УДК 539.3
DOI: 10.15372/PMTF202215104

# ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, НА ГРАНИЧНЫХ ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ КОТОРЫХ ИМЕЮТСЯ ЗАКРЕПЛЕННЫЕ УЧАСТКИ

В. Н. Паймушин[*,**], В. М. Шишкин[***]

[*] Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева, Казань, Россия
[**] Казанский федеральный университет, Казань, Россия
[***] Вятский государственный университет, Киров, Россия
E-mails: vpajmushin@mail.ru, tism1@rambler.ru

На примере решения плоской задачи механики стержня-полосы, на одной из лицевых поверхностей которого имеется закрепленный участок конечной длины, показано, что при исследовании процессов деформирования при условии податливости закрепленного участка необходимо учитывать изменение напряженно-деформированного состояния и применяемых для его описания математических моделей. Такое изменение имеет место при переходе через границу между незакрепленным и закрепленным участками. В рамках классической модели Кирхгофа — Лява учет податливости закрепленного участка стержня невозможен, а при использовании простейшей уточненной сдвиговой модели Тимошенко такой учет возможен при закреплении участка стержня только на одной из лицевых поверхностей. Найдены точные аналитические решения двух простейших линейных задач о статическом поперечном изгибе плоского стержня с участками конечной длины, закрепленными на одной из лицевых поверхностей. Для моделирования незакрепленных и закрепленных на одной из лицевых поверхностей участков плоских стержней в рамках уточненной сдвиговой модели Тимошенко построены одномерные конечные элементы. Проведены численные эксперименты, показывающие необходимость учета изменения напряженно-деформированного состояния стержня при переходе через границу между незакрепленным и закрепленным участками.

Ключевые слова: плоский стержень, закрепленный участок, уточненная модель Тимошенко, поперечный изгиб

**Введение.** При исследовании деформирования тонкостенных элементов конструкций (в том числе плоских стержней) при различных вариантах закрепления и нагружения возможны пространственная постановка соответствующих задач и построение их численных решений на основе современных коммерческих пакетов прикладных программ, но при этом необходимы значительные вычислительные затраты, не оправданные при малой относительной толщине элементов конструкций. В связи с этим большое внимание уделяется проблемам редукции трехмерных уравнений механики деформирования к одномерным и двумерным уравнениям теории стержней, пластин и оболочек. Для тонкостенных элемен-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-19-00021) (пп. **1**–**5**) и в рамках Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета "Приоритет-2030" (п. **6**).

тов конструкций из композитных материалов такие уравнения построены с использованием классической теории (см., например, [1, 2]) и с учетом поперечных сдвигов и поперечного обжатия. Существует большое количество работ, в которых исследуются указанные проблемы, в частности работы, посвященные построению высокоточных геометрически линейных и нелинейных моделей деформирования тонкостенных элементов конструкций с учетом поперечных сдвигов и поперечного обжатия, а также разработке на их основе аналитических и численных методов решения соответствующих статических и динамических задач [3–11].

Критический анализ уравнений статики теорий изгибаемых композитных пластин, полученных в геометрически линейном приближении, проведен, например, в работах [12, 13]. В [12] представлен обзор методов приведения трехмерных уравнений механики тонкостенных конструкций к двумерным соотношениям. Выполнен подробный анализ уравнений статики двумерных задач для композитных пластин, полученных с использованием двух подходов: метода взвешенных невязок и вариационных принципов анизотропной теории упругости. Как известно, в механике композитных элементов конструкций поперечные сдвиги в тонкостенной конструкции в первом приближении учтены в теории Рейсснера — Миндлина [14–25], называемой в русскоязычной литературе простейшей уточненной теорией Тимошенко. Эта теория основана на линейной аппроксимации тангенциальных перемещений по поперечной координате, когда прогиб считается не зависящим от этой координаты.

Следует отметить, что во всех работах, посвященных разработке уточненных вариантов теории высокого порядка для тонкостенных элементов конструкций, практически не уделяется внимания проблемам формулировки граничных условий при различных вариантах соединения с другими элементами конструкций или закрепления на жестких опорных элементах. Например, постановка даже статических задач механики деформирования элементов конструкции (особенно выполненных из волокнистых композитных материалов) (рис. 1, 2) с формулировкой кинематических граничных условий защемления в концевых сечениях закрепленных участков может иметь недостаточную степень точности, если не учитывать деформируемость закрепленных участков конечной длины $l$. В частности, при постановке задач механики стержней длиной $a$ реальные условия закрепления их конце-

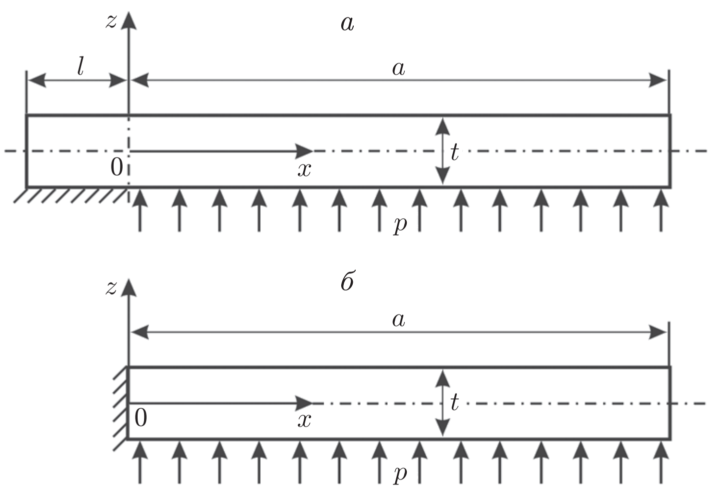


Рис. 1. Схемы консольного закрепления стержня при плоском изгибе:
$a$ — закрепление концевого участка граничной плоскости $z = -t/2$, $б$ — защемление торца

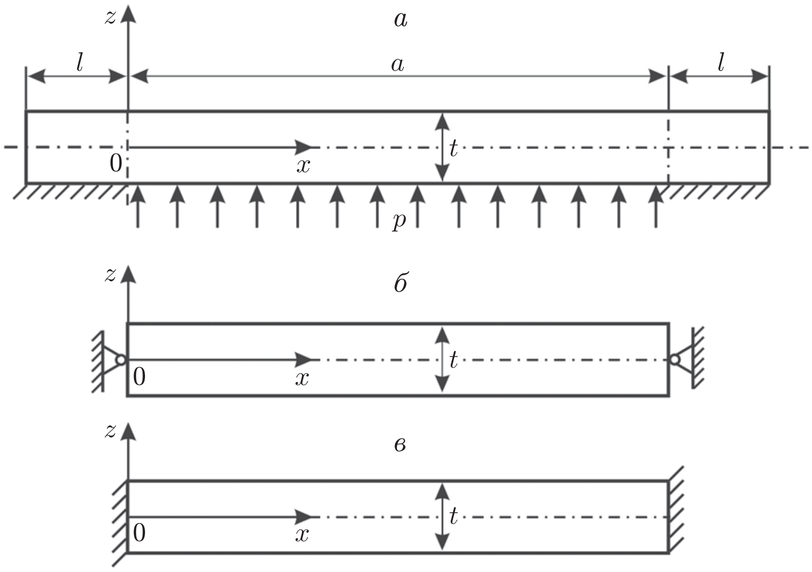


Рис. 2. Схемы закрепления стержня при плоском изгибе:
*а* — закрепление концевых участков граничной плоскости $z = -t/2$, *б* — шарнирное закрепление торца, *в* — защемление торца

вых участков длиной $l$ (см. рис. 1,*а*, 2,*а*), как правило, заменяются условиями шарнирного опирания (см. рис. 2,*б*) или защемления (см. рис. 1,*б*, 2,*в*), что, безусловно, вносит погрешности в решения.

