 = u(h,1), u_0 = u(h,0))$ выполнены по непрерывности. Как указывалось выше, соотношения

$$g\int_0^1 \frac{H'd\nu}{(u'-k)^2} = g\int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{\omega'}\frac{du'}{(u'-k)^2} = 1, \quad \omega = \omega_0(\lambda) = V_0'(\lambda)(H_0(\lambda))^{-1} \tag{2.8}$$

задают интегралы уравнений (2.1)–(2.3). Из (2.8) с использованием неравенств

$$0 \leqslant k - u_1 \leqslant k - u \leqslant k - u_0 \tag{2.9}$$

получим

$$(k-u_0)^2 \geqslant g\int_0^1 H d\nu = gh, \quad (k-u_1)^2 \leqslant g\int_0^1 H d\nu = gh.$$

Соотношение

$$h = \int_0^1 H d\nu = \int_{u_0}^{u_1} \omega^{-1} du$$

с учетом того, что $\omega^{-1} \geqslant a$, дает $h \geqslant a(u_1 - u_0)$.

Из (2.8) имеем

$$1 = g\int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{\omega'}\frac{du'}{(u'-k)^2} \geqslant ga\left[\frac{1}{u_0 - k} - \frac{1}{u_1 - k}\right],$$

откуда следует $k - u_1 \geqslant ga(k-u_0)[k - u_0 + ga]^{-1} \geqslant (gh)^{1/2}(1 + h^{1/2}g^{-1/2}a^{-1})^{-1}$. Так как $k - u_0 = k - u_1 + u_1 - u_0 \leqslant (gh)^{1/2} + a^{-1}h$, то неравенства леммы вытекают из (2.9).

Использование априорных оценок (2.7) и уравнений системы (2.1)–(2.3) позволяет доказать ограниченность $u(h,\lambda)$, $u_\lambda(h,\lambda), H(h,\lambda)$, $k(h)$ на любом интервале $h \in [\sigma, A]$ $(0 < \sigma < h_m < A)$. На этом интервале будут справедливы неравенства $|u - k| > \varepsilon(\sigma, A, \|\mathbf{V}_0\|)$, $H > \varepsilon(\sigma, A, \|\mathbf{V}_0\|)$.

Повторное применение локальной теоремы существования решения дает существование решения задачи (2.1)–(2.3) на всем интервале $h \in (0, A)$. В итоге доказана

Теорема. *Пусть функция* $V_0(\lambda)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* [0,1], *функция* $H_0(\lambda)$ *кусочно-непрерывна и имеет конечное число точек разрыва первого рода, кроме того, выполнены условия* (2.6). *Тогда задача* (2.1)–(2.3) *имеет единственное решение на любом интервале* $h \in (0, A]$ $(h_m \in (0, A])$, *причем функция* $u(\lambda, h)$ *непрерывно дифференцируема, а функция* $H(\lambda, h)$ *кусочно-непрерывна.*

Как указывалось ранее, условие монотонности профиля скорости не ограничивает общности, условие же $(\omega_0(\lambda))^{-1} \geqslant a$ означает, что производная u_y не обращается в бесконечность на граничной характеристике при $h = h_m$ (величина $\omega = u_y$ в силу связи переменных x, y, t и x, λ, t).

Отметим, что если при подходе к замыкающей характеристике простой волны $h \to 0$, то такое решение описывает растекание сдвигового потока по сухому руслу. Из (2.7) следует, что при $h \to 0$ $u \to k$, что означает выравнивание скорости потока по глубине. Оказывается, что скорость течения по сухому руслу определяется равенством $u = k = r_1^0$. Действительно, соотношение

$$r_1 = k_1 - \int_0^1 \frac{H d\nu}{(u - k_1)} = r_1^0 = \text{const}$$

также определяет интеграл уравнений (2.1)–(2.3). С использованием неравенства Коши получим

$$\left| \int_0^1 \frac{H d\nu}{(u - k_1)} \right| \leqslant \left(\int_0^1 \frac{H d\nu}{(u - k_1)^2} \right)^{1/2} \left(\int_0^1 H d\nu \right)^{1/2} = h^{1/2}, \quad 1 - g \int_0^1 \frac{H d\nu}{(u - k_1)^2} \leqslant \frac{1}{(u_1 - k_1)^2} gh.$$

Поэтому $u_1 \to k_1$, а $k_1 \to r_1 = r_1^0$ при $h \to 0$.

