Теплофизика и аэромеханика, 2018, том 25, № 2

УДК 533.6

Турбулентное число Прандтля в пограничном слое на пластине: влияние молекулярного числа Прандтля, вдува (отсоса) и продольного градиента давления*

В.Г. Лущик, М.С. Макарова

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

E–mail: april27_86@mail.ru

С использованием дифференциальной модели турбулентности, дополненной уравнением переноса для турбулентного потока тепла, проведено численное исследование зависимости турбулентного числа Прандтля от молекулярного числа Прандтля, интенсивности вдува (отсоса) газа через проницаемую стенку и параметра ускорения (торможения) набегающего потока. В качестве газовых теплоносителей рассмотрены воздух и смеси гелия с ксеноном и с аргоном, а в качестве жидкостных — ртуть, вода и трансформаторное масло. Полученные результаты расчетов согласуются с имеющимися экспериментальными данными для турбулентного числа Прандтля и величинами, входящими в его определение.

Ключевые слова: турбулентное числа Прандтля, молекулярное число Прандтля, вдув (отсос) газа, ускорение (торможение) потока, дифференциальная модель турбулентности.

Введение

В обзоре [1] были проанализированы существовавшие ко времени его публикации экспериментальные данные по турбулентному числу Прандтля $\mathrm{Pr_t}$ для развитого течения в круглой трубе, плоском канале и для двумерного пограничного слоя с постоянными физическими свойствами. Здесь же было исследовано влияние градиента давления, шероховатости, транспирации для воздуха и жидкостей (жидкий металл, вода, масло). Было показано, что в общем случае турбулентное число Прандтля является функцией молекулярного числа Прандтля Pr, числа Рейнольдса Re и расстояния от стенки y^+: $\mathrm{Pr_t}(y^+, \mathrm{Pr}, \mathrm{Re})$.

Для газовых смесей водорода, гелия, аргона, ксенона с молекулярным числом Прандтля $0{,}18 < \mathrm{Pr} < 0{,}7$ при числах Рейнольдса $3\cdot 10^4 < \mathrm{Re} < 1\cdot 10^5$ в публикации [2] рассматривался ряд моделей для установления зависимости $\mathrm{Pr_t}(y^+, \mathrm{Pr}, \mathrm{Re})$. Анализ результатов расчетных исследований величины $\mathrm{Pr_t}$ показал, что они носят противоречивый характер, особенно в пристеночной области при $y^+ < 10$. Путем прямого численного

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-19-00699).

моделирования (DNS), проведенного для турбулентного течения в канале и трубе с непроницаемыми стенками, в работах [3–5] было установлено, что величина турбулентного числа Прандтля при низких числах Рейнольдса для $\mathrm{Pr} \geq 0{,}2$ практически не зависит от значения молекулярного числа Прандтля.

Большой разброс значений $\mathrm{Pr_t}$ в экспериментах [6], по-видимому, объясняется невысокой точностью измерения входящих в выражение для турбулентного числа Прандтля (см. ниже) величин $< u'v' >$ и $< v'T' >$, а также большой погрешностью при дифференцировании измеренных профилей скорости $\partial u / \partial y$ и температуры $\partial T / \partial y$ в широком диапазоне расстояний от стенки до оси трубы.

В работе [7] был проведен анализ более двадцати измеренных профилей температуры в пристенных турбулентных течениях различных жидкостей (при $0{,}02 \leq \mathrm{Pr} \leq 100$) при условии, что профили температуры имели достаточно широкий участок, хорошо описывающийся логарифмической формулой. Определенные в этом исследовании по логарифмическому участку значения $\mathrm{Pr_t}$ практически не зависели от Pr и группировались около среднего значения $\mathrm{Pr_t} = 0{,}85$.

1. Определение турбулентного числа Прандтля

Уравнения неразрывности, движения и энергии, описывающие существенно дозвуковое течение в пограничном слое на плоской пластине, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \mathrm{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \rho\tau\right], \tag{2}$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + \mathrm{v} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho q_\mathrm{t} \right), \tag{3}$$

здесь x — направление вдоль пластины, y — координата, отсчитываемая по нормали к пластине, u и v — компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно, p — давление, $\rho\tau = -\rho < u'v' >$ — турбулентное трение, $\rho q_\mathrm{t} = -\rho c_p < v'T' >$ — турбулентный поток тепла, ρ — плотность, η — динамическая вязкость, c_p — изобарная теплоемкость, λ — теплопроводность. Для величин $\rho\tau$ и ρq_t обычно используются гипотезы вида

$$\rho\tau = -\rho < u'v' > = \rho \varepsilon_\tau \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4}$$

$$\rho q_\mathrm{t} = -\rho c_p < v'T' > = \rho c_p \varepsilon_q \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{5}$$

здесь ε_τ — коэффициент турбулентного переноса количества движения (турбулентная вязкость), ε_q — коэффициент турбулентного переноса тепла (турбулентная температуропроводность). Для определения величины турбулентной вязкости ε_τ в инженерной практике используется гипотеза пути смешения Прандтля $\varepsilon_\tau = l^2 \,|\, \partial u / \partial y \,|$. Для пути смешения l в литературе (см., например, работу [8]) предложено большое количество эмпирических констант и функций расстояния до стенки, подобранных для каждого конкретного эксперимента, расчет которого требуется провести.

Известны также дифференциальные модели турбулентности:

– однопараметрическая модель турбулентной вязкости [9], в которой уравнение переноса записано для величины ε_τ;

– двухпараметрические $k-\varepsilon$ модели турбулентности (см. [10]), где уравнения переноса записаны для энергии и диссипации турбулентности, которые используются для определения величины ε_τ;

– трехпараметрические модели турбулентности [11, 12], причем в [12] уравнения переноса записаны для энергии, квадрата частоты турбулентности и напряжения сдвига $\tau = -<u'v'>$, которое позволяет непосредственно определить входящее в уравнение движения (2) турбулентное трение $\rho\tau$ без привлечения каких-либо гипотез для определения величины ε_τ.