**1. Основные соотношения.** Простейшая модель деформирования плоского стержня с закрепленным участком конечной длины $l$ на поверхности $z = -t/2$ (см. рис. 1,*а*) может быть построена на основе сдвиговой модели Тимошенко путем представления перемещений $U$ и $W$ произвольной точки поперечного сечения в виде

$$\begin{gathered} U = u + z\gamma, \quad W = w, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \\ U_0 = u_0 + z\gamma_0, \quad W_0 = w_0 = 0, \quad -l \leqslant x \leqslant 0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

На функции $u_0$, $\gamma_0$ наложено кинематическое ограничение

$$\gamma_0 = 2u_0/t, \qquad -l \leqslant x \leqslant 0. \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2) $u_0$, $w_0$, $\gamma_0$ и $u$, $w$, $\gamma$ — осевое перемещение, прогиб и угол поворота поперечного сечения закрепленного и незакрепленного участков стержня соответственно. Данное ограничение следует из условия $U_0|_{z=-t/2} = 0$, формулируемого на закрепленном участке длиной $l$. При этом, приравнивая в условии непрерывности перемещений $U$ и $U_0$ в сечении $x = 0$, формулируемом в виде $U|_{x=0} = U_0|_{x=0}$, коэффициенты при одинаковых степенях $z$, получаем равенства

$$\gamma = 2u_0/t, \quad u = u_0, \quad x = 0. \tag{1.3}$$

Заметим, что при замене модели (1.1) на классическую модель Кирхгофа — Лява $U = u - zw'$, $W = w$ в случае закрепления любой из поверхностей $z = \pm t/2$ на участке $-l \leqslant x \leqslant 0$ в сечении $x = 0$ можно сформулировать только условие защемления $w|_{x=0} = 0$, $w'|_{x=0} = 0$ (штрих означает дифференцирование соответствующей величины по координате $x$), что не позволяет учесть податливость закрепленного участка стержня.

В соответствии с (1.1), (1.2) в случае малых перемещений имеют место геометрические зависимости

$$\varepsilon_x = u' + z\gamma', \quad \gamma_{xz} = w' + \gamma, \quad 0 \leqslant x \leqslant a; \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_x^0 = U_{0,x} = (1 + 2z/t)u_0', \quad \gamma_{xz}^0 = U_{0,z} + W_{0,x} = 2u_0/t, \quad -l \leqslant x \leqslant 0, \tag{1.5}$$

где $\varepsilon_x$, $\gamma_{xz}$ и $\varepsilon_x^0$, $\gamma_{xz}^0$ — деформация и угол поперечного сдвига незакрепленного и закрепленного участков стержня соответственно; нижние индексы после запятой соответствуют частным производным по $x$ и $z$. Для формирующихся в стержне нормальных и касательных напряжений $\sigma_x$, $\sigma_{xz}$ имеют место физические зависимости

$$\sigma_x = E_1(u' + z\gamma'), \quad \sigma_{xz} = G_{13}(w' + \gamma), \quad 0 \leqslant x \leqslant a; \tag{1.6}$$

$$\sigma_x^0 = (1 + 2z/t)E_1u_0', \quad \sigma_{xz}^0 = 2G_{13}u_0/t, \quad -l \leqslant x \leqslant 0 \tag{1.7}$$

($E_1$, $G_{13}$ — модули упругости материала при деформировании его вдоль оси стержня и при поперечном сдвиге соответственно).

В случае действия поперечной нагрузки $p$ с использованием зависимостей (1.4), (1.5) можно составить вариационное уравнение Лагранжа

$$\delta\Pi_0 + \delta\Pi - \delta A = \int\limits_{-l}^{0}\int\limits_{-t/2}^{t/2} [\sigma_x^0(1 + 2z/t)\,\delta u_0' + 2\sigma_{xz}^0\,\delta u_0/t]\,dz\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{a}\int\limits_{-t/2}^{t/2} [\sigma_x(\delta u' + z\,\delta\gamma') + \sigma_{xz}(\delta w' + \delta\gamma)]\,dz\,dx - \int\limits_{0}^{a} p\,\delta w\,dx =$$

$$= \int\limits_{-l}^{0} (T_{11}^0\,\delta u_0' + T_{13}^0\,\delta u_0)\,dx + \int\limits_{0}^{a} [T_{11}\,\delta u' + M_{11}\,\delta\gamma' + T_{13}(\delta w' + \delta\gamma) - p\,\delta w]\,dx = 0, \tag{1.8}$$

где в силу зависимостей (1.6), (1.7)

$$T_{11}^0 = \int\limits_{-t/2}^{t/2} \sigma_x^0(1 + 2z/t)\,dz = \frac{4E_1tu_0'}{3}, \qquad T_{13}^0 = \frac{4G_{13}u_0}{t}; \tag{1.9}$$

$$T_{11} = E_1tu', \quad M_{11} = D\gamma', \quad T_{13} = G_{13}t(w' + \gamma), \quad D = E_1t^3/12. \tag{1.10}$$

С учетом условий (1.3), (1.5) уравнение (1.8) преобразуется к виду

$$(T_{11}^0 - T_{11} - 2M_{11}/t)\,\delta u_0\Big|_{x=0} - T_{11}^0\,\delta u_0\Big|_{x=-l} + (T_{11}\,\delta u + M_{11}\,\delta\gamma)\Big|_{x=a} + T_{13}\,\delta w\Big|_{x=0}^{x=a} -$$

$$- \int\limits_{-l}^{0} (T_{11,x}^0 - T_{13}^0)\,\delta u_0\,dx - \int\limits_{0}^{a} [T_{11,x}\,\delta u + (M_{11,x} - T_{13})\,\delta\gamma + (T_{13,x} + p)\,\delta w] = 0,$$

откуда следуют уравнения равновесия

$$T_{11,x}^0 - T_{13}^0 = 0, \qquad -l \leqslant x \leqslant 0; \tag{1.11}$$

$$T_{11,x} = 0, \quad M_{11,x} - T_{13} = 0, \quad T_{13,x} + p = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{1.12}$$

и граничные условия

$$\begin{gathered} \delta u_0 \neq 0\colon \quad T_{11}^0\Big|_{x=-l} = 0, \\ \delta u \neq 0\colon \quad T_{11}\Big|_{x=a} = 0, \qquad \delta\gamma \neq 0\colon \quad M_{11}\Big|_{x=a} = 0, \qquad \delta w \neq 0\colon \quad T_{13}\Big|_{x=a} = 0, \end{gathered} \tag{1.13}$$

а в сечении $x = 0$ в дополнение к кинематическим условиям сопряжения участков (1.3) в силу $\delta u_0 \neq 0$ формулируется статическое условие сопряжения участков стержня

$$(T^0_{11} - T_{11} - 2M_{11}/t)\big|_{x=0} = 0. \tag{1.14}$$

**2. Соотношения классической модели Кирхгофа — Лява для незакрепленного участка стержня.** Наиболее простые уравнения, описывающие процесс деформирования стержня-полосы с закрепленным участком $-l \leqslant x \leqslant 0$ лицевой поверхности $z = -t/2$, могут быть получены на основе представлений

$$U_0 = (1 + 2z/t)u_0, \quad W_0 = 0, \quad -l \leqslant x \leqslant 0; \tag{2.1}$$

$$U = u - zw', \quad W = w, \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{2.2}$$

(соотношения (2.2) соответствуют классической модели Кирхгофа — Лява). Добавляя к соотношениям (2.1), (2.2) условия сопряжения по перемещениям $U_0|_{x=0} = U|_{x=0}$ в сечении $x = 0$, вместо (1.3) получаем зависимости

$$x = 0\colon \quad u = u_0, \quad w' = -2u_0/t. \tag{2.3}$$

В рассматриваемом приближении вместо (1.8) имеем вариационное уравнение

$$\int\limits_{-l}^{0} (T^0_{11}\,\delta u'_0 + T^0_{13}\,\delta u_0)\,dx + \int\limits_0^a (T_{11}\,\delta u' - M_{11}\,\delta w'' - p\,\delta w)\,dx = 0, \tag{2.4}$$

в котором в отличие от (1.10)

$$M_{11} = -Dw'', \qquad D = E_1 t^3/12. \tag{2.5}$$

С учетом (2.3) уравнение (2.4) после стандартных преобразований приводится к виду

$$\begin{gathered}(T^0_{11} - T_{11} - 2M_{11}/t)\,\delta u_0\big|_{x=0} - T^0_{11}\,\delta u_0\big|_{x=-l} + (T_{11}\,\delta u - M_{11}\,\delta w')\big|_{x=a} + \\ + M_{11,x}\,\delta w\big|_{x=a} - M_{11,x}\,\delta w\big|_{x=0} - \int\limits_{-l}^{0} (T^0_{11,x} - T^0_{13})\,\delta u_0\,dx - \\ - \int\limits_0^a [T_{11,x}\,\delta u + (M_{11,xx} + p)\,\delta w]\,dx = 0.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Из (2.6) следуют уравнение равновесия (1.11) закрепленного участка стержня с соответствующими граничными условиями (1.13), а также уравнения равновесия его незакрепленного участка

$$T_{11,x} = 0, \quad M_{11,xx} + p = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a$$

с граничными условиями

$$\delta u \neq 0\colon \quad T_{11}\big|_{x=a} = 0, \qquad \delta w' \neq 0\colon \quad M_{11}\big|_{x=a} = 0,$$
$$\delta w \neq 0\colon \quad M_{11,x}\big|_{x=a} = 0.$$

В сечении $x = 0$ в силу $\delta u_0 \neq 0$ в дополнение к кинематическим условиям сопряжения (2.3) формулируется статическое условие сопряжения участков (1.14), в котором $M_{11}$ определяется по формуле (2.5).