В рассматриваемой простой волне при понижении уровня h скорость потока $u(h, \lambda)$ увеличивается вдоль каждой лагранжевой поверхности $\lambda = \text{const}$, в волне повышения уровня жидкости $u(h, \lambda)$ уменьшается с ростом h. Так как $k > u$, то частицы жидкости попадают в зону простой волны справа (по отношению к направлению оси x). Для простой волны, обращенной влево ($k < u$), поведение $u(h, \lambda)$ меняется на противоположное. Если в потоке перед волной $V_0(\lambda) > 0$, то после прохождения простой волны, обращенной вправо, в стационарном сдвиговом течении за волной критический слой ($u = 0$) не появляется. Если же перед волной $V_0(\lambda) < 0$, то после прохождения волны может появиться критический слой.

Окончательное построение простой волны завершается решением задачи Коши $h_t + k(h) h_x = 0$, $h(x, 0) = h_0(x)$. Любое решение этого уравнения определяет пару функций $u(x, \lambda, t) = u(h(x, t), \lambda), H(x, \lambda, t) = H(h(x, t), \lambda)$, удовлетворяющих системе (1.3). Если $h_0'(x) > 0$, то решение определяет обращенную вправо волну понижения уровня жидкости. Так как $k'(h) > 0$, то гладкое решение задачи Коши существует для всех $t > 0$. Если же при $t = 0$ имеются точки x, где $h_0'(x) < 0$, то в простой волне возникнут зоны, где уровень жидкости повышается и, как известно, произойдет опрокидывание волны: производные функции h станут не ограниченными в некоторый момент времени. Дальнейшее описание эволюции течения возможно в классах разрывных функций [11].

3. Точное решение типа простой волны. Как указывалось ранее, на решении типа простой волны инварианты Римана R и ω^{-1} зависят только от λ и, следовательно, функционально зависимы.

Рассмотрим простой случай: $R = B\omega^{-1}$, $B = \text{const}$. Для дальнейшего удобно представить B в виде $B = g\pi \operatorname{ctg} \mu\pi$, где μ — действительный параметр. Определим функцию ω^{-1} из интегрального уравнения

$$u - g \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{\omega'} \frac{du'}{u' - u} = \frac{1}{\omega} g\pi \operatorname{ctg} \mu\pi. \tag{3.1}$$

Здесь в интеграле, представляющем инвариант Римана R, осуществлен переход к переменной интегрирования u в предположении, что $u_\lambda \neq 0$ (а следовательно, и $\omega^{-1} \neq 0$) при $0 < \lambda < 1$. Уравнение (3.1) является линейным сингулярным интегральным уравнением относительно неизвестной ω^{-1}. В соответствии с общей теоремой сингулярных интегральных уравнений [12] решение (3.1) в классе функций, ограниченных в точке $u = u_0$ и не ограниченных в точке $u = u_1$, единственно. Применяя методы, развитые в [12], получим решение в виде (предполагая, что $0 < \mu < 1$)

$$\omega^{-1} = \sin \mu\pi (g\pi)^{-1}(u - \mu(u_1 - u_0))\left(\frac{u - u_0}{u_1 - u}\right)^{\mu}. \tag{3.2}$$

Инварианты Римана r_i вычисляются по формулам (1.11)

$$r_i = (k_i - \mu(u_1 - u_0))\left(\frac{u_0 - k_i}{u_1 - k_i}\right)^{\mu} \qquad (i = 1, 2). \tag{3.3}$$

Здесь k_i — характеристические скорости, удовлетворяющие уравнению (1.10) или, что эквивалентно, уравнению $\partial r/\partial k = 0$, где функция $r(k, u_1, u_0)$ определена формулой (3.3). Величины k_i являются корнями квадратного уравнения

$$k^2 - (u_1 + u_0 + \mu(u_1 - u_0))k + u_1 u_0 + \mu^2(u_1 - u_0)^2 = 0. \tag{3.4}$$