Для определения турбулентного потока тепла практически во всех методиках расчета используется связь между величинами ε_q и ε_τ через турбулентное число Прандтля

$$\mathrm{Pr_t} = \frac{\varepsilon_\tau}{\varepsilon_q} = \frac{<u'v'>\partial T/\partial y}{<v'T'>\partial u/\partial y} = c_p \frac{\tau\, \partial T/\partial y}{q_\mathrm{t}\, \partial u/\partial y}. \quad (6)$$

Тогда турбулентный поток тепла в уравнении энергии можно определить как

$$\rho q_\mathrm{t} = -\rho c_p <v'T'> = \rho c_p \frac{\varepsilon_\tau}{\mathrm{Pr_t}} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (7)$$

2. Постановка задачи расчета

Для вычисления величин τ и q_t, входящих в определение турбулентного числа Прандтля (6), используется трехпараметрическая модель турбулентности [12], обобщенная на течение с теплообменом [13], в которой уравнения переноса записываются для энергии турбулентности $E = 0{,}5\sum < u_i'^2 >$, величины напряжения сдвига $\tau = -<u'v'>$ и параметра $\omega = E/L^2$ (L — поперечный интегральный масштаб турбулентности), а также записывается уравнение переноса для величины $q_\mathrm{t} = -c_p <v'T'>$ [14]:

$$\rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E}{\partial y} = -(c\rho\sqrt{E}L + c_1\eta)\frac{E}{L^2} + \rho\tau\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_E \frac{\partial E}{\partial y}\right),$$

$$\rho u \frac{\partial \tau}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \tau}{\partial y} = -(3c\rho\sqrt{E}L + 9c_1\eta)\frac{\tau}{L^2} + c_2\rho E\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y}\right),$$

$$\rho u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \omega}{\partial y} = -(2c\rho\sqrt{E}L + 1{,}4c_1\eta f_\omega)\frac{\omega}{L^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_\omega \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + \left[\frac{\tau}{E} - 2c_3\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\rho\omega\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\rho u \frac{\partial q_\mathrm{t}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial q_\mathrm{t}}{\partial y} = -[3c\rho\sqrt{E}L + 9c_1\eta f(\mathrm{Pr})]\frac{q_\mathrm{t}}{L^2} + c_4 c_p \rho E\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_q \frac{\partial q_\mathrm{t}}{\partial y}\right), \quad (9)$$

$$D_\varphi = a_\varphi\sqrt{E}L + \alpha_\varphi\eta \ (\varphi = E,\ \tau,\ \omega,\ q_\mathrm{t}), \quad L = \sqrt{E/\omega},$$

$$f_\omega = 1 - \frac{1}{2c_1}\left(\frac{L}{E}\frac{\partial E}{\partial r}\right)^2, \quad f(\mathrm{Pr}) = \frac{1+c_5}{2} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{Pr}} + 1/\sqrt{\mathrm{Pr}}}{1 + c_5\sqrt{\mathrm{Pr}}}.$$

Константы имеют следующие значения [12–14]: $c = 0,3$, $c_1 = 5\pi/4$, $c_2 = 0,2$, $c_3 = 0,04$, $c_4 = 0,23$, $c_5 = 0,25$, $a_E = a_\omega = 0,06$, $a_\tau = a_q = 3a_E$, $E = 0,18$, $\alpha_E = \alpha_\tau = 1$, $\alpha_\omega = 1,4$, $\alpha_q = f(\mathrm{Pr})$.

Опишем граничные условия на стенке и на внешней границе пограничного слоя в зависимости от рассматриваемой задачи.

Граничные условия на стенке ($y = 0$):

$$u = 0, \quad v = 0 \ \text{ либо } \ \rho v = (\rho v)_\mathrm{w}; \quad E = 0, \ \ \partial E/\partial y = 0, \ \ \tau = 0;$$

$$T = T_\mathrm{w} \ \ \text{ либо } \ -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)_\mathrm{w} = q_\mathrm{w}, \tag{10}$$

здесь $(\rho v)_\mathrm{w}$ — массовая скорость вдуваемого (отсасываемого) газа, T_w — температура стенки, q_w — тепловой поток в стенку. Граничное условие $\partial E/\partial y = 0$ позволяет определить величину $\omega_\mathrm{w}(x)$, которая заранее неизвестна.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя $(y = \delta(x))$:

$$u = u_1, \ \ T = T_1; \ \ dP/dx = 0 \ \text{ либо } \ dP/dx = f(x);$$

$$E = E_1(x), \quad \omega = \omega_1(x), \quad \tau = 0, \tag{11}$$

где u_1, T_1 — величины скорости и температуры для течения в набегающем потоке, а функции $E_1(x)$ и $\omega_1(x)$ описывают вырождение турбулентности в этом течении. Величина $\delta(x)$ выбирается из условия гладкого сопряжения решения.

В начальном ($x = 0$) сечении профиль скорости $u(y)$ определялся из автомодельного решения Блазиуса, профиль температуры $T(y)$ принимался подобным профилю скорости, профили функций $E(y)$, $\tau(y)$, $\omega(y)$ задавались как в работе [13].

Начальный масштаб турбулентности L_0 принимался таким ($\mathrm{Re}_L = L_0(\rho u/\eta)_1 = 0,2{\cdot}10^5$), чтобы интенсивность турбулентности набегающего потока $e = \sqrt{E}/u_1$, уменьшающаяся вследствие вырождения ее на расчетной длине, не очень отличалась от начальной величины $e_0 = \sqrt{E_0}/u_1 = 0,03$. При этом число Рейнольдса турбулентности $\mathrm{Re_t} = \sqrt{E_0}(\rho u/\eta)_1$ составляло $0,6\cdot 10^3$.

Параметрами задачи являются молекулярное число Прандтля $\mathrm{Pr} = (\eta \cdot c_p/\lambda)_1$, интенсивность вдува (отсоса) газа через проницаемую стенку $j_\mathrm{w}^\mathrm{o} = (\rho v)_\mathrm{w}/(\rho u)_1$ и параметр ускорения (торможения) набегающего потока (безразмерный градиент давления) $K = -\dfrac{\eta_1}{\rho_1^2 u_1^3}\cdot\dfrac{dP}{dx} = \dfrac{\eta_1}{\rho_1 u_1^2}\cdot\dfrac{du_1}{dx}$.

3. Результаты расчетов

В настоящей работе проведено численное исследование зависимости турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t}$ от молекулярного числа Прандтля Pr, интенсивности вдува (отсоса) газа через проницаемую стенку j_w^o и параметра ускорения (торможения) набегающего потока K.

В качестве газовых теплоносителей выбраны воздух (Pr = 0,71) и смеси гелия с ксеноном (Pr = 0,21) и гелия с аргоном (Pr = 0,41), а в качестве жидкостных теплоносителей — ртуть (Pr = 0,025), вода (Pr = 5,9) и трансформаторное масло (Pr = 88). Поскольку, как отмечалось выше, точность определения величины турбулентного числа Прандтля невелика, а для некоторых теплоносителей экспериментальные зависимости для $\mathrm{Pr_t}$

вообще отсутствуют, верификацию полученных расчетных зависимостей для $\mathrm{Pr_t}$ не всегда удается провести. Поэтому для косвенного подтверждения полученных расчетных зависимостей для $\mathrm{Pr_t}$ проведено сравнение результатов расчета с имеющимися в литературе экспериментальными данными, входящими в определения величины $\mathrm{Pr_t}$ (6): профилями температуры, скорости, турбулентных потоков тепла и трения, а также коэффициентов трения и теплообмена (чисел Нуссельта или Стантона).

