12. **Kuznetsov V. V., Nakoryakov V. E., Pokusaev B. G., Shreiber I. R.** Propagation of perturbations in a gas liquid mixture.— «J. Fluid mech.», 1978, vol. 85.
13. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р., Кузнецов В. В., Малых Н. В.** Экспериментальное исследование ударных волн в жидкости с пузырьками газа.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975.

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С УПРОЧНЕНИЕМ

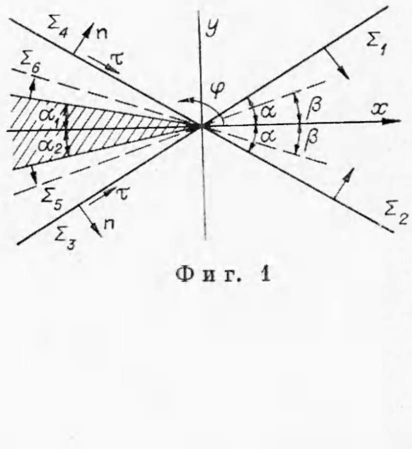
В. А. Баскаков

(*Воронеж*)

Изучаются закономерности и характер деформирования упругопластического материала после прохождения в нем ударных волн, вызванных довольно интенсивными источниками возмущений. На достаточно далеком расстоянии от источников фронты волн в окрестности точки их взаимодействия можно считать плоскими. Модель среды предполагает учет механизмов упрочнения [1]: кинематического и изотропного. С использованием аппарата теории разрывов [2] и методики [3—5] строятся сначала упругое, а затем упругопластическое автомодельные решения задачи. Основная трудность при этом состоит в отыскании заранее неизвестных линий раздела областей упругого и пластического деформирования материала, на которых ставятся граничные условия для решения квазилинейной системы дифференциальных уравнений в диссипативных областях. Изучается вопрос о влиянии параметра упрочнения на качественную сторону взаимодействия волн. Основные соотношения исследуются при помощи ЭЦВМ; получены конкретные числовые результаты. Представленные решения являются естественным развитием работ [5—7].

Пусть в недеформированную упругопластическую среду под углом $0 < 2\alpha < \pi$ (фиг. 1) распространяются со скоростью G две плоские ударные волны в виде ступеньки Σ_1 и Σ_2. В рамках теории малых упругопластических деформаций предполагается, что общая деформация e_{ij} складывается из упругой e_{ij}^e и пластической e_{ij}^p частей и выражается через перемещения u_i формулами Коши ($i, j = 1, 2, 3$). Оси x_1, x_2, x_3 ортогональны, все искомые величины считаются не зависящими от x_3. Решение задачи ищется в подвижной системе координат ($x = x_1 - St$, $y = x_2$), связанной с точкой взаимодействия волн ($S = G(\sin\alpha)^{-1}$, t — время). В дальнейшем появляющиеся упругие и нейтральные области назовем бездиссипативными в отличие от пластических, в которых происходит диссипация энергии. В бездиссипативных областях изменения напряжений и деформаций определяются упругими зависимостями, в то время как в пластических областях следует привлекать условие пластичности и ассоциированный закон пластического течения.

В процессе взаимодействия волн может оказаться, что бездиссипативная область заполняет все пространство за исходными волнами. В системе координат x, y поле напряжений, скоростей и деформаций будет тогда стационарным за фронтами этих волн, и решение можно считать автомодельным, т. е. можно положить, что компоненты тензора напряжений σ_{ij}, деформа-



Фиг. 1

ций e_{ij} и скоростей перемещений v_i зависят только от $\xi \equiv \operatorname{ctg} \varphi = xy^{-1}$, где φ — угол, отсчитываемый от положительного направления оси x против хода часовой стрелки (так $\varphi_+ = +\alpha$ для волны Σ_1, $\varphi_- = -\alpha$ для волны Σ_2 (см. фиг.)).

Используя линейный закон Гука, формулы Коши и положив $u_1 = yu(\xi)$, $u_2 = yv(\xi)$, $u_3 = yw(\xi)$, получим следующую систему уравнений движения:

$$(\lambda + 2\mu + \mu\xi^2 - \rho S^2)u'' - (\lambda + \mu)\xi v'' = 0,$$
$$-(\lambda + \mu)\xi u'' + ((\lambda + 2\mu)\xi^2 + \mu - \rho S^2)v'' = 0,$$
$$(\mu(1 + \xi^2) - \rho S^2)w'' = 0,$$

где ρ — плотность среды; λ, μ — параметры Ламэ, штрихи означают производные по ξ.

