

УДК 532.135+532.137  
DOI: 10.15372/PMTF202415483

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

В. Ю. Ляпидевский, В. В. Неверов, С. Р. Кармушин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,

Новосибирск, Россия

E-mails: liapid@hydro.nsc.ru, neverov@hydro.nsc.ru, stepan.karmushin@yandex.ru

Рассмотрены нестационарные одномерные сдвиговые течения вязкоупругой среды. Для сред с несколькими временами релаксации сформулирован общий подход, позволяющий представить известные модели вязкоупругих течений в виде эволюционных систем уравнений первого порядка. Для моделей Джонсона — Сигалмана, Гизекуса и роли-поли найдены условия гиперболичности рассматриваемых классов течений. Уравнения движения вязкоупругой среды представлены в виде полной нелинейной системы законов сохранения. Предложен способ расчета нестационарных разрывных течений в рамках рассматриваемых моделей. Численно исследован класс нестационарных течений Куэтта в зазоре между цилиндрами, используемых в реологических тестах, изучен процесс сдвигового расслоения и его влияние на структуру стационарных течений. Проведено сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** вязкоупругость, нестационарные сдвиговые течения, реология, гиперболические модели

**Введение.** Многие жидкости, которые встречаются в природе или используются в технологических процессах, обладают сложной неньютоновской реологией. Одним из важнейших свойств таких сред является вязкоупругость. В зависимости от условий нагружения жидкости, обладающие этим свойством, имеют характеристики как вязкой жидкости, так и упругого тела (полимерные жидкости, гели, пасты). Сложная реология таких материалов обеспечивается молекулярной структурой [1]. При течении вязкоупругих сред может происходить сдвиговое расслоение — возникновение в течении областей, в которых деформация среды  $\gamma$  значительно больше, чем в остальной части образца. Экспериментальному и теоретическому исследованию процесса сдвигового расслоения посвящено большое число работ, обзор которых приведен в [2]. В частности, в работах [3–5] экспериментально получен профиль скорости, который реализуется в течении Куэтта — Тейлора между двумя соосными цилиндрами, и подтверждено возникновение сдвигового расслоения.

Для описания течений вязкоупругих сред разработано большое количество моделей, каждая из которых имеет свои особенности и область применимости, их описание приведено, например, в [6]. Численные методы для решения уравнений вязкоупругой жидкости в двух- и трехмерных областях были разработаны сравнительно недавно. Обзор современных численных методов приведен в работе [7]. Следует отметить, что большинство

рассматриваемых в [7] методов основаны на регуляризации определяющего соотношения путем добавления диффузионных слагаемых как в закон сохранения импульса, так и в определяющие соотношения, что позволяет обобщить их на многомерный случай.

Результаты систематического исследования вязкоупругой среды Максвелла в сжимаемом случае приведены в монографии [8]. Для моделей сжимаемых сред характерно распространение возмущений с конечной скоростью (гиперболический тип движения). В случае многомерных движений несжимаемой жидкости система уравнений, как правило, не является гиперболической. Исключение составляют модели стационарных течений вязкоупругой жидкости [9]. Однако для некоторых важных классов одномерных нестационарных движений сплошной среды удается исключить неэволюционные переменные из базисной системы уравнений и показать гиперболический характер распространения возмущений. Так, для случая несжимаемой среды Максвелла были найдены подмодели одномерных нестационарных движений вязкоупругой среды, имеющие гиперболический или составной тип, построены точные решения и исследованы групповые свойства уравнений [10–13].

Включение в уравнения движения вязкоупругой среды нескольких времен релаксации для основных типов одномерных течений также приводит к гиперболическим моделям. Такой подход был предложен в работах [12, 14, 15], в которых рассматривались сдвиговые течения вязкоупругой среды в рамках модели Джонсона — Сигалмана [16]. В указанных работах в систему уравнений Джонсона — Сигалмана для сдвиговых течений не добавляется дополнительная вязкость, что позволяет найти условия ее гиперболичности и исследовать структуру решений. В [17] рассмотрены разрывные решения уравнений жидкости Максвелла и предложена классификация возможных разрывов. В [14] показано, что в рамках модели Джонсона — Сигалмана разрывы в течении могут возникать даже при гладких начальных данных.

Для интерпретации реологических измерений важным является класс сдвиговых течений, поскольку такие течения наблюдаются в измерительных системах реометров и вискозиметров. В частности, представляет интерес задача о поведении среды в области нелинейной вязкоупругости. Для корректного моделирования данных экспериментов необходимо предложить метод расчета сдвиговых течений в рамках нелинейных моделей.

В настоящей работе рассматриваются сдвиговые течения вязкоупругой среды в рамках моделей Джонсона — Сигалмана [16], Гизекуса [18] и роли-поли [19]. Для рассматриваемых моделей предложен способ регуляризации системы, обеспечивающий ее гиперболичность. Данный подход позволяет исследовать структуру решений, а также точно оценивать положение и толщину высокоградиентных прослоек в сдвиговых течениях вязкоупругих сред. Предложен численный метод расчета нестационарных сдвиговых течений, основанный на представлении уравнений движения в виде нелинейной системы законов сохранения, и исследован процесс сдвигового расслоения в таких течениях. Проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными.

**1. Математическая модель.** Ниже формулируются различные модели сдвигового течения жидкости и приводятся соответствующие уравнения в дивергентном виде.

1.1. *Модель несжимаемой вязкоупругой жидкости.* Рассматривается общая модель несжимаемой вязкоупругой жидкости

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) &= -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \eta_s \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{v}$  — скорость;  $p$  — давление;  $\boldsymbol{\sigma}$  — “вязкая” часть тензора напряжений;  $\mathbf{f}$  — вектор массовых сил;  $\eta_s$  — вязкость растворителя. Следует отметить, что в рассматриваемых моделях вязкость  $\eta_s$  добавляется для регуляризации модели. Обычно реальные значения  $\eta_s$  на 2–3 порядка меньше значений, используемых в большинстве расчетов. В данной работе модель рассматривается в случае  $\eta_s = 0$ .