**3. Построение аналитических решений простейших задач.** На основе уравнений (1.11), (1.12) построим решения двух простейших задач.

3.1. *Изгиб консольно закрепленного плоского стержня поперечной нагрузкой* $p =$ const *(см. рис. 1,а)*. Путем интегрирования уравнений (1.12) с граничными условиями $u(0) = w(0) = \gamma(0) = 0$, $T_{11}(a) = T_{13}(a) = M_{11}(a) = 0$, формулируемыми для схемы закрепления, представленной на рис. 1,*б*, получаем решение

$$T_{11} \equiv 0, \quad T_{13} = (a-x)p, \quad M_{11} = -(a-x)^2 p/2;$$

$$\begin{gathered} u = 0, \qquad \gamma = -\Big(a^2 x - a x^2 + \frac{x^3}{3}\Big)\frac{p}{2D}, \\ w = \Big(ax - \frac{x^2}{2}\Big)\frac{p}{G_{13} t} + \Big(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{a x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\Big)\frac{p}{2D}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Для стержня с закрепленным участком (см. рис. 1,*а*) при использовании (1.9) уравнение (1.11) приводится к виду

$$u_0'' - k^2 u_0 = 0, \qquad -l \leqslant x \leqslant 0, \tag{3.2}$$

где $k^2 = 3G_{13}/(E_1 t^2)$. Общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$u_0 = c_1 \,\mathrm{e}^{kx} + c_2 \,\mathrm{e}^{-kx},$$

где $c_1$, $c_2$ — постоянные интегрирования. Добавляя к данному решению условие (1.13), получаем

$$c_1 = c_2 \,\mathrm{e}^{2kl}, \quad u_0 = c_2(\mathrm{e}^{k(2l+x)} + \mathrm{e}^{-kx}), \quad u_0\big|_{x=0} = c_2(1 + \mathrm{e}^{2kl}). \tag{3.3}$$

Интегралы уравнений равновесия (1.12) в рассматриваемом случае, в отличие от решений (3.1), имеют вид

$$\begin{gathered} u = d_1, \qquad \gamma = d_2 - \Big(a^2 x - a x^2 + \frac{x^3}{3}\Big)\frac{p}{2D}, \\ w = \Big(ax - \frac{x^2}{2}\Big)\frac{p}{G_{13} t} - d_2 x + \Big(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{a x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\Big)\frac{p}{2D}, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где учтено, что $w|_{x=0} = 0$, и в дополнение к $c_1$, $c_2$ введены постоянные интегрирования $d_1$, $d_2$.

С использованием полученных соотношений (1.9), (1.10), (3.3), (3.4) запишем условия сопряжения (1.3), (1.14):

$$d_1 = (1 + \mathrm{e}^{2kl})c_2, \quad d_2 = \frac{2}{t}\,(1 + \mathrm{e}^{2kl})c_2, \quad -2E_1 t k(1 - \mathrm{e}^{2kl})c_2 + \frac{3a^2}{2t}\,p = 0,$$

из которых следует

$$c_2 = \frac{3a^2}{4E_1 t^2 k(1 - \mathrm{e}^{2kl})}\,p, \quad d_1 = \frac{3a^2(1 + \mathrm{e}^{2kl})}{4E_1 t^2 k(1 - \mathrm{e}^{2kl})}\,p, \quad d_2 = \frac{3a^2(1 + \mathrm{e}^{2kl})}{2E_1 t^3 k(1 - \mathrm{e}^{2kl})}\,p. \tag{3.5}$$

Таким образом, в соответствии с (1.7), (3.3), (3.5) для определения компонент напряжений $\sigma_x^0$, $\sigma_{xz}^0$ на закрепленном участке получаем формулы

$$\sigma_x^0 = \Big(1 + \frac{2z}{t}\Big)E_1 c_2 k(\mathrm{e}^{k(x+2l)} - \mathrm{e}^{-kx}) = \Big(1 + \frac{2z}{t}\Big)\frac{3a^2}{4t^2}\,\frac{\mathrm{e}^{k(x+2l)} - \mathrm{e}^{-kx}}{1 - \mathrm{e}^{2kl}}\,p,$$

$$\sigma_{xz}^0 = \frac{2G_{13}}{t}\,c_2(\mathrm{e}^{k(x+2l)} + \mathrm{e}^{-kx}) = \frac{a^2}{2t^2}\sqrt{\frac{3G_{13}}{E_1}}\,\frac{\mathrm{e}^{k(x+2l)} + \mathrm{e}^{-kx}}{1 - \mathrm{e}^{2kl}}\,p.$$

3.2. *Изгиб плоского стержня (см. рис. 2,а) поперечной нагрузкой* $p = \mathrm{const}$. В силу симметрии решение строится для левой половины стержня. При этом для уравнений (1.12) в сечении $x = a/2$ должны быть сформулированы граничные условия

$$u(a/2) = 0, \qquad \gamma(a/2) = 0, \qquad T_{13}(a/2) = 0,$$

а для функции $w$ в сечении $x = 0$ — условие $w(0) = 0$. В силу этих условий из (1.12) с учетом (1.10) следуют интегралы

$$u = \Big(x - \frac{a}{2}\Big)\frac{\tilde{c}_1}{E_1 t}, \quad T_{11} = \tilde{c}_1, \quad T_{13} = \Big(\frac{a}{2} - x\Big)p, \quad M_{11} = m + \Big(\frac{a}{2}\,x - \frac{x^2}{2}\Big)p,$$
$$\gamma = -\frac{1}{D}\Big[\Big(\frac{a}{2} - x\Big)m + \Big(\frac{a^3}{24} - \frac{ax^2}{4} + \frac{x^3}{6}\Big)p\Big], \tag{3.6}$$
$$w = \frac{1}{G_{13}t}\Big(\frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2}\Big)p + \frac{1}{D}\Big[\Big(\frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2}\Big)m + \Big(\frac{a^3x}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{x^4}{24}\Big)p\Big].$$

Здесь $\tilde{c}_1$, $m$ — постоянные интегрирования. Из (3.6) получаем зависимости

$$u\big|_{x=0} = -\frac{a}{2E_1 t}\,\tilde{c}_1, \quad T_{11}\big|_{x=0} = \tilde{c}_1, \quad M_{11}\big|_{x=0} = m, \quad \gamma\big|_{x=0} = -\frac{a}{2D}\,m - \frac{a^3}{24D}\,p,$$

при использовании которых, а также соотношений (1.9), (3.3) условия (1.3), (1.14) сводятся к системе трех алгебраических уравнений

$$a_{11}\tilde{c}_1 + a_{12}c_2 = 0, \quad a_{22}c_2 + a_{23}m = b_2 p, \quad \tilde{c}_1 + a_{32}c_2 + a_{33}m = 0, \tag{3.7}$$

где

$$a_{11} = \frac{a}{2E_1 t}, \quad a_{12} = 1 + \mathrm{e}^{2kl}, \quad a_{22} = \frac{2}{t}\,(1 + \mathrm{e}^{2kl}), \quad a_{23} = \frac{a}{2D},$$
$$b_2 = -\frac{a^3}{24D}, \quad a_{32} = \frac{4E_1 t}{3}\,k(1 - \mathrm{e}^{2kl}), \quad a_{33} = \frac{2}{t}.$$

Решая систему уравнений (3.7), для определения неизвестных $\tilde{c}_1$, $c_2$, $m$ получаем формулы

$$m = \frac{b_2(a_{11}a_{32} - a_{12})}{a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}) - a_{22}a_{33}a_{11}}\,p, \quad c_2 = -\frac{a_{33}a_{11}}{a_{11}a_{32} - a_{12}}\,m, \quad \tilde{c}_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\,c_2,$$

позволяющие по зависимостям (3.6), (3.3), (1.9), (1.10) определять параметры напряженно-деформированного состояния на нагруженном и закрепленных участках стержня.

**4. Конечно-элементные модели.** Ниже строятся конечно-элементные модели деформирования стержней, показанных на рис. 1, 2.

4.1. *Конечные элементы для моделирования закрепленных и незакрепленных участков стержня.* Простейший конечный элемент для представления закрепленных участков конечной длины с неподвижной поверхностью $z = -t/2$ (рис. 3,а) может быть построен в рамках модели Тимошенко на основе представления перемещений $U_0$ и $W_0$ произвольной точки элемента в виде

$$U_0 = u_0 + z\gamma_0, \qquad W_0 = w_0 = 0$$

при условии $\gamma_0 = 2u_0/t$ ($\gamma_0$ — угол поворота поперечного сечения элемента), которое следует из условия $U_0|_{z=-t/2} = 0$. Узловые перемещения элемента определяются вектором $\boldsymbol{r}_0^{(e)} = \{u_0^{(1)},\, u_0^{(2)}\}$. Материал элемента считается ортотропным с модулями упругости $E_1$, $G_{13}$ в направлении оси $x$ и при поперечном сдвиге соответственно.