3.1. Зависимость турбулентного числа Прандтля от молекулярного

Расчеты проводились в следующей постановке. Рассматривалось обтекание пластины дозвуковым потоком газа с постоянной по длине скоростью u_1 (число Маха $\mathrm{M} \ll 1$) при температуре T_1. В качестве теплового граничного условия (10) задавался тепловой поток в стенку, постоянный на всей расчетной длине пластины $q_\mathrm{w} = \mathrm{const}$. Величина теплового потока принималась достаточно малой ($q_\mathrm{w}^+ = q_\mathrm{w} /(\rho u c_p T)_1 < 10^{-4}$), чтобы подогрев теплоносителя был невелик и теплофизические свойства его были близки к постоянным, что соответствовало условиям проведения экспериментов. Число Рейнольдса по длине пластины Re_x (по толщине потери импульса Re_θ) в расчетах было достаточно большим ($\mathrm{Re}_x = x(\rho u/\eta)_1 \approx 5\cdot 10^6$, $\mathrm{Re}_\theta = \theta(\rho u/\eta)_1 \approx 8\cdot 10^3$), чтобы исключить влияние входных условий на характеристики течения и теплообмена.

На рис. 1 показано изменение в пограничном слое турбулентного числа Прандтля для перечисленных выше теплоносителей. Как видно, для воздуха (линия *4*) величина $\mathrm{Pr_t}$ практически постоянна по всей толщине пограничного слоя и лежит в диапазоне значений $\mathrm{Pr_t}$ = 0,85–0,9, обычно используемых в расчетах теплообмена. В жидкостях (вода — линия *5*, масло — линия *6*) с ростом молекулярного числа Прандтля Pr величина $\mathrm{Pr_t}$ в области вязкого подслоя ($y^+ \le 10$) возрастает. Для смесей газов с малыми значениями молекулярного числа Прандтля (гелий с ксеноном — линия *2* и с аргоном — линия *3*) величина $\mathrm{Pr_t}$ также возрастает в вязком подслое, но в меньшей степени, чем

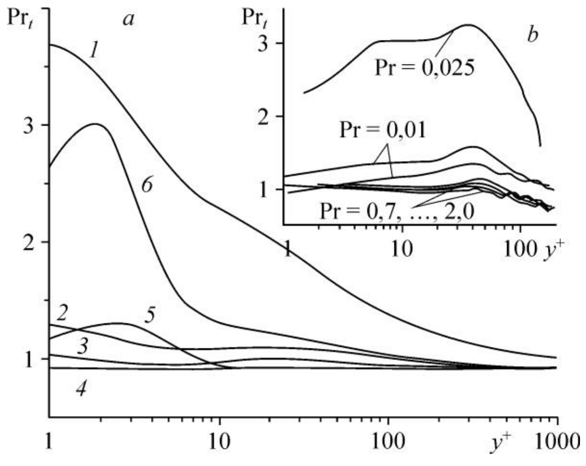

Рис. 1. Изменение в пограничном слое турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t}(y^+)$.

a — расчет при $\mathrm{Re}_x \approx 5\cdot 10^6$ для шести теплоносителей: *1* — ртуть (Pr = 0,025), *2* — смесь гелий-ксенон (Pr = 0,21), *3* — смесь гелий-аргон (Pr = 0,41), *4* — воздух (Pr = 0,71), *5* — вода (Pr = 5,9), *6* — трансформаторное масло (Pr = 88); *b* — расчет турбулентного числа Прандтля прямым численным моделированием [11].

в жидкостях. Для жидкого металла (ртуть — линия *1*) с очень малым значением молекулярного числа Прандтля (Pr = 0,025) величина $\mathrm{Pr_t}$ существенно изменяется не только вблизи стенки, но и вдали от нее. Отметим, что, поскольку экспериментальные значения турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t}$ для указанных теплоносителей, за исключением воздуха, воды и жидкого металла, практически отсутствуют, верификация полученных расчетных значений $\mathrm{Pr_t}$ проводилась путем сравнения величин, входящих в определение $\mathrm{Pr_t}$ (6), с имеющимися для них экспериментальными данными.

Расчетные профили скорости для теплоносителей с теплофизическими свойствами, близкими к постоянным, не зависят от молекулярного числа Прандтля Pr и соответствуют экспериментальным профилям скорости [15] для трех теплоносителей (воздух, вода и трансформаторное масло).

На рис. 2 для шести теплоносителей изображены профили температуры $T^+(y^+)$, где $T^+ = (T_\mathrm{w} - T)/T_*$, а $T_* = q_\mathrm{w} / \rho c_p u_*$ — температура трения, представленная по аналогии со скоростью трения u_* из работы [15]. Как видно из рис. 2, для воздуха, воды и трансформаторного масла расчетные зависимости $T^+(y^+)$ (линии) близки к экспериментальным [15] (символы). Для теплоносителей с малым числом Прандтля Pr (He-Ar, He-He, Hg) профили температуры лежат значительно ниже, чем профили теплоносителей с числом $\mathrm{Pr} \geq 0,7$.

На рис. 3 представлено распределение в пограничном слое безразмерных величин турбулентного потока тепла $\overline{q}_\mathrm{t} = <v'T'>/u_1(T_\mathrm{w} - T_1)$ и турбулентного трения $\overline{\tau} = <u'v'>/u_1^2$. Турбулентное трение $\overline{\tau}$ (линия *7*) не зависит от молекулярного числа Прандтля Pr, в то время как турбулентный поток тепла $\overline{q}_\mathrm{t}$ существенным образом зависит от Pr не только по величине, но и по характеру распределения по толщине пограничного слоя.

Таким образом, представленные на рис. 2, 3 распределения профилей температуры, турбулентного трения и потока тепла позволяют судить об эволюции турбулентного числа Прандтля, представленного на рис. 1, в зависимости от молекулярного числа Прандтля Pr.

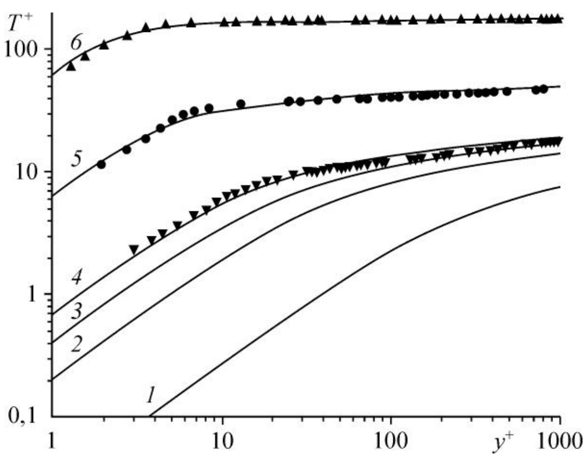

Рис. 2. Расчетные и экспериментальные профили температуры $T^+(y^+)$ в пограничном слое.
1–6 — расчет при $\mathrm{Re}_x \approx 5{\cdot}10^6$ для шести теплоносителей (обозначения см. на рис. 1),
символы *4–6* — эксперимент [15] для воздуха, воды и трансформаторного масла соответственно.