В общем случае исследуется многомодовая модель, при этом тензор напряжений представляется в виде суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \tau_i,$$

а компоненты тензора напряжений, соответствующие  $i$ -й моде, связаны с тензором скоростей деформаций через определяющее соотношение

$$\lambda_i \tilde{\tau}_i + \tau_i + h_i(\tau_i) = 2\eta_i D, \quad D = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \quad (1)$$

где  $\lambda_i$  — время релаксации, соответствующее  $i$ -й моде;  $\eta_i$  — динамическая вязкость  $i$ -й моды;  $D$  — тензор скоростей деформации;  $h_i(\tau_i)$  — некоторая функция тензора  $\tau_i$ ;  $\tilde{\tau}_i$  — производная Джонсона — Сигалмана:

$$\tilde{\tau}_i = \frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tau_i + \frac{1 + \alpha_i}{2} (-\nabla \mathbf{v} \cdot \tau_i - \tau_i \cdot (\nabla \mathbf{v})^T) + \frac{1 - \alpha_i}{2} ((\nabla \mathbf{v})^T \cdot \tau_i + \tau_i \cdot \nabla \mathbf{v}),$$

$\alpha_i \in [-1, 1]$ , причем при  $\alpha_i = 1$  производная Джонсона — Сигалмана сводится к верхней конвективной производной, при  $\alpha_i = -1$  — к нижней конвективной производной, а при  $\alpha_i = 0$  — к вращательной производной Яумана.

В случае одномодовой модели ( $n = 1$ ) выделим следующие частные случаи:

1) если  $h = 0$ , то уравнение (1) сводится к определяющему уравнению модели Джонсона — Сигалмана [16], если, кроме того,  $\alpha = 1$ , то модель сводится к модели Максвелла с верхней конвективной производной;

2) если

$$h = \beta_G \frac{\lambda}{\eta} \tau \cdot \tau,$$

то имеем модель Гизекуса [18];

3) если

$$h = 6Z(1 - \chi)[A + \chi\beta_R(A - I)], \quad \tau = G(A - I), \quad G = \frac{\eta}{\lambda}, \quad \chi = \sqrt{\frac{3}{\text{Tr } A}}, \quad 3Z = \frac{\lambda_d}{\lambda_R},$$

то имеет место модель роли-поли [19], где  $G$  — модуль упругости;  $A$  — тензор конформаций;  $\beta_R$ ,  $Z$  — параметры модели [20].

1.2. *Сдвиговые течения.* Рассматривается класс сдвиговых течений между двумя коаксиальными цилиндрами с размером зазора  $l = R_2 - R_1$ , где  $R_2$  — радиус внешнего цилиндра;  $R_1$  — радиус внутреннего цилиндра. Предполагается, что градиент давления отсутствует, т. е.  $\nabla p = 0$ . Вектор скорости и ненулевые компоненты тензора скоростей деформации в полярных координатах  $(r, \varphi)$  имеют вид

$$\mathbf{v} = (0, u(r)), \quad 2D_{r\varphi} = 2D_{\varphi r} = \dot{\gamma} = r \left( \frac{u}{r} \right)_r.$$

Введем следующие обозначения:

$$\tau_i = \begin{pmatrix} \xi_i & \pi_i \\ \pi_i & \zeta_i \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -u/r \\ u_r & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} & 0 \end{pmatrix}, \quad h(\tau_i) = \begin{pmatrix} h^{rr} & h^{r\varphi} \\ h^{\varphi r} & h^{\varphi\varphi} \end{pmatrix}.$$

Запишем в явном виде выражения для компонент производной Джонсона — Сигалмана:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \tau_i = \frac{u}{r} \begin{pmatrix} -2\pi_i & \xi_i - \zeta_i \\ \xi_i - \zeta_i & 2\pi_i \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \tau_i}{\partial t} = \begin{pmatrix} \partial \xi_i / \partial t & \partial \pi_i / \partial t \\ \partial \pi_i / \partial t & \partial \zeta_i / \partial t \end{pmatrix},$$

$$\nabla \mathbf{v} \cdot \tau_i = \begin{pmatrix} -\pi_i u/r & -\zeta_i u/r \\ \xi_i u_r & \pi_i u_r \end{pmatrix}, \quad \tau_i \cdot (\nabla \mathbf{v})^T = \begin{pmatrix} -\pi_i u/r & \xi_i u_r \\ -\zeta_i u/r & \pi_i u_r \end{pmatrix},$$

$$(\nabla \mathbf{v})^T \cdot \tau_i = \begin{pmatrix} \pi_i u_r & \zeta_i u_r \\ -\xi_i u/r & -\pi_i u/r \end{pmatrix}, \quad \tau_i \cdot \nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \pi_i u_r & -\xi_i u/r \\ \zeta_i u_r & -\pi_i u/r \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений для компонент тензора напряжений принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda_i \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \pi_i (1 - \alpha_i) \dot{\gamma} \right) + \xi_i + h_i^{rr} &= 0, \\ \lambda_i \left[ \frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \left( \frac{1 - \alpha_i}{2} \zeta_i - \frac{1 + \alpha_i}{2} \xi_i \right) \dot{\gamma} \right] + \pi_i + h_i^{r\varphi} &= \eta_i \dot{\gamma}, \\ \lambda_i \left( \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} - \pi_i (1 + \alpha_i) \dot{\gamma} \right) + \zeta_i + h_i^{\varphi\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (2) дополняются законом сохранения импульса

$$\rho u_t = \frac{\partial \sigma^{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\sigma^{r\varphi}}{r}, \quad \sigma^{r\varphi} = \sum_{i=1}^n \pi_i. \quad (3)$$

В случае плоского течения Куэтта вектор скорости в декартовых координатах  $(x, y)$  представляется в виде

$$\mathbf{v} = (0, u(x)).$$

В этом случае закон сохранения импульса имеет вид

$$\rho u_t = \frac{\partial \sigma^{xy}}{\partial x}, \quad \sigma^{xy} = \sum_{i=1}^n \pi_i.$$

Компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям (2), в которых следует положить  $\dot{\gamma} = u_x$ .