Решение этой системы всюду тривиально:

$$u = a\xi + b, \; v = c\xi + d, \; w = e\xi + f,$$

где определитель отличен от нуля (a, b, c, d, e, f — константы). Нетривиальное решение системы имеет место при условии

$$(\rho G^2 - \mu)^2(\rho G^2 - (\lambda + 2\mu)) = 0,$$

где G — новая переменная, определяемая соотношением $G^2(1 + \xi^2) = S^2$. Таким образом, в теле могут распространяться как безвихревые, так и сдвиговые ударные волны соответственно со скоростями $G_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}$, $G_2^2 = \mu\rho^{-1}$.

Рассмотрим случай взаимодействия двух безвихревых ударных волн. В этом случае в пространстве осуществляется состояние плоской деформации ($u_3 = 0$), поэтому из трех уравнений движения останутся только первые два.

1. Построение упругого решения. Определитель системы уравнений движения равен нулю при следующих значениях угла $\varphi : \overset{*}{\varphi}_{1,2} = \pm\alpha + l\pi$, определяющих положение фронтов продольных волн, распространяющихся со скоростью G_1, и $\overset{*}{\varphi}_{3,4} = \pm\beta + l\pi = \pm \arcsin(\mu/(\lambda + 2\mu))^{1/2} \times \sin\alpha + l\pi$, определяющих положение фронтов поперечных волн, распространяющихся со скоростью G_2. Из условия поставленной задачи следует, что если эти волны существуют, то l может быть только нечетным целым числом. Для определенности можно положить $l = 1$. Положения безвихревых ударных волн Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 определяются соотношениями $\xi_{1,3} = \operatorname{ctg}\alpha$, $\xi_{2,4} = -\operatorname{ctg}\alpha$, а сдвиговых $\Sigma_5\Sigma_6$ — соотношениями $\xi_{5,6} = \operatorname{ctg}(\pi \pm \beta) = \pm\operatorname{ctg}\beta$. Однако можно строго доказать, что в данной постановке в результате взаимодействия безвихревых ударных волн поверхностей сильного разрыва Σ_5, Σ_6 не образуется.

Действительно, предположим наличие поверхностей Σ_5 и Σ_6 и найдем напряженно-деформированное состояние среды в окрестности точки взаимодействия волн. В дальнейшем зону между Σ_1 и Σ_4 будем обозначать цифрой 1, Σ_2, Σ_3 — 2, $\Sigma_3\Sigma_5$ — 3, $\Sigma_4\Sigma_6$ — 4, $\Sigma_5\Sigma_6$ — 5. Пусть интенсивности исходных волн Σ_1 и Σ_2 равны соответственно γ_1 и γ_2. Из условий совместности Адамара для нормальной составляющей скорости перемещений в зонах 1 и 2 имеем $V_m = -G_1\gamma_m$ (m означает номер зоны). Тогда $v_1^{(m)} = V_m \sin\alpha$, $v_2^{(m)} = (-1)^m V_m \cos\alpha$ (здесь и в дальнейшем по m не суммировать). Используя то, что в подвижной системе координат скорости перемещений выражаются формулами $v_i = -Su_{i,x}$, можно получить деформации, а затем по закону Гука и напряжения в этих зонах:

$$e_{11}^{(m)} = \gamma_m \sin^2\alpha, \; e_{12}^{(m)} = (-1)^m\gamma_m \sin\alpha\cos\alpha, \; e_{22}^{(m)} = \gamma_m\cos^2\alpha, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{11}^{(m)} = \gamma_m (\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha), \quad \sigma_{22}^{(m)} = \gamma_m (\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha),$$
$$\sigma_{12}^{(m)} = (-1)^m \gamma_m \mu \sin 2\alpha, \quad \sigma_{33}^{(m)} = \lambda \gamma_m \, (m = 1, 2).$$

Полагая $u_1^{(m)} = a_m x + b_m y$, $u_2^{(m)} = c_m x + d_m y$, найдем коэффициенты $a_m = \varkappa_m \sin \alpha$, $c_m = \omega_m \sin \alpha$, где $\varkappa_m = \gamma_m \sin \alpha$; $\omega_m = (-1)^m \gamma_m \cos \alpha$. Из условия непрерывности перемещений на поверхностях Σ_1 и Σ_2 получим $b_m = (-1)^m \varkappa_m \cos \alpha$, $d_m = (-1)^m \omega_m \cos \alpha$. Таким образом, в зонах 1 и 2 перемещения будут известны.