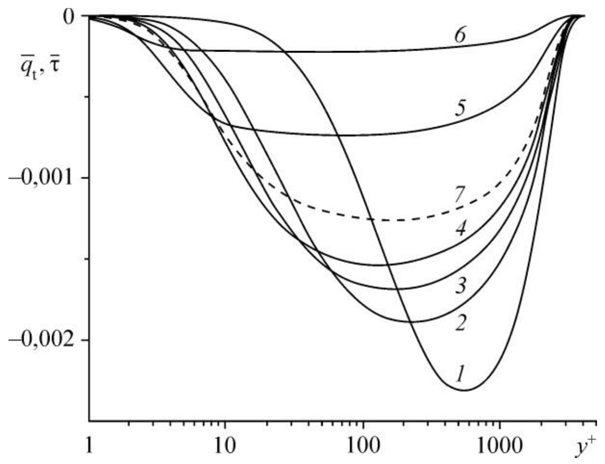

Рис. 3. Расчетное изменение турбулентного потока тепла $\overline{q}_t(y^+)$ в пограничном слое ($\mathrm{Re}_x \approx 5\cdot 10^6$) для шести теплоносителей.
Обозначения *1*–*6* см. на рис. 1, *7* — турбулентное трение $\overline{\tau}$ для тех же теплоносителей.

Расчет широко используемых на практике интегральных характеристик пограничного слоя — коэффициента трения $c_f = 2(\eta\partial u/\partial y)_\mathrm{w}/(\rho u^2)_1$ и безразмерного коэффициента теплоотдачи (числа Нуссельта $\mathrm{Nu} = xq_\mathrm{w}/\lambda_1(T_\mathrm{w} - T_1)$) — позволил установить следующее. Расчетная величина c_f, так же, как и профиль скорости, не зависит от молекулярного числа Прандтля Pr, и для ламинарного режима течения ($\mathrm{Re}_x \le 10^5$) близка к зависимости Блазиуса, а для турбулентного режима ($\mathrm{Re}_x \ge 3\cdot 10^5$) — к зависимости Кармана. Расчетные зависимости числа Нуссельта $\mathrm{Nu}(\mathrm{Re}_x)$ (рис. 4) для воздуха (линия *4*), воды (линия *5*) и масла (линия *6*) близки к аппроксимационной зависимости Кадера и Яглома [16] (штриховые линии), охватывающей большой массив экспериментальных данных. При малых числах Прандтля числа Нуссельта существенно снижаются (линии *1*, *2*, *3*).

Из результатов численного исследования турбулентного числа Прандтля можно отметить данные, приведенные в работе [11] (рис. 1*b*), полученные путем прямого численного моделирования (DNS). Эти результаты, несмотря на известные ограничения DNS — низкие числа Рейнольдса, — отражают полученную в настоящем исследовании существенную зависимость турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t}$ от молекулярного числа Прандтля Pr. Это иллюстрирует также рис. 5, на котором приведено сравнение результатов расчета для зависимости $\mathrm{Pr_t^{-1}}(\mathrm{Pr}\cdot y^+)$ с известными экспериментальными данными [17] для жидких металлов и с аналитической зависимостью для Pr << 1, полученной в [18]:

$$\mathrm{Pr_t^{-1}} = \frac{\mathrm{Pr}\cdot y^+}{0{,}88\,\mathrm{Pr}\cdot y^+ + 2{,}83}. \qquad (12)$$

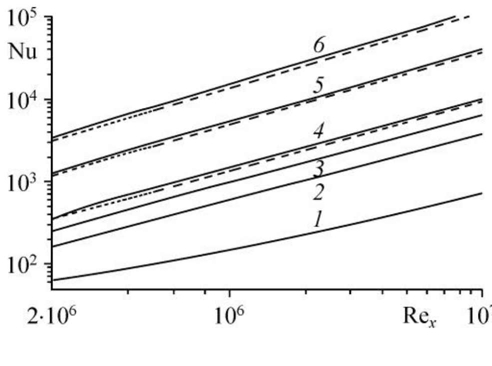

Рис. 4. Расчетные зависимости числа Нуссельта $\mathrm{Nu}(\mathrm{Re}_x)$ в пограничном слое для шести теплоносителей.
Обозначение сплошных линий *1*–*6* см. на рис. 1, штриховые линии *4*–*6* — зависимости Кадера–Яглома [16] для воздуха, воды и трансформаторного масла соответственно.

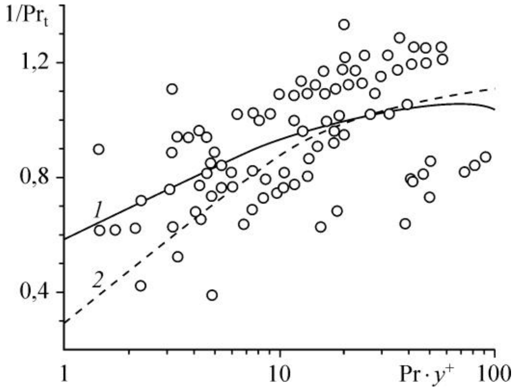

Рис. 5. Зависимость $\mathrm{Pr}_t^{-1}(\mathrm{Pr}\cdot y^+)$ для жидких металлов.
1 — расчет, *2* — аналитическая зависимость (12), полученная в работе [17];
символы — экспериментальные данные [18].

3.2. Изменение числа $\mathbf{Pr_t}$ в пограничном слое на проницаемой пластине

Расчеты проводились в постановке, аналогичной приведенной выше, за исключением того, что пластина была проницаемой, вдув или отсос газа через нее осуществлялся с постоянной интенсивностью $j_\mathrm{w}^\mathrm{o} = (\rho v)_\mathrm{w} / (\rho u)_1 = \mathrm{const}$ и начинался на длине, соответствующей условиям эксперимента. В качестве теплоносителя был принят воздух как и в экспериментальных работах [19, 20], с которыми проводилось сравнение результатов расчета.

На рис. 6 представлены результаты расчетов (линии) изменения числа Стантона $\mathrm{St} = q_\mathrm{w} / \rho_1 c_{p1} u_1 (T_\mathrm{w} - T_1)$ по длине пластины в сравнении с экспериментальными данными [19] (символы) при одних и тех же значениях интенсивности вдува и отсоса. Видно, что согласование результатов расчета с экспериментом в широком диапазоне изменения интенсивности вдува (отсоса) j_w^o вполне удовлетворительное, что свидетельствует об успешной верификации используемой модели турбулентности.