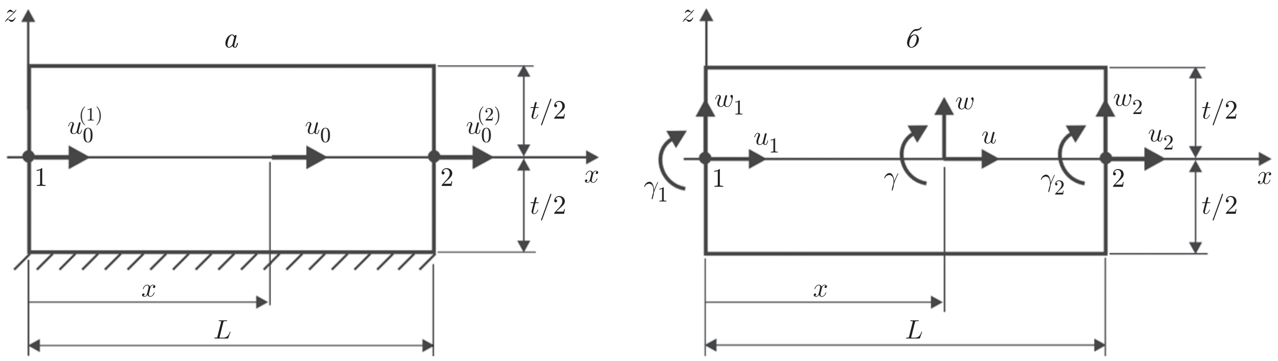


Рис. 3. Конечные элементы для моделирования закрепленных (*а*) и незакрепленных (*б*) участков стержня

Перемещение $u_0$ в пределах элемента представляется зависимостью

$$u_0 = \{N_1, N_2\}\boldsymbol{r}_0^{(e)}, \quad N_1 = 1 - \xi, \quad N_2 = \xi, \quad \xi = x/L. \tag{4.1}$$

В случае малых перемещений $u_0$ и условия $W_0 = w_0 = 0$ имеют место кинематические соотношения

$$\varepsilon_x^0 = U_0' = \Big(1 + \frac{2z}{t}\Big)u_0', \qquad \gamma_{xz}^0 = \gamma_0 = \frac{2u_0}{t}, \tag{4.2}$$

где $\varepsilon_x^0$, $\gamma_{xz}^0$ — деформация на расстоянии $z$ от продольной оси элемента и угол сдвига соответственно. Для формирующихся в элементе нормальных и касательных напряжений $\sigma_x^0$, $\sigma_{xz}^0$ справедливы физические зависимости

$$\sigma_x^0 = \Big(1 + \frac{2z}{t}\Big)E_1 u_0', \qquad \sigma_{xz}^0 = \frac{2u_0}{t}\,G_{13}. \tag{4.3}$$

С учетом (4.1) соотношения (4.2), (4.3) принимают вид

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x^0 = \Big(1 + \frac{2z}{t}\Big)\begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix}^{\mathrm{т}} \boldsymbol{r}_0^{(e)}, \qquad \gamma_{xz}^0 = \frac{2}{t}\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{т}} \boldsymbol{r}_0^{(e)},
\\
\sigma_x^0 = E_1\Big(1 + \frac{2z}{t}\Big)\begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix}^{\mathrm{т}} \boldsymbol{r}_0^{(e)}, \qquad \sigma_{xz}^0 = \frac{2G_{13}}{t}\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{т}} \boldsymbol{r}_0^{(e)}.
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Запишем выражение для потенциальной энергии деформации конечного элемента:

$$\Pi_0^{(e)} = \frac{1}{2}\,b\int\limits_0^L \int\limits_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^0\varepsilon_x^0 + \sigma_{xz}^0\gamma_{xz}^0)\,dz\,dx.$$

Здесь $b$ — ширина элемента. С учетом (4.4) выражение для величины $\Pi_0^{(e)}$ можно представить в виде

$$\Pi_0^{(e)} = \frac{1}{2}\,b(\boldsymbol{r}_0^{(e)})^{\mathrm{т}} \int\limits_0^L \int\limits_{-t/2}^{t/2} \Big[E_1\Big(1 + \frac{2z}{t}\Big)^2 \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix}^{\mathrm{т}} +
\\
+ \frac{4G_{13}}{t^2}\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{т}}\Big]\,dz\,dx\,\boldsymbol{r}_0^{(e)}.$$

В результате интегрирования по переменным $z$, $x$ получаем

$$\Pi_0^{(e)} = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{r}_0^{(e)})^{\mathrm{T}} K_0^{(e)} \boldsymbol{r}_0^{(e)},$$

где

$$K_0^{(e)} = \frac{4}{3}\,\frac{E_1 bt}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\,\frac{G_{13} bL}{t}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ —}$$

матрица жесткости конечного элемента для моделирования закрепленных участков стержня.

Для представления незакрепленных участков стержня используется конечный элемент с шестью степенями свободы (рис. 3,*б*), построенный на основе сдвиговой модели Тимошенко. Узловые перемещения элемента определяются вектором $\boldsymbol{r}^{(e)} = \{u_1, w_1, \gamma_1, u_2, w_2, \gamma_2\}$. Осевое перемещение $u$ в пределах элемента аппроксимируется зависимостью

$$u = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}^{(e)}, \tag{4.5}$$

где $\boldsymbol{N} = \{N_1, 0, 0, N_2, 0, 0\}$; $N_1 = 1 - \xi$; $N_2 = \xi$; $\xi = x/L$. Прогиб $w$ и угол поворота $\gamma$ поперечного сечения представляются зависимостями

$$w = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}^{(e)}, \qquad \gamma = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}^{(e)} \tag{4.6}$$

с векторами $\boldsymbol{H} = \{0, H_1, H_2, 0, H_3, H_4\}$, $\boldsymbol{S} = \{0, S_1, S_2, 0, S_3, S_4\}$, где $H_j$, $S_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ — базисные функции, имеющие вид [24, 25]

$$\begin{gathered}
H_1 = (1 - \xi)(\mu\xi - 2\mu\xi^2 + 1), \qquad H_2 = -0{,}5L\xi(1 - \xi)(\mu - 2\mu\xi + 1), \\
H_3 = \xi(3\mu\xi - 2\mu\xi^2 - \mu + 1), \qquad H_4 = 0{,}5L\xi(1 - \xi)(-\mu + 2\mu\xi + 1), \\
S_1 = 6\mu\xi(1 - \xi)/L, \qquad S_2 = -(1 - \xi)(3\mu\xi - 1), \\
S_3 = -6\mu\xi(1 - \xi)/L, \qquad S_4 = \xi(3\mu\xi - 3\mu + 1), \\
\mu = \frac{1}{1 + 12D/(B_{13}L^2)}, \qquad D = \frac{E_1 t^3}{12}, \qquad B_{13} = G_{13} t.
\end{gathered}$$

Для деформации $\varepsilon_x$, угла сдвига $\gamma_{xz}$ и напряжений $\sigma_x$, $\sigma_{xz}$ имеют место соотношения

$$\varepsilon_x = u' + z\gamma', \quad \gamma_{xz} = w' + \gamma, \quad \sigma_x = E_1(u' + z\gamma'), \quad \sigma_{xz} = G_{13}(w' + \gamma). \tag{4.7}$$

Подставляя в (4.7) представления (4.5), (4.6), получаем

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x = [\boldsymbol{N}'^{\mathrm{T}} + z\boldsymbol{S}'^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{r}^{(e)}, \qquad \gamma_{xz} = [\boldsymbol{H}'^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{r}^{(e)}, \\
\sigma_x = E_1[\boldsymbol{N}'^{\mathrm{T}} + z\boldsymbol{S}'^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{r}^{(e)}, \qquad \sigma_{xz} = G_{13}[\boldsymbol{H}'^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{r}^{(e)}.
\end{gathered} \tag{4.8}$$

Запишем выражение для потенциальной энергии деформации конечного элемента:

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2}\,b\int\limits_0^L \int\limits_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_{xy}\gamma_{xy})\,dz\,dx.$$