Принимая далее для $m = 3, 4, 5$ вид зависимости коэффициентов a_m, b_m, $\varkappa_m$, ω_m такой же, как для $m = 1, 2$, из условия непрерывности перемещений на поверхностях Σ_3 и Σ_4 получим $b_3 = (2\varkappa_2 - \varkappa_3) \cos \alpha$, $d_3 = (2\omega_2 - \omega_3) \cos \alpha$, $b_4 = (\varkappa_4 - 2\varkappa_1) \cos \alpha$, $d_4 = (\omega_4 - 2\omega_1) \cos \alpha$. Из условия непрерывности перемещений на Σ_5 и Σ_6 для коэффициентов b_5, d_5 получим по два выражения, приравняв которые, имеем соотношения

$$2\varkappa_5 \operatorname{ctg} \beta = (\varkappa_3 + \varkappa_4)(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) + 2(\varkappa_1 + \varkappa_2) \operatorname{ctg} \alpha; \tag{1.2}$$

$$2\omega_5 \operatorname{ctg} \beta = (\omega_3 + \omega_4)(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) + 2(\omega_1 + \omega_2) \operatorname{ctg} \alpha. \tag{1.3}$$

Известно, что на безвихревых ударных волнах непрерывна касательная составляющая скорости перемещений v_τ, а на эквиволюминальных — нормальная v_n. Это соответствует тому, что на первых из них $[u_{\tau,n}] = 0$, а на вторых — $[u_{n,n}] = 0$, где квадратными скобками обозначен разрыв данных величин. Если теперь применить эти соотношения к волнам Σ_3, Σ_4, Σ_5, Σ_6, предварительно продифференцировав по нормали выражения $u_\tau = u_i \tau_i$, $u_n = u_i n_i$, то после преобразований получим следующие уравнения:

$$(1.4) \quad \gamma_2 \sin 2\alpha = \varkappa_3 \cos \alpha + \omega_3 \sin \alpha, \quad \gamma_1 \sin 2\alpha = \varkappa_4 \cos \alpha - \omega_4 \sin \alpha,$$
$$(\varkappa_3 - \varkappa_5) \sin \beta = (\omega_3 - \omega_5) \cos \beta, \quad (\varkappa_4 - \varkappa_5) \sin \beta = (\omega_5 - \omega_4) \cos \beta,$$

которые вместе с (1.2), (1.3) образуют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно $\varkappa_3$, $\varkappa_4$, $\varkappa_5$, ω_3, ω_4, ω_5 и имеют решение

$$\varkappa_3 = \varkappa_4 = \varkappa_5 = (\gamma_1 + \gamma_2) \sin \alpha, \quad \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = (\gamma_2 - \gamma_1) \cos \alpha. \tag{1.5}$$

Из (1.5), в частности, следует, что решение в зонах 3, 4, 5 одинаково и является простой суперпозицией решений в зонах 1, 2. Это означает отсутствие в пакете волн поверхностей Σ_5 и Σ_6. В самом деле, вычисляя компоненты векторов перемещений, тензоров деформаций и напряжений в зонах 3, 4 и 5, имеем ($m = 3, 4, 5$)

$$(1.6) \quad u_1^{(m)} = (\gamma_1 + \gamma_2)\, x \sin^2 \alpha + (\gamma_2 - \gamma_1)\, y \sin \alpha \cos \alpha,$$
$$u_2^{(m)} = (\gamma_2 - \gamma_1)\, x \sin \alpha \cos \alpha + (\gamma_1 + \gamma_2)\, y \cos^2 \alpha,$$
$$e_{11}^{(m)} = (\gamma_1 + \gamma_2) \sin^2 \alpha; \quad e_{22}^{(m)} = (\gamma_1 + \gamma_2) \cos^2 \alpha,$$
$$e_{12}^{(m)} = (\gamma_2 - \gamma_1) \sin \alpha \cos \alpha; \quad \sigma_{33}^{(m)} = \lambda (\gamma_1 + \gamma_2),$$
$$\sigma_{11}^{(m)} = (\gamma_1 + \gamma_2)(\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha), \quad \sigma_{22}^{(m)} = (\gamma_1 + \gamma_2)(\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha),$$
$$\sigma_{12}^{(m)} = \mu (\gamma_2 - \gamma_1) \sin 2\alpha.$$