1.3. *Безразмерные уравнения.* Переидем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} t = \lambda_1 t', \quad r = R_1 + (R_2 - R_1)r' = R_1 + lr', \quad u = \frac{l}{\lambda_1} u', \quad \sigma = G_1 \sigma', \quad h = G_1 h', \\ \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial r'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{l} \frac{q}{1 + qr'}, \quad q = \frac{l}{R_1}. \end{aligned}$$

Вводятся следующие безразмерные параметры:

$$\text{Re} = \frac{\rho l^2}{G_1 \lambda_1^2}, \quad \text{We} = \frac{v_0 \lambda_1}{l}, \quad \varkappa_i = \frac{\eta_i}{\eta_1}, \quad \beta_i = \frac{G_i}{G_1}$$

( $\rho$  — плотность жидкости;  $l$  — размер зазора между цилиндрами;  $G_i = \eta_i / \lambda_i$  — модуль упругости  $i$ -й моды;  $v_0$  — скорость движущейся стенки цилиндра).

Следует отметить, что параметры  $\beta_i$  могут быть исключены путем замены переменных

$$u = u', \quad \tau_i = \beta_i \tau'_i.$$

В этом случае система (2), (3) принимает вид (далее штрихи опускаются)

$$\text{Re } u_t = \frac{\partial \sigma^{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2q}{1 + qr} \sigma^{r\varphi}, \quad \dot{\gamma} = u_r - \frac{q}{1 + qr} u,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \pi_i(1 - \alpha_i)\dot{\gamma} + \frac{1}{\kappa_i}\xi_i + \frac{1}{\kappa_i}h_i^{rr} &= 0, \\ \frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \left(\frac{1 - \alpha_i}{2}\zeta_i - \frac{1 + \alpha_i}{2}\xi_i\right)\dot{\gamma} + \frac{1}{\kappa_i}\pi_i + \frac{1}{\kappa_i}h_i^{r\varphi} &= \dot{\gamma}, \\ \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} - \pi_i(1 + \alpha_i)\dot{\gamma} + \frac{1}{\kappa_i}\zeta_i + \frac{1}{\kappa_i}h_i^{\varphi\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

**1.4. Гиперболические модели.** В данной работе рассматриваются только модели с двумя временами релаксации. Следует отметить, что предложенный метод может быть естественным образом обобщен на случай произвольного числа времен релаксации. Далее рассматриваются модели двух типов с уравнением (1).

В случае модели Джонсона — Сигалмана параметр  $\alpha_1 \in (-1, 1)$  остается произвольным, а  $\alpha_2$  выбирается равным единице для регуляризации данной модели. Для моделей Гизекуса и роли-поли для каждой моды выбирается верхняя конвективная производная  $\alpha_{1,2} = 1$ . Для первой моды функция  $h_1$  не равна тождественно нулю и задается по формулам, приведенным в подп. 1.1. Вторая мода выбирается с целью регуляризовать систему, т. е.  $h_2 = 0$ . Как показано ниже, в случае стационарной модели этот метод не отличается от стандартного метода регуляризации с помощью вязкости растворителя  $\eta_s$ . Однако в нестационарном случае предложенный метод позволяет получить гиперболическую систему уравнений.

В рамках модели Джонсона — Сигалмана с одним и двумя временами релаксации плоские сдвиговые течения рассматривались в работах [15, 21]. В случае двух времен релаксации  $\alpha_1 \in (-1, 1)$ ,  $\alpha_2 = 1$  уравнения модели Джонсона — Сигалмана принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u_t - (\pi_1 + \pi_2)_r &= \frac{2q}{1 + qr}(\pi_1 + \pi_2), \quad \dot{\gamma} = u_r - \frac{q}{1 + qr}u, \\ (\xi_1)_t + \pi_1(1 - \alpha_1)\dot{\gamma} + \xi_1 &= 0, \quad (\pi_1)_t + \left(\frac{1 - \alpha_1}{2}\zeta_1 - \frac{1 + \alpha_1}{2}\xi_1\right)\dot{\gamma} + \pi_1 = \dot{\gamma}, \\ (\zeta_1)_t - \pi_1(1 + \alpha_1)\dot{\gamma} + \zeta_1 &= 0, \quad (\xi_2)_t + \frac{1}{\kappa_2}\xi_2 = 0, \\ (\pi_2)_t + \frac{1}{\kappa_2}\pi_2 &= (\xi_2 + 1)\dot{\gamma}, \quad (\zeta_2)_t - 2\pi_2\dot{\gamma} + \zeta_2 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Как показано в работах [15, 21], выполняя замену переменных

$$z_1 = \frac{1 + \alpha_1}{2}\xi_1 - \frac{1 - \alpha_1}{2}\zeta_1, \quad w_1 = -\frac{1 + \alpha_1}{2}\xi_1 - \frac{1 - \alpha_1}{2}\zeta_1,$$

можно исключить одно уравнение из системы (4). В этом случае переменная  $w_1$  удовлетворяет уравнению  $\partial w_1 / \partial t + w_1 = 0$  и  $w_1 \equiv 0$  является решением системы. Аналогичным образом можно исключить уравнение для переменной  $\xi_2$  и уравнение для переменной  $\zeta_2$ . Таким образом, для второй моды остается только одно дополнительное уравнение для  $\pi_2$ .

В результате для модели Джонсона — Сигалмана получаем систему регуляризованных уравнений

$$\begin{aligned} u_t - \left(\frac{\pi_1 + \pi_2}{\operatorname{Re}}\right)_r &= f_1^{JS}, \quad (\pi_1)_t - (z_1 + 1)u_r = f_2^{JS}, \\ (z_1)_t + (1 - \alpha_1^2)\pi_1u_r &= f_3^{JS}, \quad (\pi_2)_t - u_r = f_4^{JS}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$f_1^{JS} = \frac{2q}{\operatorname{Re}(1 + qr)}(\pi_1 + \pi_2), \quad f_2^{JS} = -\pi_1 - (z_1 + 1)\frac{qu}{1 + qr}, \tag{6}$$

$$f_3^{JS} = -z_1 + (1 + \alpha_1^2)\pi_1 \frac{qu}{1 + qr}, \quad f_4^{JS} = -\frac{\pi_2}{\varkappa} - \frac{qu}{1 + qr}.$$

Плоскому течению Куэтта соответствует предельный случай  $q = 0$ .