С учетом зависимостей (4.8) имеем

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{(e)})^{\text{т}} \int\limits_0^L \int\limits_{-t/2}^{t/2} E_1 b(\boldsymbol{N}' + z\boldsymbol{S}')(\boldsymbol{N}'^{\text{т}} + z\boldsymbol{S}'^{\text{т}})\,dz\,dx\,\boldsymbol{r}^{(e)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{r}^{(e)})^{\text{т}} \int\limits_0^L \int\limits_{-t/2}^{t/2} G_{13} b(\boldsymbol{H}' + \boldsymbol{S})(\boldsymbol{H}'^{\text{т}} + \boldsymbol{S}^{\text{т}})\,dz\,dx\,\boldsymbol{r}^{(e)}. \qquad (4.9)$$

Вычислив определенные интегралы по переменной $z$, выражение (4.9) можно записать в виде

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{r}^{(e)})^{\text{т}}(K_1^{(e)} + K_2^{(e)} + K_3^{(e)})\,\boldsymbol{r}^{(e)},$$

где $K_1^{(e)}$, $K_2^{(e)}$, $K_3^{(e)}$ — составляющие полной матрицы жесткости $K^{(e)}$ незакрепленного конечного элемента, определяющие упругое сопротивление его соответственно осевому растяжению-сжатию, изгибу и поперечному сдвигу:

$$K_1^{(e)} = E_1 bt \int\limits_0^L \boldsymbol{N}'\boldsymbol{N}'^{\text{т}}\,dx, \qquad K_2^{(e)} = Db \int\limits_0^L \boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}'^{\text{т}}\,dx,$$

$$K_3^{(e)} = G_{13} bt \int\limits_0^L [\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}'^{\text{т}} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\text{т}} + \boldsymbol{H}'\boldsymbol{S}^{\text{т}} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{H}'^{\text{т}}]\,dx. \qquad (4.10)$$

После вычисления в (4.10) производных $\boldsymbol{N}'$, $\boldsymbol{S}'$, $\boldsymbol{H}'$ и определенных интегралов окончательно получаем матрицу жесткости $K^{(e)} = K_1^{(e)} + K_2^{(e)} + K_3^{(e)}$, где

$$K_1^{(e)} = \frac{E_1 bt}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_2^{(e)} = \frac{Db\mu^2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12/L^2 & -6/L & 0 & -12/L^2 & -6/L \\ 0 & -6/L & 3 + 1/\mu^2 & 0 & 6/L & 3 - 1/\mu^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12/L^2 & 6/L & 0 & 12/L^3 & 6/L \\ 0 & -6/L & 3 - 1/\mu^2 & 0 & 6/L & 3 + 1/\mu^2 \end{bmatrix},$$

$$K_3^{(e)} = \frac{G_{13} bt}{4L}\,(1 - \mu)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2L & 0 & -4 & -2L \\ 0 & -2L & L^2 & 0 & 2L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2L & 0 & 4 & 2L \\ 0 & -2L & L^2 & 0 & 2L & L^2 \end{bmatrix}.$$

Определим вектор внешних узловых сил $\boldsymbol{P}^{(e)}$ незакрепленного конечного элемента, создаваемых поверхностной нагрузкой $p$, которую в пределах элемента будем считать постоянной. Данный вектор можно найти из условия равенства работ узловых сил $\boldsymbol{P}^{(e)}$ и нагрузки $p$ на перемещениях $\boldsymbol{r}^{(e)}$ в пределах конечного элемента:

$$\boldsymbol{P}^{(e)\mathrm{т}}\boldsymbol{r}^{(e)} = bp\int\limits_0^L w\,dx = bp\int\limits_0^L \boldsymbol{H}^{\mathrm{т}}\,dx\,\boldsymbol{r}^{(e)}.$$

Отсюда следует

$$\boldsymbol{P}^{(e)} = bp\int\limits_0^L \boldsymbol{H}\,dx = bpL\int\limits_0^1 \boldsymbol{H}\,d\xi.$$

Вычислив определенный интеграл, получаем

$$\boldsymbol{P}^{(e)} = \frac{pbL}{12}\,\{0, 6, -L, 0, 6, L\}.$$

Систему уравнений статического равновесия конечного элемента для моделирования незакрепленных участков стержня можно записать в виде

$$K^{(e)}\boldsymbol{r}^{(e)} = \boldsymbol{P}^{(e)}. \tag{4.11}$$

4.2. *Моделирование условий кинематического сопряжения закрепленных и незакрепленных участков стержня.* Вектор узловых перемещений $\boldsymbol{r}$ конечно-элементной модели стержня с закрепленными участками конечной длины на одной из лицевых поверхностей находится из системы разрешающих уравнений

$$K\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P}, \tag{4.12}$$

где $K$, $\boldsymbol{P}$ — матрица жесткости и вектор внешних узловых сил соответственно. Матрица $K$ формируется методом прямой жесткости [26, 27], при этом матрицы жесткости $K^{(e)}$ конечных элементов объединяются по направлениям их общих узловых перемещений. Вектор $\boldsymbol{P}$ получается по тому же правилу. Однако при получении системы (4.12) должны быть выполнены кинематические условия сопряжения закрепленных и незакрепленных участков стержня с учетом различного количества узловых перемещений конечных элементов и различного расположения их по толщине стержня на границах между этими участками.

Рассмотрим стержень с закрепленным концевым участком длиной $l$ на поверхности $z = -t/2$ (см. рис. 1,$a$). В сечении $x = 0$ должны быть выполнены кинематические условия сопряжения

$$u_0\big|_{x=0} = u\big|_{x=0}, \qquad w\big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{2u_0}{t}\Big|_{x=0} = \gamma\big|_{x=0}. \tag{4.13}$$

Первое условие в (4.13) выполняется автоматически, поскольку для элементов, расположенных непосредственно слева и справа от сечения $x = 0$, узловые перемещения $u_0|_{x=0}$ и $u|_{x=0}$ являются общими. Второе условие выполняется, если коэффициенты жесткости $k_{ii}$ умножить на параметр штрафа $\alpha = 10^8 \div 10^{10}$ (правило Пейна — Айронса [28]). В результате $i$-е уравнение системы (4.12) имеет вид

$$k_{i1}r_1 + k_{i2}r_2 + \ldots + k_{ii}\alpha r_i + \ldots + k_{in}r_n = P_i.$$

Пренебрегая в этом уравнении всеми слагаемыми, кроме $k_{ii}\alpha r_i$, получаем

$$r_i = P_i/(k_{ii}\alpha) \approx 0.$$

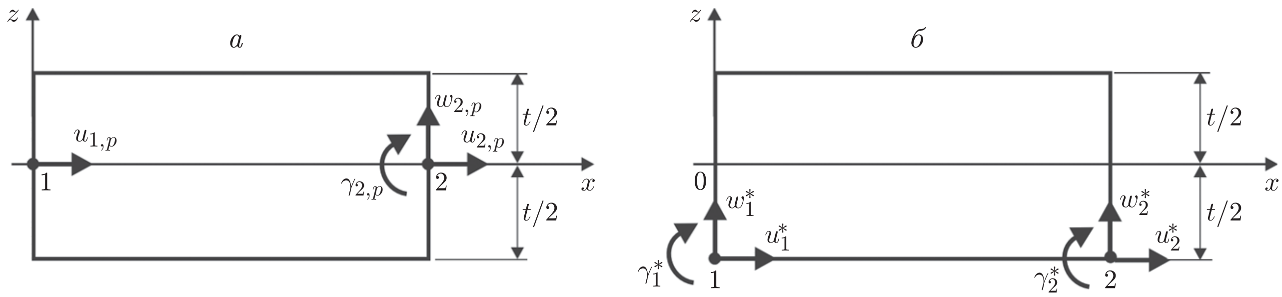


Рис. 4. Переходный (*а*) и модифицированный (*б*) конечные элементы

Третье условие в (4.13) необходимо для исключения поворота незакрепленного участка стержня как абсолютно твердого тела относительно сечения $x = 0$. Данное условие выполняется, если с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа [29] систему (4.12) дополнить уравнением связи

$$2u_0\big|_{x=0} - t\gamma\big|_{x=0} = 0. \qquad (4.14)$$

Для этого к матрице $K$ добавляются строка и столбец с элементами 2 и $-t$ в ячейках с номерами, соответствующими номерам узловых параметров $u_0|_{x=0}$ и $\gamma|_{x=0}$ в конечноэлементной модели стержня. Вектор $\boldsymbol{r}$ дополняется неопределенным множителем Лагранжа $\lambda$, а вектор нагрузки $\boldsymbol{P}$ дополняется нулем. Таким образом, получаем расширенную систему уравнений $K_+\boldsymbol{r}_+ = \boldsymbol{P}_+$, порядок которой на единицу превышает порядок исходной системы уравнений (4.12). При этом матрица $K_+$ получается симметричной, но не имеет характерной при расчете протяженных конструкций ленточной структуры, что не позволяет использовать эффективные методы формирования и решения систем линейных алгебраических уравнений, применяемые для ленточных матриц [30].