Из (1.6) видно, что искомые величины не зависят от m.

Таким образом, полученное упругое решение (1.1), (1.6) завершает доказательство нашего утверждения. В дальнейшем зоны 3, 4, 5 будем обозначать как одну третью зону.

2. Построение упругопластического решения. Случай идеального упругопластического материала. При определении этого решения предполагаем, что в теле также осуществляется состояние плоской деформации, а материал пластически несжимаем. Однако в дальнейшем для сокращения письма иногда будем продолжать пользоваться тензорными обозначениями, имея при этом в виду только не равные нулю величины. Пусть γ_m таковы, что в зонах 1, 2 величина $I_{(m)}$, характеризующая интенсивность напряжений, равна $I_{(m)} = 0{,}5S_{ij}^{(m)}S_{ij}^{(m)} = z_m^2k^2$ ($m = 1, 2$, S_{ij} — компоненты девиатора напряжений, k — предел текучести при чистом сдвиге, $0 < z_m \leqslant 1$). Тогда в этих зонах справедливо решение, полученное в п. 1. При этом в третьей зоне могут появиться диссипативные области только в том случае, когда волны Σ_3, Σ_4 становятся нейтральными, а границами этих областей являются поверхности слабого разрыва α_1 и α_2 [4—5] (см. фиг. 1). Кроме этого, должно выполняться неравенство $I_{(3)} \geqslant k^2$, в противном случае справедливо решение (1.6). Подсчитав с помощью (1.1), (1.6) интенсивность напряжений во всех трех зонах, имеем

$$(2.1)\quad I_{(m)} = \frac{4}{3}\mu^2\gamma_m^2 = z_m^2k^2,\quad I_{(3)} = I_{(1)} + I_{(2)} + (2 - 3\sin^2 2\alpha)\sqrt{I_{(1)}I_{(2)}}.$$

Указанное неравенство теперь приобретает вид

$$(2.2)\qquad (z_1 + z_2)^2 - 3z_1z_2\sin^2 2\alpha \geqslant 1.$$

Пусть (2.2) выполнено. Очевидно, что пластический веер в третьей зоне должен находиться между двумя нейтральными областями этой зоны. Положение волны нагрузки $\varphi_1 = \pi - \alpha_1$ определяется из соотношения [6]

$$(2.3)\qquad c_1\sin\alpha - G_1\sin\alpha_1 = 0,$$

где c_1 — скорость ее распространения, подлежащая определению.

Непрерывное решение в областях, деформирующихся пластически, в переменных x_i, t при условии пластичности Мизеса описывается уравнениями

$$(2.4)\qquad \dot\sigma_{ij} = \lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu\left(v_{i,j} + v_{j,i} - 2\dot e_{ij}^p\right),$$
$$\sigma_{ij,j} = \rho\dot v_i,\quad \sqrt{2}k\dot e_{ij}^p = \varkappa S_{ij},\quad S_{ij}\dot S_{ij} = 0,$$

где $\varkappa = (\dot e_{ij}^p\dot e_{ij}^p)^{1/2} > 0$; точка означает производную по времени; δ_{ij} — символ Кронекера. Записав (2.4) в разрывах и используя то обстоятельство, что на всех поверхностях Σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) пластические деформации непрерывны, из геометрических и кинематических условий совместности первого порядка [2] для скорости волны α_1 можно получить

$$(2.5)\qquad 2k^2c_1^2 = A \pm \left(A^2 - 4k^2G_2^2\left[(k^2G_1^2 - G_2^2B_0^2) - G_3^2B^2\right]\right)^{1/2},$$