Следует отметить, что в случае  $\alpha_1 \in (-1, 1)$  путем растяжения переменных  $\pi_1, \pi_2$ ,  $u$ :

$$\pi'_i = (1 - \alpha_1^2)^{1/2}\pi_i, \quad u' = (1 - \alpha_1^2)^{1/2}u, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

можно исключить параметр скольжения  $\alpha_1$  из системы (5).

Правые части системы уравнений (5) задаются по формулам (6) с учетом растяжения (7).

Различие моделей Гизекуса и роли-поли состоит только в способе выбора правой части  $h$  в определяющем соотношении (1). Поэтому систему уравнений для сдвиговых течений можно записать в общем для обеих моделей виде.

Рассматривается случай, когда правые части системы уравнений, соответствующие первой моде, не равны нулю тождественно:  $h_1 \neq 0$ . При этом оба параметра скольжения полагаются равными единице:  $\alpha_{1,2} = 1$ , что соответствует использованию верхней конвективной производной в уравнениях для первой и второй мод. В дополнение к конкретному представлению правой части уравнений для первой моды в моделях Гизекуса и роли-поли (см. подп. 1.1) правая часть уравнений для второй моды выбирается равной нулю.

Следовательно, система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} u_t - \left( \frac{\pi_1 + \pi_2}{\text{Re}} \right)_r &= f_1, \\ (\xi_1)_t &= f_2, \quad (\pi_1)_t - (\xi_1 + 1)u_r = f_3, \\ (\zeta_1)_t - 2\pi_1u_r &= f_4, \quad (\pi_2)_t - u_r = f_5. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что в моделях Гизекуса и роли-поли различаются только правые части уравнений, которые в случае модели Гизекуса имеют вид

$$\begin{aligned} f_1^G &= \frac{2q}{\text{Re}(1 + qr)}(\pi_1 + \pi_2), \quad f_2^G = -\xi_1 - \beta_G G_1(\xi_1^2 + \pi_1^2), \\ f_3^G &= -\pi_1 - (\xi_1 + 1) \frac{q}{1 + qr} u - \beta_G G_1 \pi_1 (\xi_1 + \zeta_1), \\ f_4^G &= -\zeta_1 - 2\pi_1 \frac{q}{1 + qr} u - \beta_G G_1 (\zeta_1^2 + \pi_1^2), \quad f_5^G = -\frac{1}{\varkappa_2} \pi_2 - \frac{q}{1 + qr} u. \end{aligned} \quad (9)$$

Для модели роли-поли правые части системы уравнений принимают вид

$$\begin{aligned} f_1^{RP} &= \frac{2q}{\text{Re}(1 + qr)}(\pi_1 + \pi_2), \quad f_2^{RP} = -\xi_1 - 6Z(1 - \chi)(1 + \beta_R \chi)\pi_1, \\ f_3^{RP} &= -\pi_1 - 6Z(1 - \chi)[(1 + \beta_R \chi)\zeta_1 + 1] - (\xi_1 + 1) \frac{q}{1 + qr} u, \\ f_4^{RP} &= -\zeta_1 - 6Z(1 - \chi)[(1 + \beta_R \chi)\xi_1 + 2] - 2\pi_1 \frac{q}{1 + qr} u, \\ f_5^{RP} &= -\frac{1}{\varkappa_2} \pi_2 - \frac{q}{1 + qr} u, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\chi = \sqrt{3G_1/(3G_1 + \text{tr } \tau_1)}$ ;  $G_1$  — модуль упругости первой моды.

**2. Дивергентный вид уравнений.** Для численного исследования нестационарных решений рассматриваемых моделей соответствующие системы уравнений необходимо привести к дивергентному виду.

Будем рассматривать систему уравнений в векторной форме

$$\mathbf{U}_t + (\mathbf{F}(\mathbf{U}))_r = \mathbf{G}(\mathbf{U}). \quad (11)$$

Выражения для векторов  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  для каждой рассматриваемой модели приведены ниже.

2.1. *Модель Джонсона — Сигалмана*. При  $\text{Re} > 0$  система (5) может быть записана в виде законов сохранения, аналогичных уравнениям газовой динамики [15]:

$$\begin{aligned} u_t + P_r &= G_1, & \varphi_t - u_r &= G_2, \\ g_t &= G_3, & s_t &= G_4, \end{aligned}$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{\pi_1}{z_1 + 1}, \quad g = \sqrt{\pi_1^2 + (z_1 + 1)^2}, \quad P = -\frac{\pi_1 + \pi_2}{\text{Re}}, \quad s = \pi_2 - \varphi.$$

Выполним замену правых частей системы уравнений:

$$\begin{aligned} G_1^{JS} &= f_1^{JS}, & G_2^{JS} &= \frac{f_2^{JS} - G_3^{JS} \sin \varphi}{q \cos \varphi}, \\ G_3^{JS} &= f_2^{JS} \sin \varphi + f_3^{JS} \cos \varphi, & G_4^{JS} &= f_4^{JS} - G_2^{JS} \end{aligned}$$

( $f_i^{JS}$  определяются по формулам (6)).

Таким образом, систему Джонсона — Сигалмана можно записать в общем векторном виде (11), где

$$\mathbf{U} = (u, \varphi, g, s)^T, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = (P, -u, 0, 0)^T, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = (G_1^{JS}, G_2^{JS}, G_3^{JS}, G_4^{JS})^T.$$

Если характеристики системы

$$\frac{dr}{dt} = l_i, \quad l_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g \cos \varphi + 1}{\text{Re}}}, \quad l_{3,4} = 0$$

вещественны, то модель Джонсона — Сигалмана представляется в виде нелинейной гиперболической системы уравнений.