Второй способ кинематического сопряжения закрепленных и незакрепленных участков стержня может состоять во введении между ними специального переходного конечного элемента (рис. 4,*а*), расположенного непосредственно справа от сечения $x = 0$ (см. рис. 1,*а*), с вектором узловых перемещений $\boldsymbol{r}_p^{(e)} = \{u_{1,p}, u_{2,p}, w_{2,p}, \gamma_{2,p}\}$. При этом выполнение первого условия в (4.13) обеспечивается непосредственно при автоматизированной сборке системы (4.12), поскольку, как отмечено выше, осевые перемещения в сечении $x = 0$ для сопрягаемых элементов являются общими. Выполнение второго условия в (4.13) обеспечивается за счет отсутствия прогибов $w$ на закрепленном участке стержня (в том числе в сечении $x = 0$). Выполнение третьего условия в (4.13) может быть обеспечено с помощью преобразования

$$\boldsymbol{r}^{(e)} = F\boldsymbol{r}_p^{(e)}, \qquad (4.15)$$

где $F$ — матрица преобразования:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Подставляя преобразование (4.15) в уравнения (4.11) и применяя процедуру метода Бубнова — Галеркина, получаем систему уравнений

$$K_p^{(e)}\boldsymbol{r}_p^{(e)} = \boldsymbol{P}_p^{(e)},$$

где $K_p^{(e)}$, $\boldsymbol{P}_p^{(e)}$ — матрица жесткости и вектор нагрузки переходного конечного элемента:

$$K_p^{(e)} = F^{\text{т}} K^{(e)} F, \qquad \boldsymbol{P}_p^{(e)} = F^{\text{т}} \boldsymbol{P}^{(e)}.$$

Применение описанного способа кинематического сопряжения закрепленных и незакрепленных участков стержня с использованием переходного конечного элемента позволяет сохранить симметрию и ленточную структуру матрицы жесткости, но приводит к значительным трудностям при разработке вычислительной программы в случае нескольких закрепленных участков.

Отмеченных недостатков обоих способов кинематического сопряжения участков стержня можно избежать, если при моделировании закрепленных участков в качестве исходного использовать тот же элемент, что и при моделировании незакрепленных участков стержня (см. рис. 3,*б*). Однако при этом возникает проблема учета условий $u|_{z=-t/2} = 0$ и $w|_{z=-t/2} = 0$ для закрепленного участка стержня, обусловленная тем, что узловые перемещения $\boldsymbol{r}^{(e)} = \{u_1, w_1, \gamma_1, u_2, w_2, \gamma_2\}$ исходного (незакрепленного) элемента находятся не на линии $z = -t/2$, а на его продольной оси, где $z = 0$. Данная проблема решается с использованием линейного преобразования

$$\boldsymbol{r}^{(e)} = G\boldsymbol{r}^{(e)*}, \tag{4.16}$$

где $\boldsymbol{r}^{(e)*} = \{u_1^*, w_1^*, \gamma_1^*, u_2^*, w_2^*, \gamma_2^*\}$ — вектор узловых перемещений модифицированного конечного элемента с узлами, расположенными на поверхности $z = -t/2$ (рис. 4,*б*). Матрица $G$ имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С учетом (4.16) вместо (4.11) получаем систему уравнений

$$K^{(e)*} \boldsymbol{r}^{(e)*} = \boldsymbol{P}^{(e)*},$$

где

$$K^{(e)*} = G^{\text{т}} K^{(e)} G, \qquad \boldsymbol{P}^{(e)*} = G^{\text{т}} \boldsymbol{P}^{(e)}.$$

Предлагаемый модифицированный элемент можно использовать также для моделирования незакрепленных участков стержня, оставляя все узлы конечно-элементной модели стержня на поверхности $z = -t/2$ и считая данный элемент единым для всего стержня. Это позволяет сформировать систему разрешающих уравнений относительно вектора узловых перемещений $\boldsymbol{r}^*$ конечно-элементной модели стержня

$$K^* \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{P}^*,$$

где $K^*$, $\boldsymbol{P}^*$ — матрица жесткости и вектор нагрузки соответственно.

**5. Численные эксперименты.** Проведено два численных эксперимента.

5.1. *Эксперимент* 1. Определялось напряженно-деформированное состояние плоских стержней, представленных на рис. 1,*а* и рис. 2,*а*, на основе аналитического и конечно-элементного решений рассмотренных в п. **2** задач о поперечном изгибе плоских стержней (далее стержень 1 и стержень 2) при действии постоянной поперечной нагрузки $p$. В силу симметрии стержня 2 относительно сечения $x = a/2$ результаты расчетов приведены для

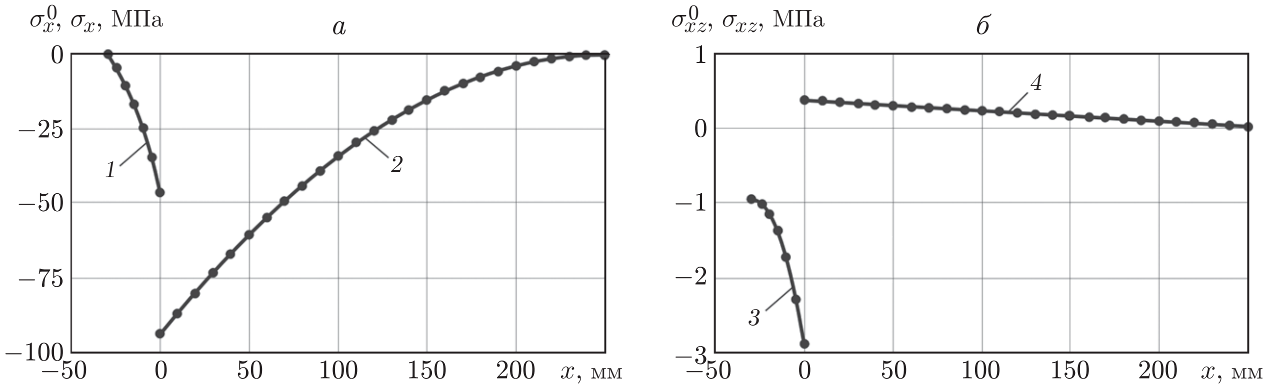


Рис. 5. Нормальные напряжения $\sigma_x^0$, $\sigma_x$ на поверхности $z = t/2$ ($a$) и касательные напряжения $\sigma_{xz}^0$, $\sigma_{xz}$ ($б$) в стержне 1:
сплошные линии — аналитическое решение, точки — решения, полученные методом конечных элементов; *1* — $\sigma_x^0$, *2* — $\sigma_x$, *3* — $\sigma_{xz}^0$, *4* — $\sigma_{xz}$

его левой половины. Материал стержней — однонаправленный волокнистый композит на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 с модулями упругости $E_1 = 100$ ГПа, $G_{13} = 1$ ГПа. Нагрузка и геометрические параметры стержней имели следующие значения: для стержня 1 $p = 4500$ Па, $l = 30$ мм, $a = 250$ мм, $t = 3$ мм; для стержня 2 $p = 13\,800$ Па, $l = 30$ мм, $a = 400$ мм, $t = 3$ мм.

При получении конечно-элементного решения закрепленные участки стержней моделировались 30 элементами одинаковой длины, незакрепленные участки разбивались на 50 конечных элементов. Испытывались три конечно-элементные модели. В модели 1 закрепленные и незакрепленные участки стержней 1 и 2 представлялись различными конечными элементами, показанными соответственно на рис. 3,*а,б*. Для учета условия кинематического сопряжения $2u_0|_{x=0}/t = \gamma|_{x=0}$ к системе разрешающих уравнений (4.12) добавлялось уравнение связи (4.14). В модели 2 закрепленные и незакрепленные участки стержней представлялись теми же элементами, что и в модели 1, а условия кинематического сопряжения (4.13) учитывались с использованием переходного конечного элемента (см. рис. 4,*а*). В модели 3 для представления закрепленных и незакрепленных участков стержней использовался единый модифицированный конечный элемент (см. рис. 4,*б*) с узлами, расположенными на поверхности $z = -t/2$. Параметры напряженно-деформированного состояния стержня, вычисленные по всем трем моделям, практически совпадают. При этом для численной реализации наиболее удобной является модель 3.