где $A = k^2G_0^2 - G_2^2B_0^2$; $G_0^2 = G_1^2 + G_2^2$; $B_0^2 = b_{11}^2 + b_{22}^2$; $G_3^2 = G_1^2 - G_2^2$; $B^2 = (b_{11}\nu_2 - b_{22}\nu_1)^2$; $b_{11} = S_{11}^{(3)}\nu_1 + S_{12}^{(3)}\nu_2$; $b_{22} = S_{12}^{(3)}\nu_1 + S_{22}^{(3)}\nu_2$; $\nu_1 = \sin\alpha_1$; $\nu_2 = \cos\alpha_1$. Как следует из (2.5), скорость слабой волны нагрузки существенно зависит от напряженного состояния среды перед волной, что является следствием нелинейности исходной системы уравнений. Подставляя (2.5) в (2.3), получим уравнение для определения положения волны нагрузки, предварительно определив напряжения перед волной. Для этого воспользуемся соотношениями

$$(2.6)\quad [v_i]\,n_i^{(m)} = \psi_m;\ G_1[\sigma_{ij}] = -\psi_m\left(\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i^{(m)}n_j^{(m)}\right)\quad (m = 3,\ 4),$$

которые должны выполняться на поверхностях Σ_3, Σ_4 (здесь ψ_m — величины, характеризующие интенсивности этих волн, n_i — составляющие вектора единичной нормали к соответствующей волне). В отличие от упругого решения значения $\psi_m = -G_1\gamma_m$ определяются теперь из условия текучести $I_{(3)} = k^2$. При этом можно положить, что σ_{ij}, e_{ij}^p, v_i, $\varkappa$ зависят только от ξ (или от $\varphi = \operatorname{arcctg} \xi$). Тогда система уравнений (2.4) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Тривиальное решение ее соответствует нейтральному напряженному состоянию среды. Поэтому найденные из (2.6) напряжения и скорости перемещений, а также значения $e_{ij}^{p(3)} = \varkappa^{(3)} = 0$ являются граничными условиями для получения нетривиального решения упомянутой системы уравнений. Они ставятся на поверхности $\varphi_1 = \pi - \alpha_1 (\varphi_2 = \pi + \alpha_2)$. Перейдем к их определению. Из второго соотношения (2.6), записанного на поверхностях Σ_3 и Σ_4, и условия пластичности получим соответственно

$$\psi_{3,4} = \frac{3}{4}\frac{G_1}{\mu}\left(D_{2,1} \pm \left(D_{2,1}^2 - \frac{4}{3}\left(z_{2,1}^2 - 1\right)k^2\right)^{1/2}\right). \tag{2.7}$$

Здесь $D_{1,2} = S_{11}^{(1,2)}\left(\sin^2\alpha - \frac{1}{3}\right) + S_{22}^{(1,2)}\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{3}\right) + S_{12}^{(1,2)}\sin 2\alpha - \frac{1}{3}S_{33}^{(1,2)}$, величины напряжений $S_{ij}^{(1,2)}$ вычисляются из (1.1), где γ_1 и γ_2 определяются теперь из первого соотношения (2.1). Второй корень (2.7) посторонний, так как, например, при $z_1 = z_2 = 1$ он обращается в нуль, что ведет к отсутствию поверхностей Σ_3, Σ_4. Таким образом, соотношения (2.3), (2.5)—(2.7) полностью определяют волну α_1 и граничные условия на ней для исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если построение решения вести, проходя последовательно зоны 1—3—2, то граничные условия принимают вид

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}^{(3)} = \sigma_{ij}^{(1)} - \psi_4 G_1^{-1}\left(\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i^{(4)} n_j^{(4)}\right),\\ v_i^{(3)} = v_i^{(1)} + \psi_4 n_i^{(4)},\ \varkappa^{(3)} = e_{ij}^{p(3)} = 0,\end{gathered} \tag{2.8}$$

где $v_i^{(1)}$ вычисляются из упругого решения задачи, а ψ_4 — из (2.7).