Решение типа простой волны можно найти, если положить

$$\omega^{-1} = f(\lambda), \quad r_1 = r_1^0, \quad k_2 = k(x, t), \tag{3.5}$$

где $k(x, t)$ — решение уравнения (1.13). В соответствии с предположениями, принятыми при построении решения (3.2), $f(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (0, 1)$, $f(0) = 0, f(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to 1$. При таком выборе функция $u(k, \lambda)$, определяемая из (3.5), удовлетворяет неравенствам

$$0 < u_0 \leqslant u \leqslant u_1 \leqslant \mu^{-1}(1 + \mu)u_0. \tag{3.6}$$

Введем безразмерные величины $K_i = 2k_i(u_{1m} - u_{0m})^{-1}$, $U_i = 2u_i(u_{1m} - u_{0m})^{-1}$, $R_i = 2r_i(u_{1m} - u_{0m})^{-1}$, где u_{1m}, u_{0m} — значения u_1 и u_0 при $h = h_m$.

Уравнение (3.4) имеет действительные корни

$$K_{1,2} = z\left[\gamma + \mu \mp \sqrt{1 + 2\gamma\mu}\right], \quad z = \frac{u_1 - u_0}{u_{1m} - u_{0m}}, \quad \gamma = \frac{u_1 + u_0}{u_1 - u_0}, \tag{3.7}$$

так как в силу (3.6) $\gamma > (1 + 2\mu)$. Соотношения

$$R_1 = (\gamma_m - \mu - \sqrt{1 + 2\gamma_m\mu})\left(\frac{\sqrt{1 + 2\gamma_m\mu} - 1 - \mu}{\sqrt{1 + 2\gamma_m\mu} + 1 - \mu}\right)^{\mu},$$

$$z = R_1(\gamma - \mu - \sqrt{1 + 2\gamma\mu})^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + 2\gamma\mu} + 1 - \mu}{\sqrt{1 + 2\gamma\mu} - 1 - \mu}\right)^{\mu},$$

$$K = K_2 = z(\gamma + \mu + \sqrt{1 + 2\gamma\mu}), \qquad U_1 = z(1 + \gamma), \quad U_0 = z(\gamma - 1)$$

определяют зависимости $U_1(K), U_0(K)$ в параметрической форме, при этом параметр γ изменяется на интервале $(1 + 2\mu, \infty), \gamma_m$ — фиксированное значение из этого интервала, соответствующее граничной характеристике $h = h_m$. Функция $H(k, \lambda)$ задается соотношением $H = u_\lambda \omega^{-1}$. Переход к переменной y определяется формулой $(y = h_m Y)$

$$Y = (h_m)^{-1}\int_{u_0}^{u} \omega^{-1} du = \frac{\sin \mu\pi}{\mu\pi}\frac{z^2}{\gamma_m - \mu}\left[(\gamma + 1 - 2\mu)B_s(1 + \mu, 1 - \mu) - 2B_s(1 + \mu, 2 - \mu)\right]$$

($B_s(p, q)$ — неполная β-функция, $s = (u - u_0)(u_1 - u_0)^{-1}$). Глубина слоя жидкости задается в виде $h = h_m z^2(\gamma - \mu)(\gamma_m - \mu)^{-1}$. Параметр γ_m связан с числом Фруда $\mathrm{Fr}_m = (u_{1m} - u_{0m})(gh_m)^{-1/2}$ соотношением $\mathrm{Fr}_m = \sqrt{2}(\mu(\gamma_m - \mu))^{-1/2}$.