На рис. 5, 6 сплошными линиями показаны нормальные напряжения $\sigma_x^0$, $\sigma_x$ на поверхности $z = t/2$ и касательные напряжения $\sigma_{xz}^0$, $\sigma_{xz}$ в поперечных сечениях стержней 1 и 2 соответственно, полученные при аналитическом решении задачи. Точками представлены те же напряжения, полученные методом конечных элементов с использованием модели 3.

На рис. 5, 6 видно, что значения $\sigma_x^0$, $\sigma_x$, $\sigma_{xz}^0$, $\sigma_{xz}$, полученные в результате конечно-элементного решения для стержней 1 и 2, практически совпадают с соответствующими значениями, полученными при аналитическом решении, что свидетельствует о достоверности результатов, полученных на основе конечно-элементной модели напряженно-деформированного состояния стержней с закрепленными участками конечной длины на одной из лицевых поверхностей. При переходе через границу $x = 0$ от незакрепленных участков к закрепленным участкам конечной длины $l$ в рассмотренных стержнях наблюдается существенная трансформация параметров напряженно-деформированного состояния: нормальные напряжения $\sigma_x$ по модулю уменьшаются в два раза, а касательные напря-

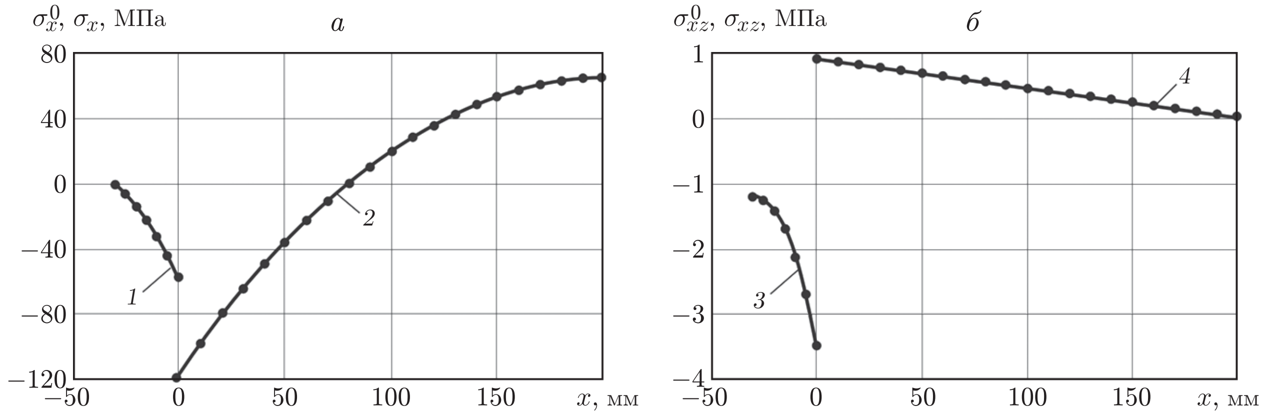


Рис. 6. Нормальные напряжения $\sigma_x^0$, $\sigma_x$ на поверхности $z = t/2$ (*а*) и касательные напряжения $\sigma_{xz}^0$, $\sigma_{xz}$ (*б*) в стержне 2:
сплошные линии — аналитическое решение, точки — решения, полученные методом конечных элементов; *1* — $\sigma_x^0$, *2* — $\sigma_x$, *3* — $\sigma_{xz}^0$, *4* — $\sigma_{xz}$

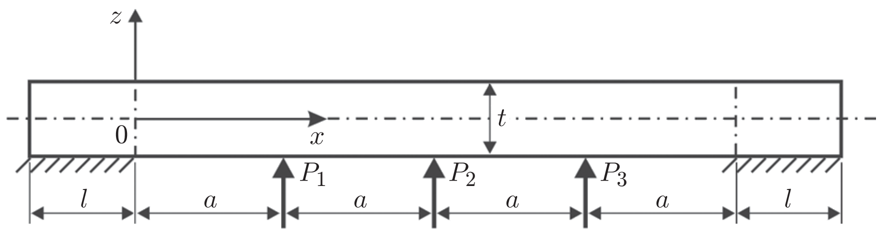


Рис. 7. Схема закрепления и нагружения стержня

жения $\sigma_{xz}$ меняют знак и по модулю в несколько раз превышают значения, полученные в сечении $x = 0$ незакрепленного участка стержня. Например, для стержня 1 напряжение $\sigma_{xz}$ при переходе через границу между незакрепленным и закрепленным участками увеличивается по модулю почти в 7,7 раза (см. рис. 5,*б*).

5.2. *Эксперимент* 2. Исследовался изгиб плоского стержня с двумя закрепленными участками конечной длины $l$ тремя сосредоточенными силами $P_1$, $P_2$ и $P_3$ (рис. 7). Материал стержня — однонаправленный волокнистый композит на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 с модулями упругости $E_1 = 100$ ГПа, $G_{13} = 1$ ГПа. Нагрузка и геометрические параметры стержня имели следующие значения: $P_1 = 44$ Н, $P_2 = 58$ Н, $P_3 = 76$ Н, $l = 30$ мм, $a = 75$ мм, $b = 20$ мм, $t = 3$ мм. Расчет выполнен с использованием конечно-элементной модели 3, построенной на основе модифицированного конечного элемента (см. рис. 4,*б*). Каждый закрепленный участок разбивался на 30 элементов одинаковой длины, незакрепленный участок стержня разбивался на 60 конечных элементов. Следует отметить, что получение аналитического решения для определения параметров напряженно-деформированного состояния данного стержня затруднено, поскольку должны быть выполнены условия сопряжения участков стержня в пяти сечениях: $x = 0; a; 2a; 3a; 4a$.

На рис. 8 показаны нормальные напряжения $\sigma_x^0$, $\sigma_x$ на поверхности $z = t/2$ и касательные напряжения $\sigma_{xz}^0$, $\sigma_{xz}$ в поперечных сечениях рассматриваемого стержня. Полученные результаты показывают, что при переходе через границы между незакрепленным и закрепленными участками параметры напряженно-деформированного состояния стержня существенно изменяются.

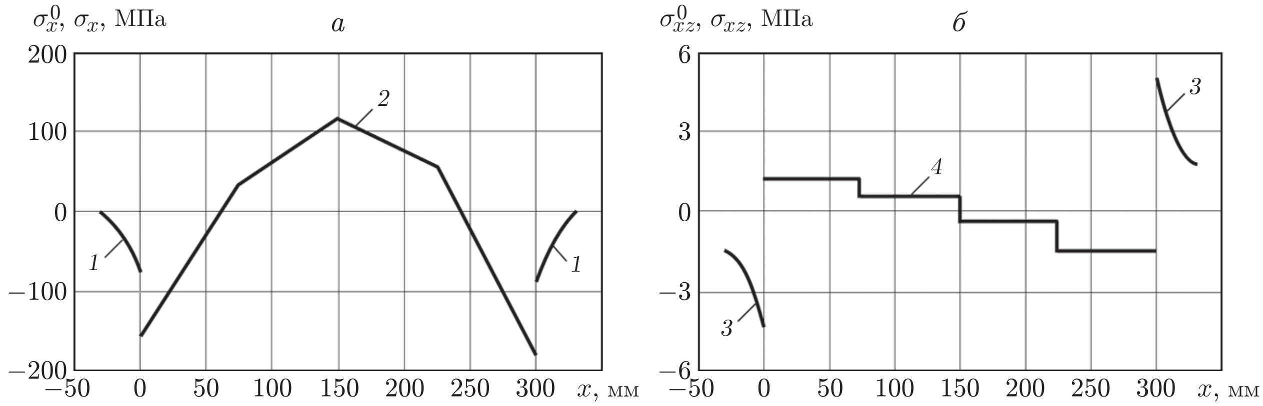


Рис. 8. Нормальные напряжения $\sigma_x^0$, $\sigma_x$ на поверхности $z = t/2$ (*а*) и касательные напряжения $\sigma_{xz}^0$, $\sigma_{xz}$ (*б*) в стержне:
*1* — $\sigma_x^0$, *2* — $\sigma_x$, *3* — $\sigma_{xz}^0$, *4* — $\sigma_{xz}$

**6. Моделирование деформирования стержня с закрепленными участками на обеих лицевых поверхностях.** Если на участке $-l \leqslant x \leqslant 0$ стержень закреплен на обеих лицевых поверхностях $z = \pm t/2$, т. е. перемещения $U_0$, $W_0$ удовлетворяют условиям

$$U_0(x,z)\big|_{z=\pm t/2} = 0, \qquad W_0(x,z)\big|_{z=\pm t/2} = 0, \tag{6.1}$$

то в соотношениях (1.1) невозможно учесть податливость закрепленного участка при деформировании рассматриваемого стержня, так как наложение условий (6.1) на соотношения (1.1) приводит к равенствам

$$u_0(x) = 0, \qquad \gamma_0(x) = 0, \qquad -l \leqslant x \leqslant 0.$$

Для незакрепленного участка $0 \leqslant x \leqslant a$ необходимо сформулировать в сечении $x = 0$ граничные условия защемления

$$u\big|_{x=0} = 0, \qquad \gamma\big|_{x=0} = 0, \qquad w\big|_{x=0} = 0.$$

Простейшая модель деформирования рассматриваемого стержня, позволяющая учесть податливость закрепленного участка, может быть построена на основе уточненной модели

$$U = u + z\gamma + \frac{z^2}{2}\,\psi + \frac{z^3}{6}\,\chi, \qquad W = w + z\varphi, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a; \tag{6.2}$$

$$U_0 = u_0 + z\gamma_0 + \frac{z^2}{2}\,\psi_0 + \frac{z^3}{6}\,\chi_0, \qquad W_0 = w_0 + z\varphi_0, \qquad -l \leqslant x \leqslant 0. \tag{6.3}$$

Уточненная модель деформирования вида (6.2), в которой введенные в рассмотрение функции являются неизвестными и для которых в граничных точках формулируются граничные условия того или иного вида, известна в механике слоистых элементов конструкций и ее исследование проведено во многих работах (см., например, [12, 31]).