Профили скорости и температуры в пограничном слое при вдуве ($j_\mathrm{w}^\mathrm{o} > 0$) и отсосе ($j_\mathrm{w}^\mathrm{o} < 0$) газа представлены соответственно на рис. 7, 8. Расчетные профили скорости и температуры при $j_\mathrm{w}^\mathrm{o} = \pm 0{,}002$ получены для значений числа Рейнольдса по толщине потери импульса Re_θ, близких к экспериментальным [20], и составляют $\mathrm{Re}_\theta \approx 900$ для $j_\mathrm{w}^\mathrm{o} = -0{,}002$ и $\mathrm{Re}_\theta \approx 2300$ для $j_\mathrm{w}^\mathrm{o} = 0{,}002$. При этом расчетные значения числа Стантона, коэффициента трения и формпараметра также близки к экспериментальным. Результаты

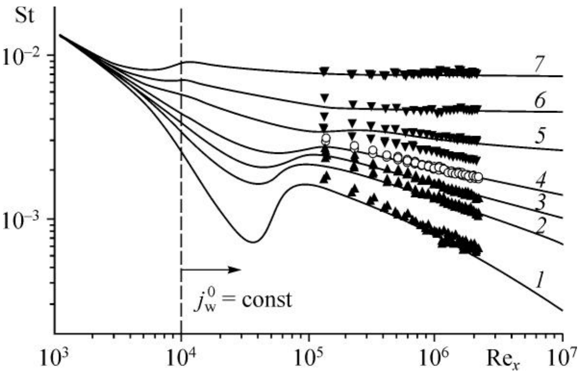

Рис. 6. Изменение числа Стантона по длине пластины $\mathrm{St}(\mathrm{Re}_x)$ для ряда значений интенсивности вдува и отсоса газа.
Вдув: j_w^o = 0,0038 (*1*), 0,0019 (*2*), 0,001 (*3*), 0 (*4*), отсос: j_w^o = –0,0024 (*5*), –0,0046 (*6*), –0,0077 (*7*);
линии — расчет, символы — эксперимент [19].

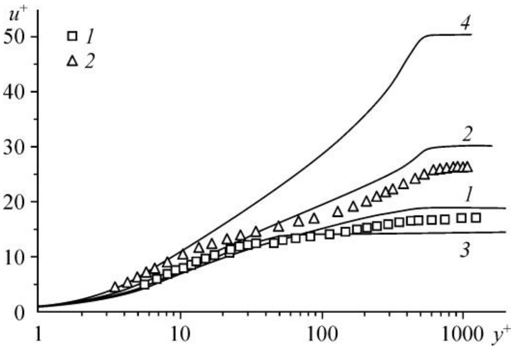

Рис. 7. Профили скорости $u^+(y^+)$ в пограничном слое при вдуве и отсосе газа. $j_{\rm w}^{\rm o}$ = –0,002 (*1*), 0,002 (*2*), –0,005 (*3*), 0,005 (*4*); линии — расчет, символы — эксперимент [20].

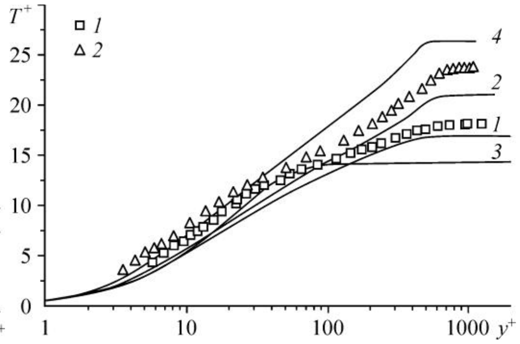

Рис. 8. Профили температуры $T^+(y^+)$ в пограничном слое при вдуве и отсосе газа. Обозначения см. на рис. 7.

расчетов (линии) получены в более широком диапазоне изменения величины $j_{\rm w}^{o}$, чем в экспериментах [20]. Как видно из рис. 7, 8, вдув и отсос газа существенно влияют на профили скорости и температуры.

Полученное в расчетах изменение в пограничном слое на проницаемой пластине безразмерных величин турбулентного трения $\overline{\tau} = \langle u'v' \rangle / u_1^2$ и турбулентного потока тепла $\overline{q}_{\rm t} = \langle {\rm v}'T' \rangle / u_1(T_{\rm w} - T_1)$ позволило установить следующее. Турбулентное трение $\overline{\tau}$ (рис. 9), не зависящее от молекулярного числа Прандтля Pr (см. рис. 3), при вдуве и отсосе, как и турбулентный поток тепла $\overline{q}_{\rm t}$, существенным образом зависит от интенсивности вдува (отсоса) не только по величине, но и по характеру распределения по толщине пограничного слоя.

На рис. 10 показано расчетное изменение в пограничном слое турбулентного числа Прандтля для приведенного выше диапазона изменения величины $j_{\rm w}^{\rm o}$. Как видно, лишь для интенсивного отсоса ($j_{\rm w}^{\rm o} = -0{,}005$ — линия *1*) величина ${\rm Pr_t}$ заметно отличается от единицы. Таким образом, в расчетах показано, что при слабом отсосе его влияние на число ${\rm Pr_t}$ для воздуха и газовых смесей является слабым. С увеличением интенсивности

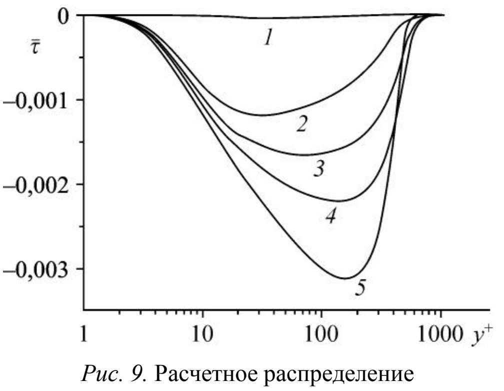

Рис. 9. Расчетное распределение в пограничном слое безразмерной величины турбулентного трения $\overline{\tau}$ при отсосе и вдуве газа. $j_{\rm w}^{\rm o}$ = –0,005 (*1*), –0,002 (*2*), 0 (*3*), 0,002 (*4*), 0,005 (*5*).