Если же построение решения вести, проходя последовательно зоны 2—3—1, то граничные условия принимают вид

$$\sigma_{ij}^{(3)} = \sigma_{ij}^{(2)} - \psi_3 G_1^{-1}\left(\lambda\delta + 2\mu n_i^{(3)} n_j^{(3)}\right),\ v_i^{(3)} = v_i^{(2)} + \psi_3 n_i^{(3)},\ \varkappa^{(3)} = e_{ij}^{p(3)} = 0,$$

где $v_i^{(2)}$ определяются из упругого решения задачи, а ψ_3 — из (2.7). В дальнейшем для определенности будет реализована первая схема построения решения.

Введем безразмерные величины соотношениями

$$\begin{gathered}\bar\sigma_{ij} = \sigma_{ij}k^{-1},\ \bar e_{ij}^p = \sqrt{2}\,\mu k^{-1} e_{ij},\ \bar\varkappa = \sqrt{2}\mu k^{-1}\varkappa,\\ \bar v_i = \left((\lambda + 2\mu)\rho k^{-2}\right)^{1/2} v_i,\end{gathered} \tag{2.9}$$

с помощью которых запишем исходную систему уравнений и граничные условия (2.8). Тогда система одиннадцати обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$\begin{gathered}\bar\sigma_{ij}^{(3)} = \bar\sigma_{ij}^{(1)} - \frac{3}{2}\left(\bar D_1 + \sqrt{\bar D_1^2 - \frac{4}{3}\left(z_1^2 - 1\right)}\right)\left(\nu(1-2\nu)^{-1}\delta_{ij} + n_i^{(4)} n_j^{(4)}\right),\\ \bar v_i^{(3)} = \bar v_i^{(1)} + \frac{3}{2}\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(\bar D_1 + \sqrt{\bar D_1 - \frac{4}{3}\left(z_1^2 - 1\right)}\right),\ \bar e_{ij}^{p(3)} = \bar\varkappa^{(3)} = 0\end{gathered} \tag{2.10}$$

может быть численно решена с помощью одного из известных методов, например методом Рунге—Кутта (ν — коэффициент Пуассона). При этом указанную систему уравнений следует привести к виду, необходимому для применения данного метода. Прежде всего отметим, что неравенство $\dot{\bar{\varkappa}} > 0$, которое выражает условие положительности скорости диссипации механической энергии при пластическом деформировании среды, теперь переходит в следующие: $\bar{\varkappa}' > 0$ в верхней полуплоскости ($y > 0$) и $\bar{\varkappa}' < 0$ — в нижней полуплоскости ($y < 0$). Так как система уравнений линейна и однородна относительно производных, то она удовлетворяется следующими значениями: $\bar{\sigma}'_{ij} = \bar{e}^{p\prime}_{ij} = \bar{v}'_i = \bar{\varkappa}' = 0$, что противоречит указанным неравенствам. Отсюда следует, что детерминант системы в пластических областях должен обращаться в нуль. В силу этого только десять уравнений системы являются независимыми. Поскольку $\bar{\varkappa}' \neq 0$, все величины $\bar{\sigma}'_{ij}$, $\bar{e}^{p\prime}_{ij}$, $\bar{v}'_i$ могут быть выражены через значение $\bar{\varkappa}'$, для которого имеется некоторая свобода выбора. За счет этого упомянутая система обыкновенных дифференциальных уравнений будет иметь неединственное решение. Поэтому искомое решение будем рассматривать как предельное для среды с упрочнением, когда параметры упрочнения стремятся к нулю.

3. Построение упругопластического решения в среде с упрочнением. Система определяющих уравнений состоит из первых двух соотношений (2.4) и уравнений [6]

$$\sqrt{2}\,(k + r\varkappa)\,\dot{e}^p_{ij} = \left(S_{ij} - qe^p_{ij}\right)\dot{\varkappa},\quad \left(S_{ij} - qe^p_{ij}\right)\left(\dot{S}_{ij} - q\dot{e}^p_{ij}\right) = 2r\,(k + r\varkappa)\,\dot{\varkappa}, \tag{3.1}$$

где $r > 0$, $q > 0$ — параметры упрочнения материала. Принимается, что имеет место два механизма упрочнения: кинематическое и изотропное. Вид поверхности нагружения определяется умножением самого на себя первого соотношения (3.1), имеем $\left(S_{ij} - qe^p_{ij}\right)\left(S_{ij} - qe^p_{ij}\right) = 2\,(k + r\varkappa)^2$. Второе соотношение (3.1) получено дифференцированием поверхности нагружения по времени. С использованием (2.9) искомая система уравнений по переменной φ принимает вид