На рис. 2 представлены графики изменения профиля скорости при изменении K в простой волне понижения уровня, при растекании сдвигового потока по сухому руслу

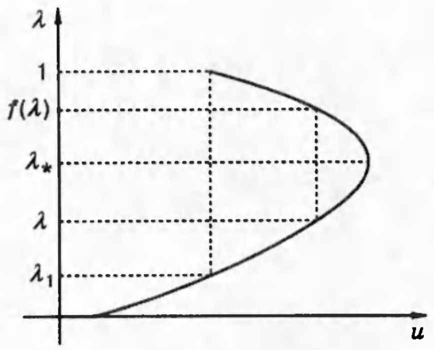

Рис. 1

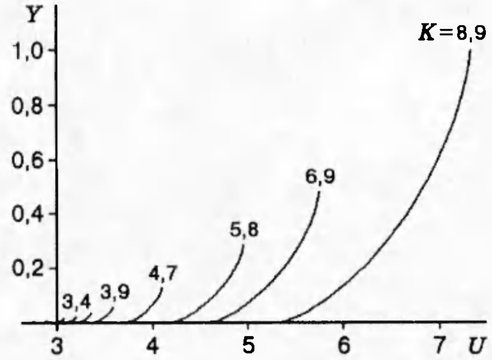

Рис. 2

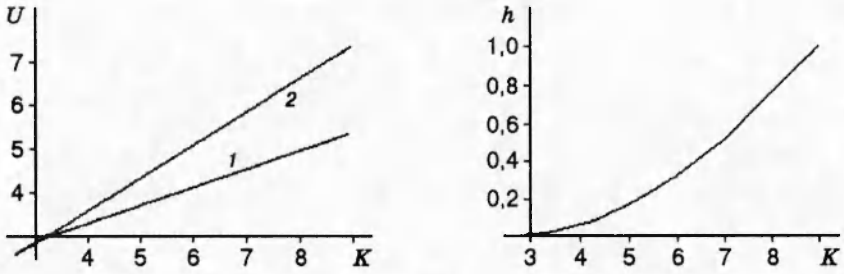

Рис. 3

($U = 2u(u_{1m} - u_{0m})^{-1}$), построенные для $\mu = 1/3, \mathrm{Fr}_m = 1$. Каждая кривая соответствует графику $\breve{U}$ при фиксированном значении K. На рис. 3 приведены графики скорости на дне и на свободной поверхности (линии *1* и *2*), а также график функции $h_m^{-1}h(K)$. Видно, что скорость потока по глубине выравнивается при $h \to 0$ и стремится к значению инварианта Римана r_1^0. Полученное точное решение, так же как и решение Фримана [2], выражается через неполные β-функции, но описывает другой класс течений.

В итоге установлено существование решений типа простых волн для системы уравнений (1.3). Отметим, что достаточные условия гиперболичности системы уравнений (1.3), полученные в [9], для случая несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$) можно сформулировать только в терминах инвариантов Римана R и ω. Так как эти инварианты сохраняются в простой волне, то она будет принадлежать области гиперболичности уравнений движения, если на сдвиговом потоке, к которому примыкает простая волна, система уравнений гиперболична. Условия сохранения инвариантов Римана в простой волне определяют ситуации, где такие течения возникают. Если по невозмущенному сдвиговому потоку движется фронт возмущения (характеристика дискретного спектра), то в некоторой области за этой характеристикой течение является простой волной. Это следует из того, что три инварианта Римана из четырех в области за фронтом будут теми же, что в сдвиговом набегающем потоке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00859).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Blythe P. A., Kazakia Y., Varley E.** The interaction of large amplitude shallow-water waves with an ambient flow // J. Fluid Mech. 1972. V. 56, N 2. P. 241–255.

2. **Freeman N. C.** Simple waves on shear flows: similarity solutions // Ibid. P. 257–263.
3. **Varley E., Blythe P. A.** Long eddies on sheared flows // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 103–187.
4. **Sachdev P. L., Varugheze Ph.** Exact simple waves in a compressible barotropic medium // Stud. Appl. Math. 1988. V. 79. P. 193–203.
5. **Benney D. J.** Some properties of long waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
6. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
7. **Teshukov V. M.** Long wave approximation for vortex free boundary flows // Numerical Methods for Free Boundary Problems. ISNM 99. Basel: Birkhauser Verl., 1991. P. 413–421.
8. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
9. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
10. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
11. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11–19.
12. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 24/XI 1995 г.