2.2. *Модели Гизекуса и роли-поли*. Выше было показано, что модели Гизекуса и роли-поли различаются только правыми частями. Следовательно, при  $\text{Re} > 0$  обе системы уравнений можно записать в общем виде

$$\begin{aligned} u_t + P_r &= G_1, & w_t - u_r &= G_2, & g_t &= G_3, \\ (\xi_1)_t &= G_4, & s_t &= G_5, \end{aligned}$$

где

$$w = \frac{\pi_1}{\xi_1 + 1}, \quad g = \pi_1^2 + \zeta_1(\xi_1 + 1), \quad P = -\frac{\pi_1 + \pi_2}{\text{Re}}, \quad s = \pi_2 - w.$$

Выполним замену правых частей системы уравнений:

$$\begin{aligned} G_1 &= f_1, & G_2 &= \frac{f_3 - w f_2}{\xi_1 + 1}, \\ G_3 &= 2\pi_1 f_3 - f_4(\xi_1 + 1) - f_2 \zeta_1, & G_4 &= f_2, & G_5 &= f_5 - G_2, \end{aligned}$$

где функции  $f_i$  в случае модели Гизекуса задаются формулами (9), а в случае модели роли-поли — формулами (10).

Таким образом, системы уравнений Гизекуса и роли-поли можно записать в общем векторном виде (11), где

$$\mathbf{U} = (u, w, g, \xi_1, s)^T, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = (P, -u, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = (G_1, G_2, G_3, G_4, G_5)^T.$$

Так же как и в случае модели Джонсона — Сигалмана, условием гиперболичности системы является вещественность характеристик

$$\frac{dr}{dt} = l_i, \quad l_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\xi_1 + 2}{\text{Re}}}, \quad l_{3,4,5} = 0.$$

**3. Результаты расчетов.** В области гиперболичности система (11) может быть численно проанализирована с помощью известных методов решения систем нелинейных гиперболических уравнений. Далее в работе используется вариация метода Годунова.

Ниже рассмотрено несколько классических задач, связанных с реометрическими течениями. Гиперболичность рассматриваемых систем позволяет строить нестационарные численные решения с учетом нелинейных слагаемых. Эти решения соответствуют экспериментальным данным в области нелинейной вязкоупругости.

**3.1. Задача о разгоне цилиндра.** Рассматривается одномерное сдвиговое течение между двумя коаксиальными цилиндрами. Ставится задача о разгоне одного из цилиндров. Начальные и граничные условия выбираются следующим образом. В начальный момент времени скорость и все компоненты напряжений в жидкости задаются равными нулю. Затем внутренний цилиндр равномерно разгоняется до заданной угловой скорости, которая удерживается постоянной до конца расчета. На рис. 1 приведена зависимость напряжений на внутреннем и внешнем цилиндрах от времени, рассчитанная по моделям Джонсона — Сигалмана и Гизекуса, а также результаты решения задачи о разгоне пластины в плоском случае ( $q = (R_2 - R_1)/R_1 = 0$ ). В расчетах были выбраны следующие значения безразмерных параметров: в случае модели Джонсона — Сигалмана  $\text{Re} = 0,001$ ,  $\varkappa_2 = 10^{-4}$ ,  $q = 0; 0,07$ , в случае модели Гизекуса  $\text{Re} = 0,001$ ,  $\varkappa_2 = 10^{-4}$ ,  $\beta_G = 0,83$ ,  $q = 0; 0,07$ . Размерные параметры задачи имели следующие значения:  $G_1 = 33$  Па,  $\lambda_1 = 3$  с,  $l = 0,7$  мм.

На рис. 1 видно, что при  $t < 1$  зависимость сдвигового напряжения от времени качественно согласуется с соответствующей зависимостью в случае линейной вязкоупругости [6]. Однако при  $t > 1$  напряжение претерпевает скачок, что соответствует переходу к

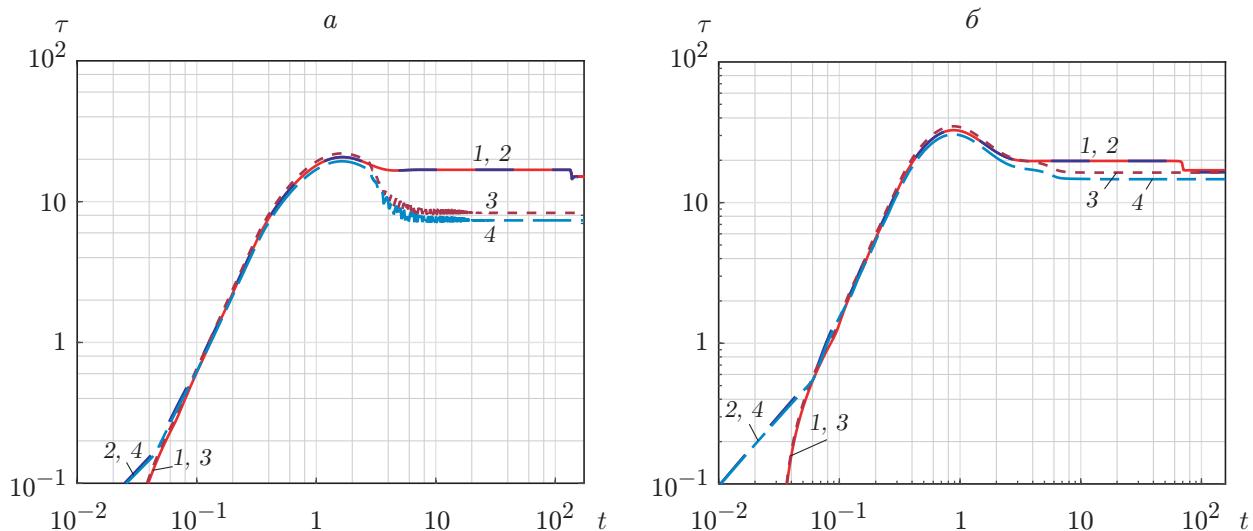


Рис. 1. Зависимость напряжений на внутреннем и внешнем цилиндрах от времени:

*a* — расчет по модели Джонсона — Сигалмана, *б* — расчет по модели Гизекуса; 1, 2 —  $q = 0$  (1 — левая граница, 2 — правая граница), 3, 4 —  $q = 0,067$  (3 — левая граница, 4 — правая граница)

течению со сдвиговым расслоением. Заметим, что время формирования стационарного течения со сдвиговым расслоением зависит как от параметров модели, так и от диаметров внешнего и внутреннего цилиндров. При проведении реологических тестов оно является важным фактором при определении зависимости напряжения на стенках от скорости сдвига.