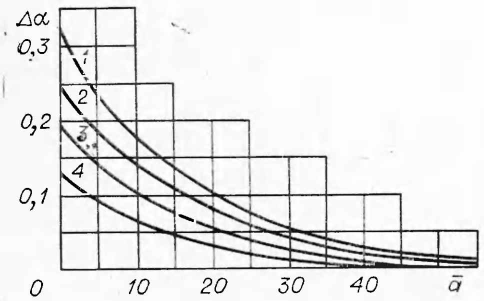
$$\begin{gathered}
\bar{\sigma}'_{11} + \bar{v}'_1 \sin\alpha - \nu\,(1-\nu)^{-1}\operatorname{ctg}\varphi\cdot\sin\alpha\cdot\bar{v}'_2 + \sqrt{2}\,\bar{e}^{p\prime}_{11} = 0,\\
\bar{\sigma}'_{12} + \sin\alpha\,(1-2\nu)(2\,(1-\nu))^{-1}\left(\bar{v}'_2 - \operatorname{ctg}\varphi\cdot\bar{v}'_1\right) + \sqrt{2}\,\bar{e}^{p\prime}_{12} = 0,\\
\bar{\sigma}'_{22} + \nu\,(1-\nu)^{-1}\sin\alpha\cdot\bar{v}'_1 - \operatorname{ctg}\varphi\cdot\sin\alpha\cdot\bar{v}'_2 + \sqrt{2}\bar{e}^{p\prime}_{22} = 0,\\
\bar{\sigma}'_{33} + \sin\alpha\cdot\nu\,(1-\nu)^{-1}\left(\bar{v}'_1 - \operatorname{ctg}\varphi\cdot\bar{v}'_2\right) + \sqrt{2}\bar{e}^{p\prime}_{33} = 0,\\
\left(\bar{\sigma}'_{11} - \operatorname{ctg}\varphi\cdot\bar{\sigma}'_{12}\right)\sin\alpha + \bar{v}'_1 = 0,\quad \left(\bar{\sigma}'_{12} - \operatorname{ctg}\varphi\cdot\bar{\sigma}'_{22}\right)\sin\alpha + \bar{v}'_2 = 0,\\
\left(1 + (\bar{a} - \bar{q})\,\bar{\varkappa}\right)\bar{e}^{p\prime}_{11} - \left(\bar{S}_{11} - \sqrt{2}\bar{q}\bar{e}^p_{11}\right)\bar{\varkappa}' = 0,\\
\left(1 + (\bar{a} - \bar{q})\,\bar{\varkappa}\right)\bar{e}^{p\prime}_{12} - \left(\bar{S}_{12} - \sqrt{2}\bar{q}\bar{e}^p_{12}\right)\bar{\varkappa}' = 0,\\
\left(1 + (\bar{a} - \bar{q})\,\bar{\varkappa}\right)\bar{e}^{p\prime}_{22} - \left(\bar{S}_{22} - \sqrt{2}\bar{q}\bar{e}^p_{22}\right)\bar{\varkappa}' = 0,\\
\left(1 + (\bar{a} - \bar{q})\,\bar{\varkappa}\right)\bar{e}^{p\prime}_{33} - \left(\bar{S}_{33} - \sqrt{2}\bar{q}\bar{e}^p_{33}\right)\bar{\varkappa}' = 0,\\
\left(\bar{S}_{ij} - \sqrt{2}\bar{q}\bar{e}^{p\prime}_{ij}\right)\left(\bar{S}'_{ij} - \sqrt{2}\bar{q}\bar{e}^{p\prime}_{ij}\right) - 2\,(\bar{a} - \bar{q})\left(1 + (\bar{a} - \bar{q})\,\bar{\varkappa}\right)\bar{\varkappa}' = 0,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\bar{a} = (q + \sqrt{2}r)(2\mu)^{-1} \geqslant 0$; $\bar{q} = q(2\mu)^{-1}$. Отметим, что при $\bar{a} = 0$ система (3.2) определяет напряженно-деформированное состояние среды в пластических областях зоны 3 в случае идеального упругопластического материала.