При добавлении к (6.3) условий закрепления (6.1) получаем равенства $w_0(x) = 0$, $\varphi_0(x) = 0$ при $-l \leqslant x \leqslant 0$ и зависимости

$$\psi_0(x) = -\frac{8}{t^2}\,u_0(x), \qquad \chi_0(x) = -\frac{24}{t^2}\,\gamma_0(x), \qquad -l \leqslant x \leqslant 0,$$

в силу которых соотношения (6.3) принимают следующий вид:

$$U_0 = \Big(1 - \frac{4z^2}{t^2}\Big)u_0 + z\Big(1 - \frac{4z^2}{t^2}\Big)\gamma_0, \qquad W_0(x,z) \equiv 0, \qquad -l \leqslant x \leqslant 0. \tag{6.4}$$

Таким образом, число неизвестных функций уменьшается с шести (см. (6.3)) до двух (см. (6.4)). Добавление к (6.2), (6.4) в сечении $x = 0$ условий непрерывности перемещений $U_0(x,z)|_{x=0} = U(x,z)|_{x=0}$, $W_0(x,z)|_{x=0} = W(x,z)|_{x=0}$ приводит к следующим кинематическим условиям сопряжения участков:

$$u\big|_{x=0} = u_0\big|_{x=0}, \qquad \gamma\big|_{x=0} = \gamma_0\big|_{x=0},$$

$$\psi\big|_{x=0} = -\frac{8}{t^2}\,u_0\big|_{x=0}, \qquad \chi\big|_{x=0} = -\frac{24}{t^2}\,\gamma_0\big|_{x=0},$$

а для уравнений относительно функций $w$ и $\varphi$, составленных для незакрепленного участка, — к граничным условиям

$$w\big|_{x=0} = 0, \qquad \varphi\big|_{x=0} = 0.$$

**Заключение.** Построены основные соотношения механики деформирования плоских стержней с закрепленными участками конечной длины $l$ на одной из лицевых поверхностей на основе сдвиговой модели Тимошенко. Получены уравнения равновесия незакрепленного и закрепленного участков стержня, а также граничные условия для них на основе вариационного уравнения Лагранжа. Сформулированы условия сопряжения закрепленного и незакрепленного участков стержня. На основе выведенных соотношений найдены точные аналитические решения двух простейших линейных задач о поперечном изгибе стержня с одним и двумя закрепленными участками конечной длины $l$ на поверхности $z = -t/2$. Проведены численные эксперименты, показывающие необходимость учета изменения напряженно-деформированного состояния стержня при переходе от незакрепленного участка к закрепленному.

Построены одномерные конечные элементы для моделирования закрепленных на одной из лицевых поверхностей и незакрепленных участков плоских стержней на основе уточненной сдвиговой модели Тимошенко. Сформулированы условия кинематического сопряжения закрепленных и незакрепленных участков стержня на основе трех моделей: 1) с наложением на узловые параметры дополнительных связей; 2) с использованием переходного конечного элемента; 3) на основе концепции единого конечного элемента. Отмечено, что наиболее удобной для реализации является модель 3 с узлами, расположенными на поверхности $z = -t/2$.

Полученные в данной работе результаты исследования процесса деформирования стержня-полосы, имеющего закрепленные участки конечной длины и находящегося в условиях статического нагружения, позволяют сформулировать задачи механики с учетом податливости закрепленного участка стержня. В рамках классической модели Кирхгофа — Лява на закрепленном участке возможна формулировка только общепринятых граничных условий в сечении, отделяющем незакрепленный участок от закрепленного, а при использовании известной уточненной сдвиговой модели Тимошенко имеется возможность учета закрепления стержня с абсолютно жестким опорным элементом только на одной из лицевых поверхностей стержня.

Главным результатом данной работы является предложенный метод исследования процесса деформирования тонкостенных элементов конструкций, на граничных поверхностях которых имеются закрепленные участки конечных размеров. При этом требуется применение уточненных моделей деформирования высокого порядка точности. На незакрепленном и закрепленном участках лицевых поверхностей используются различные уточненные модели.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян С. А.** Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974.
2. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987.
3. **Reddy J. N.** A simple higher-order theory for laminated composite plates // J. Appl. Mech. 1984. N 51. P. 745–752.
4. **Librescu L.** Refined geometrically non-linear theories of anisotropic laminated shells // Quart. Appl. Math. 1987. N 45. P. 1–22.
5. **Schmidt R., Reddy J. N.** A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells // J. Appl. Mech. 1988. N 55. P. 611–617.
6. **Librescu L., Schmidt R.** Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations // Intern. J. Nonlinear Mech. 1988. N 23. P. 217–229.
7. **Reddy J. N.** A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness // Intern. J. Nonlinear Mech. 1990. N 25. P. 677–686.
8. **Librescu L., Schmidt R.** Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminate continuity conditions // Intern. J. Engng Sci. 1991. N 29. P. 669–683.
9. **Basar Y., Ding Y., Schultz R.** Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations // Intern. J. Solids Structures. 1993. N 30. P. 2611–2638.
10. **Gruttmann F., Wagner W.** A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2005. N 194. P. 4279–4300.
11. **Gruttmann F., Wagner W.** Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element // Comput. Mech. 2006. N 37. P. 479–497.
12. **Yankovskii A. P.** Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 1. General theories of high order // Mech. Composite Materials. 2020. V. 56, N 3. P. 271–290.
13. **Yankovskii A. P.** Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 2. Particular low-order theories // Mech. Composite Materials. 2020. V. 56, N 4. P. 437–454.
14. **Reissner E.** On the theory of bending of elastic plates // J. Math. Phys. 1944. V. 23, N 4. P. 184–191.
15. **Mindlin R. D.** Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates // J. Appl. Phys. 1951. V. 23, N 3. P. 316–323.
16. **Reissner E.** A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates // AIAA J. 1972. V. 10, N 5. P. 716–718.
17. **Малмейстер А. К.** Сопротивление полимерных и композитных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. Рига: Зинатне, 1980.
18. **Reddy J. N.** A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation // Intern. J. Solids Structures. 1984. V. 20, N 9. P. 881–896.
19. **Немировский Ю. В.** Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю. В. Немировский, Б. С. Резников. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.
20. **Thai C. H.** Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method // Appl. Math. Model. 2012. V. 36, N 11. P. 5657–5677.
21. **Mau S.** A refined laminated plates theory // J. Appl. Mech. 1973. V. 40, N 2. P. 606–607.

22. **Christensen R., Lo K., Wu E.** A high-order theory of plate deformation. Pt 1. Homogeneous plates // J. Appl. Mech. 1977. V. 44, N 7. P. 663–668.
23. **Андреев А. Н.** Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2001.
24. **Przemieniecki J. S.** Theory of matrix structural analysis. N. Y.: Dover Publ., 1985.
25. **Bazoune A., Knulief Y. A.** Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element // J. Sound Vibrat. 2003. V. 259, N 2. P. 473–480.
26. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
27. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
28. **Норри Д.** Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. М.: Мир, 1981.
29. **Галлагер Р.** Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984.
30. **Расчеты** машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справ. / Под общ. ред. В. И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989.
31. **Михайловский Е. И.** Математические модели механики упругих тел. Сыктывкар: Сыктывкар. гос. ун-т, 2007.

*Поступила в редакцию 30/III 2022 г.,*
*после доработки — 9/VIII 2022 г.*
*Принята к публикации 29/VIII 2022 г.*