**3.2. Задача определения зависимости напряжения от скорости сдвига.** С использованием стандартных методов интерпретации реологических измерений рассматривается только случай стационарных течений. Как показано ниже, в случае отчетливо выраженных упругих свойств среды решение, полученное по нестационарной модели при тех же параметрах, может значительно отличаться от стационарного. Различие проявляется в режиме течения со сдвиговым расслоением.

Рассматривается задача определения зависимости напряжения от скорости сдвига при сдвиговом течении Куэтта — Тейлора между двумя цилиндрами. На рис. 2, 3 приведены результаты расчетов по моделям Джонсона — Сигалмана и Гизекуса, а также экспериментальные данные [22] (параметры моделей Джонсона — Сигалмана и Гизекуса, которые были подобраны по этим экспериментальным данным, указаны в работе [23]). На рис. 2, 3 показана также зависимость напряжения от скорости сдвига, полученная с использованием стационарной модели в плоском канале. В расчетах по нестационарной модели Джонсона — Сигалмана были выбраны следующие параметры:  $Re = 0,001$ ,  $\kappa_2 = 10^{-4}$ ,  $q = 0,07$ , в расчетах по модели Гизекуса — параметры  $Re = 0,001$ ,  $\kappa_2 = 10^{-4}$ ,  $\beta_G = 0,83$ ,  $q = 0$ ;  $0,07$ . Размерные параметры задачи имели следующие значения:  $G_1 = 33$  Па,  $\lambda_1 = 3$  с,  $l = 0,7$  мм.

На рис. 2 видно, что результаты расчета по модели Гизекуса хорошо согласуются с экспериментальными данными даже в стационарном случае, однако учет нестационарности и кривизны канала позволяет значительно уменьшить их различие.

В случае модели Джонсона — Сигалмана результаты расчетов по стационарной и нестационарной моделям значительно различаются. Из рис. 3 следует, что зависимость, полученная с использованием стационарной модели, значительно отличается от экспериментальной зависимости. Это различие объясняется тем, что в данном диапазоне скоростей сдвига в среде реализуется течение со сдвиговым расслоением. Заметим, что кри-

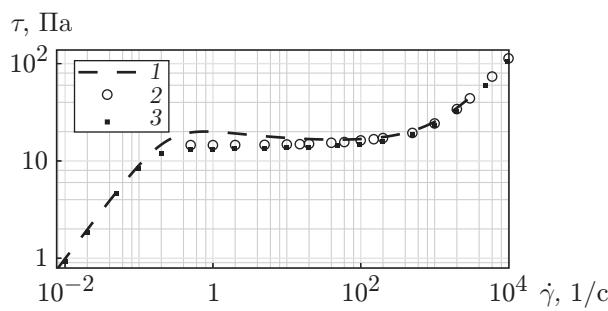


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость напряжения от скорости сдвига при  $G_1 = 33$  Па,  $\lambda_1 = 3$  с: 1, 2 — результаты расчета (1 — по стационарной модели Гизекуса ( $q = 0$ ), 2 — по нестационарной модели Гизекуса ( $q = 0,07$ ), 3 — данные эксперимента [22])

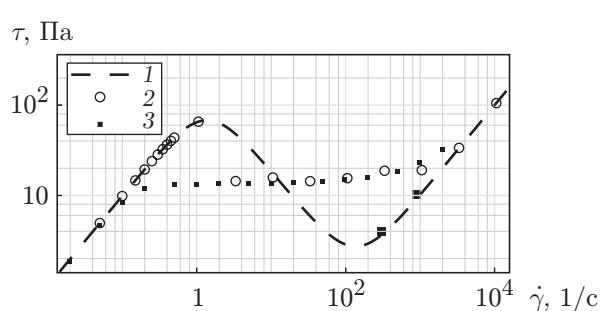


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость напряжения от скорости сдвига при  $G_1 = 33$  Па,  $\lambda_1 = 3$  с: 1, 2 — результаты расчета (1 — по стационарной модели Джонсона — Сигалмана, 2 — по нестационарной модели Джонсона — Сигалмана), 3 — данные эксперимента [22];  $q = 0,07$

вая, соответствующая стационарным течениям, получена для гладкого профиля скорости без сдвигового расслоения потока [21]. В расчетах по нестационарной модели реализуется течение со сдвиговым расслоением, что приводит к лучшему согласованию полученных результатов с экспериментальными данными при указанных скоростях сдвига.

**3.3. Сдвиговое течение.** В работах [3, 5] представлены экспериментально полученные профили скорости при сдвиговых течениях вязкоупругих сред. Результаты, полученные в [3, 5], свидетельствуют о наличии сдвигового расслоения в течении.

Для сравнения с экспериментальными данными в численных расчетах задаются нулевые начальные условия для скорости и напряжений, затем внутренний цилиндр равномерно разгоняется до заданной угловой скорости. Далее угловая скорость внутреннего цилиндра фиксируется и расчет проводится в промежутке времени, равном нескольким десяткам времен релаксации вплоть до момента установления стационарного состояния. Полученный в результате расчета профиль скорости сравнивается с экспериментальными данными.

На рис. 4 точками показаны экспериментальные зависимости сдвигового напряжения от скорости сдвига [3]. Эксперимент проводился для системы цилиндр — цилиндр, радиус внешнего цилиндра равен  $R_2 = 25$  мм, размер зазора между цилиндрами  $R_2 - R_1 = 1$  мм. Различие результатов, полученных по стационарной и нестационарной моделям, объясняется различием структуры решения. Полная нестационарная модель допускает наличие сдвигового расслоения.