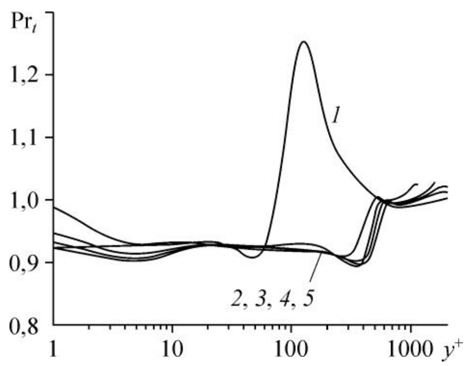

Рис. 10. Расчетное изменение в пограничном слое турбулентного числа Прандтля ${\rm Pr_t}(y^+)$ при отсосе и вдуве газа. Обозначения см. на рис. 9.

отсоса число $\mathrm{Pr_t}$ в логарифмической области возрастает, и тем сильнее, чем меньше молекулярное число Pr. Причиной этого роста $\mathrm{Pr_t}$ является существенная деформация профилей скорости и температуры. Отметим, что полученное в работе [21] изменение величины $\mathrm{Pr_t}$ в трубе при сильном отсосе ($j_\mathrm{w}^\mathrm{o} = -0,01$) также свидетельствует о существенном росте величины турбулентного числа Прандтля в пристенной области. Необходимо подчеркнуть, что характер изменения величины $\mathrm{Pr_t}$ в пограничном слое существенным образом зависит от величины числа Рейнольдса по длине пластины Re_x (по толщине потери импульса Re_θ), величина $\mathrm{Pr_t}$ увеличивается с ростом числа Re_x. Так, при интенсивном отсосе ($j_\mathrm{w}^\mathrm{o} = -0,005$) с изменением числа Re_x с $1{\cdot}10^6$ до $40{\cdot}10^6$ величина $\mathrm{Pr_t}$ возрастает примерно на 25 %.

3.3. Зависимость числа $\mathrm{Pr_t}$ от продольного градиента давления

В качестве параметра ускорения (торможения) набегающего потока использовался безразмерный градиент давления

$$K = -\frac{\eta_1}{\rho_1^2 u_1^3}\cdot\frac{dP}{dx} = \frac{\eta_1}{\rho_1 u_1^2}\cdot\frac{du_1}{dx},$$

который принимался постоянным на расчетной длине после перехода от ламинарного режима течения в пограничном слое с нулевым градиентом давления к турбулентному режиму течения. Остальные особенности постановки задачи аналогичны принятым выше. В качестве теплоносителя был принят воздух, как и в экспериментальных работах [15, 20, 22], с которыми проводилось сравнение результатов расчета.

На рис. 11, 12 представлены профили температуры и скорости в пограничном слое ускоряющегося ($K > 0$) и замедляющегося ($K < 0$) потоков. Расчетные профили скорости и температуры при соответствующих значениях параметра K получены для значений числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\theta = 600–11000$, близких к представленным в работах [15, 20, 22]. Результаты расчетов (линии *1*, *2*, *3*) для значений параметра $K = 0,\ 1,44\cdot10^{-6}$ и $-0,25\cdot10^{-6}$ удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [15, 20, 22]. При этом

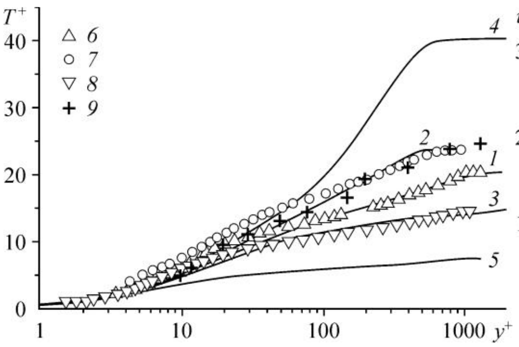

Рис. 11. Профили температуры $T^+(y^+)$ в пограничном слое для ряда значений параметра ускорения (торможения) потока.
Расчет настоящей работы (линии): $K{\cdot}10^6 = 0$ (*1*), 1,44 (*2*), –0,25 (*3*), 3 (*4*), –1 (*5*); символы *6–8*, соответствующие расчетным значениям K, — данные экспериментов [20, 22]; символы *9* — $K = 1,6{\cdot}10^{-6}$ — данные эксперимента [15].

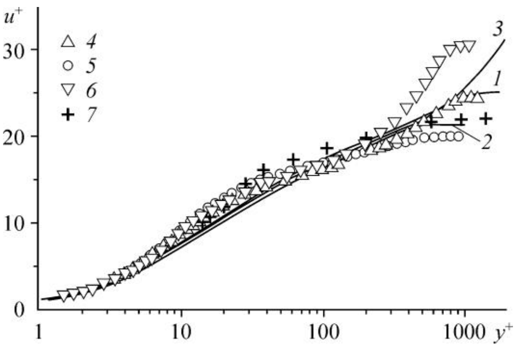

Рис. 12. Профили скорости $u^+(y^+)$ в пограничном слое для ряда значений параметра ускорения (торможения) потока.
Расчет настоящей работы (линии): $K{\cdot}10^6 = 0$ (*1*), 1,44 (*2*), –0,25 (*3*); символы *4–6*, соответствующие расчетным значениям K, — данные экспериментов [20, 22]; символы *7* — $K = 1,6{\cdot}10^{-6}$ — данные эксперимента [15].

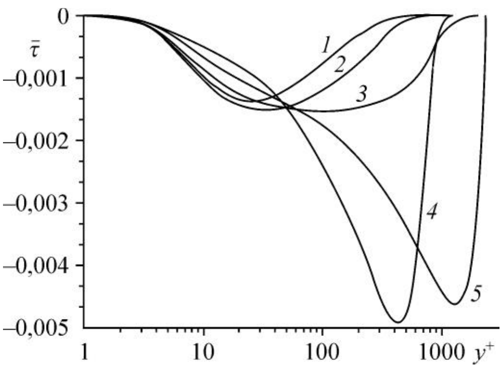

Рис. 13. Расчетное распределение в пограничном слое безразмерной величины турбулентного трения $\bar{\tau}$ для ряда значений параметра ускорения и торможения потока.
Ускорение: $K{\cdot}10^6$ = 3 (*1*), 1,44 (*2*), 0 (*3*); торможение: $K{\cdot}10^6$ = –1 (*4*), –0,25 (*5*) (Re_θ = 600–11000).

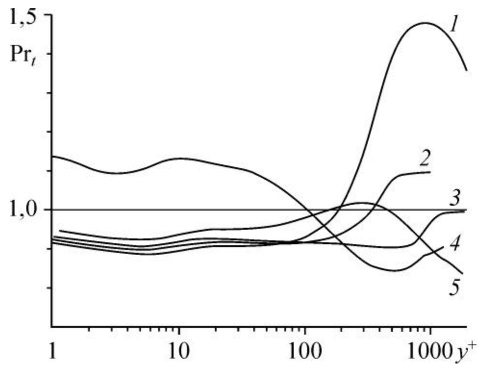

Рис. 14. Расчетные зависимости турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t}(y^+)$ в пограничном слое с ускорением и торможением потока для ряда значений параметра *K*.
Обозначения см. на рис. 13.