На рис. 5 представлена зависимость скорости внутреннего цилиндра от поперечного расстояния при различных значениях характерной скорости сдвига. Видно, что при безразмерной скорости левой стенки, превышающей единицу, вблизи нее формируется сдвиговый пристенный слой, ширина которого увеличивается при увеличении скорости границы.

На рис. 5 показаны профили скорости, полученные в результате расчета по нестационарной модели роли-поли (8) ( $x = (r - R_1)/(R_2 - R_1)$  — безразмерная ширина канала). В расчете были выбраны следующие параметры модели:  $Re = 0,001$ ,  $\varkappa_2 = 0,009$ ,  $Z = 8,25$ ,

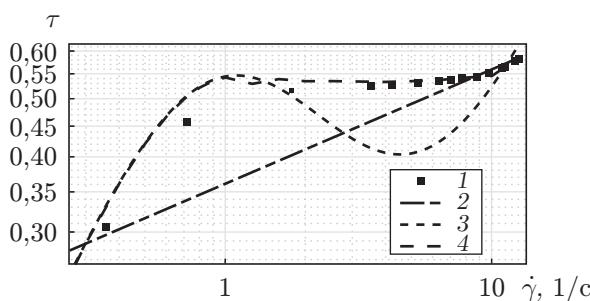


Рис. 4

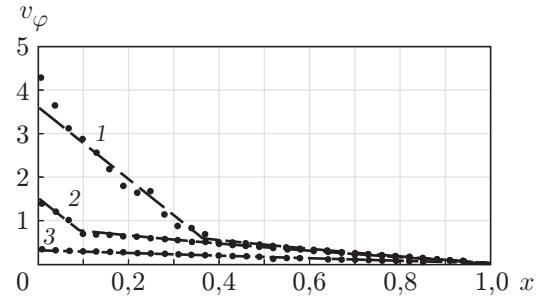


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость напряжения от скорости сдвига при  $\eta_1 = 42,5$  Па·с,  $\eta_2 = 1,8$  Па·с,  $\lambda_1 = 0,35$  с:

1 — экспериментальные данные [3], 2 — степенная модель ( $K = 35,9$  Па·с<sup>n</sup>,  $n = 0,19$ ), 3 — результаты расчета по стационарной модели Джонсона — Сигалмана, 4 — результаты расчета по нестационарной модели Джонсона — Сигалмана

Рис. 5. Распределение безразмерной скорости  $v_\varphi$  при  $G_1 = 121,43$  Па,  $\lambda_1 = 0,35$  с,  $R_1 = 24$  мм,  $R_2 = 25$  мм:

точки — данные эксперимента [3], линии — результаты расчета по модели роли-поли при различных значениях характерной скорости сдвига; 1 —  $\dot{\gamma} = 1$  1/c, 2 —  $\dot{\gamma} = 5$  1/c, 3 —  $\dot{\gamma} = 12$  1/c

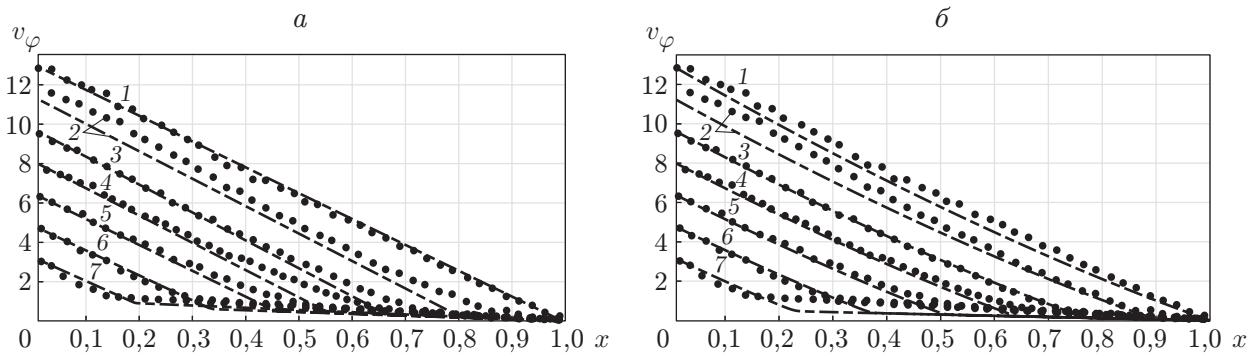


Рис. 6. Распределение безразмерной скорости  $v_\varphi$  при  $G_1 = 108,3$  Па,  $\lambda_1 = 0,82$  с,  $R_1 = 17$  мм,  $R_2 = 17,5$  мм:  
точки — данные эксперимента [5], линии — результаты расчета по нестационарным

моделям Джонсона — Сигалмана (a) и Гизекуса (б); 1 —  $v_\varphi(0) = 13,12$ , 2 —  $v_\varphi(0) = 11,48$ , 3 —  $v_\varphi(0) = 9,84$ , 4 —  $v_\varphi(0) = 8,20$ , 5 —  $v_\varphi(0) = 6,56$ , 6 —  $v_\varphi(0) = 4,92$ , 7 —  $v_\varphi(0) = 3,28$

$q = 0,04$ ,  $\beta_R = 0,001$ . Размерные параметры имели следующие значения:  $G_1 = 121,43$  Па,  $\lambda_1 = 0,35$  с,  $R_1 = 24$  мм,  $R_2 = 25$  мм. Расчетные профили скорости хорошо согласуются с экспериментальными данными. Следует отметить, что модель позволяет точно определить положение сдвигового расслоения, так как в рассматриваемом диапазоне скоростей она является гиперболической.

На рис. 6 точками показаны профили скорости, полученные экспериментально в работе [5]. В данном случае также наблюдается сдвиговое расслоение, при значениях безразмерной скорости внутреннего цилиндра  $v_\varphi \in (1, 12)$  образуются два слоя с различной скоростью сдвига. На рис. 6 приведены также результаты нестационарных расчетов по моделям Джонсона — Сигалмана и Гизекуса. В расчете были выбраны следующие безразмерные параметры: в случае модели Джонсона — Сигалмана  $Re = 0,001$ ,  $\varkappa_2 = 0,042$ ,  $q = 0,0294$ , в случае модели Гизекуса  $Re = 0,001$ ,  $\varkappa_2 = 0,009$ ,  $\beta_G = 0,94$ ,  $q = 0,0294$ . Размерные параметры имели следующие значения:  $G_1 = 108,3$  Па,  $\lambda_1 = 0,82$  с,  $R_1 = 17$  мм,  $R_2 = 17,5$  мм.

Все рассматриваемые модели описывают сдвиговое расслоение, результаты расчетов по этим моделям удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

**Заключение.** В работе рассмотрен класс одномерных нестационарных сдвиговых течений вязкоупругой жидкости в рамках трех моделей: Джонсона — Сигалмана, Гизекуса и роли-поли. Предложен способ регуляризации уравнений движения, при использовании которого в уравнения не добавляется искусственная диффузия, вместо этого используются модели с двумя временами релаксации. Данный подход позволяет представить известные реологические модели движения вязкоупругой жидкости в виде нелинейных гиперболических систем уравнений.

Для трех указанных выше моделей получены условия гиперболичности, найдены характеристики и уравнения в дивергентном виде, что позволяет рассматривать обобщенные разрывные решения. Предложен численный метод получения нестационарных одномерных разрывных решений. Численно решена нестационарная задача о течении Куэтта — Тейлора с переменной скоростью движения одной из границ. Исследовано влияние возникающих нелинейных эффектов на зависимость напряжения от скорости сдвига.

Проведено сравнение результатов расчетов по указанным нелинейным моделям с экспериментальными данными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Bird R. B.** Dynamics of polymeric liquids. V. 2. Kinetic theory / R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, O. Hassager. N. Y. etc.: Wiley, 1987.
2. **Divoux T., Fardin M. A., Manneville S., Lerouge S.** Shear banding of complex fluids // Annual Rev. Fluid Mech. 2016. V. 48. P. 81–103. DOI: 10.1146/annurev-fluid-122414-034416.
3. **Salmon J.-B., Colin A., Manneville S., Molino F.** Velocity profiles in shear-banding wormlike micelles // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90, N 22. 228303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.228303.
4. **Fardin M. A., Ober T. J., Grenard V., et al.** Interplay between elastic instabilities and shear-banding: Three categories of Taylor — Couette flows and beyond // Soft Matter. 2012. V. 8, N 39. P. 10072–10089. DOI: 10.1039/C2SM26313K.
5. **Cheng P., Burroughs M. C., Leal L. G., Helgeson M. E.** Distinguishing shear banding from shear thinning in flows with a shear stress gradient // Rheol. Acta. 2017. V. 56. P. 1007–1032.
6. **Bird R. B.** Dynamics of polymeric liquids. V. 1. Fluid mechanics / R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager. N. Y.: John Wiley and Sons Inc., 1987.
7. **Alves M. A., Oliveira P. J., Pinho F. T.** Numerical methods for viscoelastic fluid flows // Annual Rev. Fluid Mech. 2021. V. 53. P. 509–541. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010719-060107.
8. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
9. **Joseph D. D., Renardy M., Saut J. C.** Hyperbolicity and change of type in the flow of viscoelastic fluids // Arch. Rational Mech. Anal. 1985. V. 87. P. 213–251. DOI: 10.1007/BF00250725.
10. **Пухначев В. В.** Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 16–23.
11. **Meleshko S. V., Moshkin N. P., Pukhnachev V. V., Samatova V.** On steady two-dimensional analytical solutions of the viscoelastic Maxwell equations // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2019. V. 270. P. 1–7.
12. **Ляпидевский В. Ю., Пухначев В. В.** Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 84–97.
13. **Pukhnachev V. V., Fominykh E. Yu.** Symmetries in equations of incompressible viscoelastic Maxwell medium // Lithuanian Math. J. 2018. V. 58, N 3. P. 309–319.
14. **Liapidevskii V. Yu., Pukhnachev V. V., Tani A.** Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium // Wave Motion. 2011. V. 48, N 8. P. 727–737. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2011.04.002.
15. **Ляпидевский В. Ю.** Течение Куэтта вязкоупругой среды максвелловского типа с двумя временами релаксации // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2018. Т. 300. С. 146–157.
16. **Johnson M. W. (Jr), Segalman D.** A model for viscoelastic fluid behavior which allows non-affine deformation // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1977. V. 2, N 3. P. 255–270. DOI: 10.1016/0377-0257(77)80003-7.
17. **Руткевич И. М.** Некоторые общие свойства уравнений динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, № 1. С. 42–51.
18. **Giesekus H.** A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1982. V. 11, N 1/2. P. 69–109. DOI: 10.1016/0377-0257(82)85016-7.
19. **Likhtman A. E., Graham R. S.** Simple constitutive equation for linear polymer melts derived from molecular theory: Rolie-Poly equation // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2003. V. 114, N 1. P. 1–12. DOI: 10.1016/S0377-0257(03)00114-9.

20. **Carter K. A., Girkin J. M., Fielding S. M.** Shear banding in large amplitude oscillatory shear (LAOStrain and LAOStress) of polymers and wormlike micelles // *J. Rheology*. 2016. V. 60, N 5. P. 883–904. DOI: 10.1122/1.4960512.
21. **Malkus D. S., Nohel J. A., Plohr B. J.** Analysis of new phenomena in shear flow of non-Newtonian fluids // *SIAM J. Appl. Math.* 1991. V. 51, N 4. P. 899–929. DOI: 10.1137/0151044.
22. **Haward S. J., Kitajima N., Toda-Peters K., et al.** Flow of wormlike micellar solutions around microfluidic cylinders with high aspect ratio and low blockage ratio // *Soft Matter*. 2019. V. 15, N 9. P. 1927–1941. DOI: 10.1039/c8sm02099j.
23. **Varchanis S., Haward S. J., Hopkins C. C., et al.** Evaluation of constitutive models for shear-banding wormlike micellar solutions in simple and complex flows // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2022. V. 307. 104855.

*Поступила в редакцию 2/IV 2024 г.,  
после доработки — 24/IV 2024 г.  
Принята к публикации 27/IV 2024 г.*

---