расчетные значения коэффициента трения и формпараметра также имеют значения, близкие к экспериментальным.

Полученное в расчетах изменение в пограничном слое с градиентом давления безразмерных величин турбулентного потока тепла $\bar{q}_\mathrm{t} = \langle v'T' \rangle / u_1(T_\mathrm{w} - T_1)$ и турбулентного трения $\bar{\tau} = \langle u'v' \rangle / u_1^2$ позволило установить следующее. Величина $\bar{q}_\mathrm{t}$ при изменении параметра градиента давления *K* не очень существенно изменяется относительно безградиентного течения (*K* = 0), в то время как при течении с сильным ускорением потока ($K \ge 0{,}5{\cdot}10^{-6}$) величина турбулентного трения $\bar{\tau}$ (рис. 13) в области логарифмического слоя существенно возрастает. Поскольку градиент давления в первую очередь влияет на динамические характеристики пограничного слоя — величину турбулентного трения $\bar{\tau}$, — это приводит к росту турбулентного числа Прандтля при сильном ускорении потока (рис. 14 — линия *1*). Рост турбулентного числа Прандтля при сильном ускорении потока в области логарифмического слоя был также отмечен в экспериментах (см. работу [1]).

3.4. О необходимости учета переменности турбулентного числа Прандтля в пограничном слое

Приведенные выше результаты численного исследования получены при использовании уравнения для турбулентного потока тепла ρq_t (9), а для определения турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t}$ использовано выражение (6). Представляется интересным исследовать, как влияет переменность $\mathrm{Pr_t}$ на характеристики теплообмена, например, на число Нуссельта. С этой целью для двух значений интенсивности вдува (отсоса) j_w^o = ±0,002, двух значений параметра градиента давления $K = \pm 1{\cdot}10^{-6}$ и четырех значений молекулярного числа Прандтля Pr (для ртути, смеси гелий–ксенон, воздуха и воды) проведено сравнение значений чисел Нуссельта, определенных в расчетах с постоянной величиной турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t} = 0{,}85$ в выражении (7) для турбулентного потока тепла ρq_t в уравнении энергии (3) и с использованием непосредственно уравнения для турбулентного потока тепла (9), обеспечивающего переменность величины $\mathrm{Pr_t}$. Сравнение двух чисел Нуссельта при одинаковых значениях величин Pr, j_w^o и *K* проведено для одних и тех же значений чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}_x \ge 3{\cdot}10^5$ ($\mathrm{Re}_\theta \ge 10^3$).

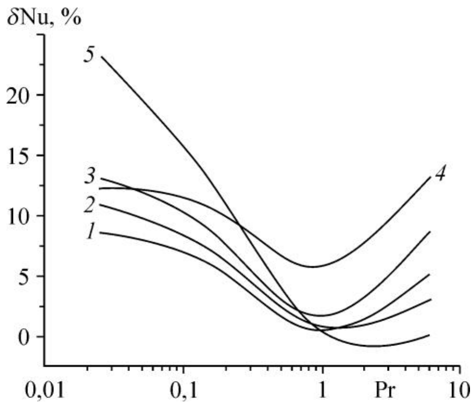

Рис. 15. Зависимость относительной разности чисел Нуссельта δ_{Nu} при постоянном и переменном значениях турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t}$ от молекулярного числа Прандтля Pr для ряда комбинаций интенсивности вдува (отсоса) $j_{\mathrm{w}}^{\mathrm{o}}$ и градиента давления *K*.

$j_{\mathrm{w}}^{\mathrm{o}} / K \cdot 10^6$ = 0/0 (*1*), 0,002/1 (*2*), –0,002/1 (*3*), –0,002/–1 (*4*), 0,002/–1 (*5*).

На рис. 15 представлена зависимость относительной разности чисел Нуссельта $\delta_{\mathrm{Nu}} = (\mathrm{Nu_c} - \mathrm{Nu_v}) / \mathrm{Nu_v} \cdot 100\,\%$, где $\mathrm{Nu_c}$ и $\mathrm{Nu_v}$ — значения числа Нуссельта при постоянном и переменном значениях числа $\mathrm{Pr_t}$ соответственно. При анализе приведенных здесь результатов следует иметь в виду, что при течении с ускорением ($K > 0$) интенсивность вдува (отсоса) $j_{\mathrm{w}}^{\mathrm{o}} = (\rho \mathrm{v})_{\mathrm{w}} / (\rho u)_1$ уменьшается по длине пластины из–за роста скорости набегающего потока u_1 и возрастает при течении с торможением ($K < 0$) из–за падения скорости u_1. Как видно из рисунка, отличие числа Nu, определенного в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t}$ = 0,85, от результатов, полученных в расчетах с использованием уравнения для турбулентного потока тепла ρq_{t}, возрастает с уменьшением и увеличением молекулярного числа Прандтля Pr относительно значения Pr = 0,71 для воздуха. Вдув, отсос, положительный и отрицательный градиенты давления также увеличивают это отличие, которое для исследованного диапазона указанных параметров достигает 15 %. Таким образом, если в экспериментах точность определения числа Nu выше, то предположение о постоянстве числа $\mathrm{Pr_t}$ нельзя считать оправданным.

Заключение

С использованием дифференциальной модели турбулентности, дополненной уравнением переноса для турбулентного потока тепла, проведено численное исследование зависимости турбулентного числа Прандтля от молекулярного числа Прандтля Pr, интенсивности вдува (отсоса) газа через проницаемую стенку $j_{\mathrm{w}}^{\mathrm{o}}$ и параметра ускорения (торможения) набегающего потока *K*, которое позволило установить следующее.

1. Расчетное изменение в пограничном слое турбулентного числа Прандтля для ряда теплоносителей показало, что для воздуха (Pr = 0,71) величина $\mathrm{Pr_t}$ практически постоянна по всей толщине пограничного слоя и лежит в диапазоне значений $\mathrm{Pr_t}$ = 0,85–0,9, обычно используемых в расчетах теплообмена. В жидкостях (в воде (Pr = 5,9) и трансформаторном масле (Pr = 88)) с ростом молекулярного числа Прандтля Pr величина $\mathrm{Pr_t}$ в области вязкого подслоя ($y^+ \le 10$) возрастает. Для смесей газов с малыми значениями молекулярного числа Прандтля (гелий с ксеноном (Pr = 0,21) и с аргоном (Pr = 0,41)) величина $\mathrm{Pr_t}$ также возрастает в вязком подслое, но в меньшей степени, чем в жидкостях. Для жидкого металла (ртуть) с очень малым значением молекулярного числа Прандтля (Pr = 0,025) величина $\mathrm{Pr_t}$ существенно изменяется не только вблизи стенки, но и вдали от нее.

2. Численное исследование изменения в пограничном слое турбулентного числа Прандтля проведено в диапазоне изменения величины интенсивности вдува (отсоса) $j_\mathrm{w}^\mathrm{o} = -0{,}005 \div 0{,}005$. Показано, что при слабом отсосе влияние его на число $\mathrm{Pr_t}$ для воздуха и газовых смесей слабое. С увеличением интенсивности отсоса число $\mathrm{Pr_t}$ в логарифмической области возрастает, и тем сильнее, чем меньше молекулярное число Pr. Причиной этого роста $\mathrm{Pr_t}$ является существенная деформация профилей скорости и температуры. Показано, что лишь для интенсивного отсоса ($j_\mathrm{w}^\mathrm{o} = -0{,}005$) турбулентное число Прандтля заметно отличается от величины $\mathrm{Pr_t} \approx 1$. Отмечено, что характер изменения величины $\mathrm{Pr_t}$ в пограничном слое существенным образом зависит от величины числа Рейнольдса по длине пластины Re_x (по толщине потери импульса Re_θ).

3. Исследование влияния градиента давления на турбулентное число Прандтля показало, что поскольку градиент давления в первую очередь влияет на динамические характеристики пограничного слоя — величину турбулентного трения, — то при сильном ускорении потока это приводит к росту турбулентного числа Прандтля в области логарифмического слоя.

4. Поскольку точность определения величины $\mathrm{Pr_t}$ невелика, а для некоторых теплоносителей экспериментальные зависимости для $\mathrm{Pr_t}$ вообще отсутствуют, верификацию полученных расчетных зависимостей для $\mathrm{Pr_t}$ не всегда удается провести. Поэтому для косвенного подтверждения полученных расчетных зависимостей для $\mathrm{Pr_t}$ выполнено сравнение результатов расчета с имеющимися в литературе экспериментальными данными, входящими в определения величины $\mathrm{Pr_t}$: профилями температуры, скорости, турбулентных потоков тепла и трения, а также коэффициентов трения и теплообмена (чисел Нуссельта и Стантона). Полученные результаты расчетов удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

5. Проведено исследование влияния переменности турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t}$ на характеристики теплообмена, в частности, на число Нуссельта Nu. Показано, что отличие числа Nu, определенного в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr_t} = 0{,}85$, от результатов, полученных в расчетах с использованием уравнения для турбулентного потока тепла, возрастает с уменьшением и увеличением молекулярного числа Прандтля Pr относительно значения Pr = 0,71 для воздуха. Вдув, отсос, положительный и отрицательный градиенты давления также увеличивают это отличие, которое для исследованного диапазона указанных параметров достигает 15 %. Таким образом, если в экспериментах точность определения числа Nu выше, то предположение о постоянстве числа $\mathrm{Pr_t}$ нельзя считать оправданным.

Список литературы

1. **Kays W.M.** Turbulent Prandtl number — where are we? // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1994. Vol. 116. P. 284–295.
2. **McEligot D.M., Taylor M.F.** The turbulent Prandtl number in the near–wall region for low-Prandtl-number gas mixture // Int. J. Heat Mass Transfer. 1996. Vol. 39. P. 1287–1295.
3. **Redjem-Saad L., Ould-Rouiss M., Lauriat G.** Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in pipe flows: effect of Prandtl number // Int. J. of Heat and Fluid Flow. 2007. Vol. 28, No. 5. P. 847–861.
4. **Kawamura H., Ohsaka K., Abe H., Yamamoto K.** DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid // Int. J. of Heat and Fluid Flow. 1998. Vol. 19, No. 5. P. 482–491.
5. **Kawamura H., Abe H., Matsuo Y.** DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects // Int. J. of Heat and Fluid Flow. 1999. Vol. 20, No. 3. P. 196–207.
6. **Moffat R.J., Kays W.M.** A review of turbulent–boundary–layer heat transfer research at Stanford, 1958–1983 // Advances Heat Transfer. 1984. Vol. 16. P. 241–365.

7. **Kader B.A., Yaglom A.M.** Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. Vol. 15. P. 2329–2351.
8. **Kays W.M.** Convective heat and mass transfer. McGraw-Hill Education; 4th edition, 2004. 512 p.
9. **Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н.** К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 69–81.
10. **Пейтел В.К., Роди В., Шойерер Г.** Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса: обзор // Аэрокосмическая техника. 1986. № 2. С. 183–197.
11. **Hanjalich K., Launder B.E.** A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // J. Fluid Mech. 1972. Vol. 52. P. 609–638.
12. **Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.** Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13–25.
13. **Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.** Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40–52.
14. **Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.** Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Расчет теплообмена в трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 42–50.
15. **Жукаускас А.А., Шланчяускас А.А.** Теплообмен в турбулентном потоке жидкости. Вильнюс: Минтас, 1973. 327 с.
16. **Кадер Б.А., Яглом А.М.** Законы подобия для пристенных турбулентных течений // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 15. С. 81–155.
17. **Кокорев Л.С.** О соотношении коэффициентов турбулентного обмена тепла и количества движения в турбулентном потоке жидкого металла // Жидкие металлы: сб. статей. М.: Атомиздат, 1963. С. 27–33.
18. **Гешев П.И.** Турбулентный перенос тепла в пристенном потоке жидкого металла // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1975. № 6. С. 59–64.
19. **Moffat R.J, Kays W.M.** The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental heat transfer with uniform blowing and suction // Int. J. Heat Mass Transfer. 1968. Vol. 11, No. 10. P. 1547–1550.
20. **Thielbahr W.H., Kays W.M., Moffat R.J.** The turbulent boundary layer — experimental heat transfer with blowing, suction, and favorable pressure gradient // Report No. HMT–5. Thermosciences Div. Dept. of Mech. Engineering, Stanford Univ., Stanford, CA, 1969. 190 p.
21. **Leont'ev A., Lushchik V., Makarova M.** Heat and mass transfer in a tube with permeable walls: influence of suction and the Prandtl number // Proceedings of the Eight Intern. Symp. on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Saraevo, Bosnia and Herzegovina, September 15–18, 2015 — Begell House Inc. USA, 2015. P. 145–148.
22. **Blackwell B.F., Kays W.M., Moffat R.J.** The turbulent boundary layer on a porous plate: An experimental study of the heat transfer behavior with adverse pressure gradients // Report No. HMT–16. Thermosciences Div. Dept. of Mech. Engineering, Stanford Univ., Stanford, CA, 1972. 158 p.

Статья поступила в редакцию 22 мая 2017 г.,
после доработки — 20 сентября 2017 г.