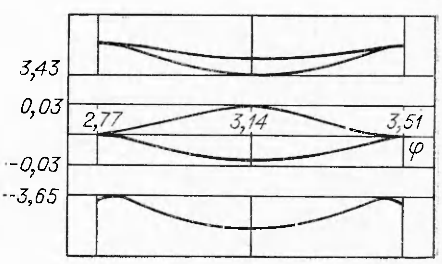
Таким образом, приходим к задаче Коши (2.10), (3.2), которую следует численно решать на ЭЦВМ при определенных значениях $\bar{a}$, $\bar{q}$, α, ν, z_1, z_2. При этом неизвестная граница α_1, на которой задаются условия (2.10), находится из (2.3) с учетом (2.5), (2.8), (2.9). Однако соотношение (2.5) относилось к случаю идеального упругопластического материала, теперь оно несколько видоизменяется: вместо k^2 следует писать $k^2(\bar{a} + 1)$. Знак в (2.5) выбирается с учетом принадлежности α_1 третьей зоне. Может оказаться, что для заданных величин начальных параметров несколько значений α_1 удовлетворяют этому условию. Тогда каждый из корней проверяется в результате численного интегрирования системы уравнений (3.2). При этом начальные параметры должны удовлетворять неравенству (2.2), откуда, в частности, следует, что $\alpha \leqslant \pi/4$. На каждом шаге интегрирования следует проверять условие положительности скорости диссипации энергии. Интегрирование продолжается до тех пор, пока не будет выполнено первое условие (2.6), записанное в безразмерном виде, где $m = 3$. То значение α_2 (слабая волна разгрузки), при котором это условие выполняется, и является искомым, после чего можно найти скорость распространения этой волны из соотношения $c_2 \sin \alpha = G_1 \sin \alpha_2$. Заметим, что в данном решении не рассматривается возможность образования пластических ударных волн, на которых $\left[e_{ij}^p\right] \neq 0$. Отметим также [4, 5], что для подобных задач еще отсутствуют общие теоремы единственности. Поэтому для решения, полученного здесь, единственность может быть показана лишь при тщательном численном исследовании всех возможных решений при различных начальных параметрах: $\bar{a}$, $\bar{q}$, α, ν, z_1, z_2.

Для численного интегрирования системы уравнений (3.2) методом Рунге—Кутта искомые величины $\bar{\sigma}_{ij}'$, $\bar{e}_{ij}^{p\prime}$, $\bar{v}_i'$ были выражены через $\bar{\varkappa}'$. Поскольку определитель системы (3.2) равен нулю всюду в пластической области, его можно продифференцировать по φ и получить линейное относительно производных выражение, из которого определятся $\bar{\varkappa}' = f(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{e}_{ij}^p, \bar{\varkappa}, \bar{a}, \bar{q}, \nu, \alpha, \varphi)$.

Для различных комбинаций начальных параметров была получена таблица значений α_1, после чего проводилось интегрирование системы уравнений (3.2) шагом $\Delta\varphi = 0{,}01$ для каждого из этих значений. Из анализа результатов численных расчетов, в частности, следует, что раствор пластического веера $\Delta\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ сужается с увеличением параметра упрочнения $\bar{a}$, независимо от ν, α, z_1, z_2. В качестве иллюстрации на фиг. 2 показаны зависимости $\Delta\alpha(\bar{a})$ для $z_1 = z_2 = 0{,}8$, $\nu = 0{,}3$, $\bar{q} = 0$ и для $\alpha = 0{,}52$; $0{,}44$; $0{,}35$; $0{,}26$ (углы в радианах, кривые *1—4* соответственно). При этом во всех расчетах в соотношении (2.5) брался знак —, знак + дает значения $\alpha_1 = \alpha$, что невозможно. В случае идеального упругопла-



Фиг. 2



Фиг. 3

стического материала ($a = 0$) вычисления проводились для значений $z_1 = z_2 = 1$, $\nu = 0{,}25$, $\alpha = \pi/4$. Граничные условия (2.10) при этом имеют следующие значения: $\bar\sigma_{11} = \bar\sigma_{22} = 3{,}46$, $\bar\sigma_{12} = \bar v_2 = \bar e^p_{ij} = \bar\varkappa = 0$, $\bar\sigma_{33} = 1{,}73$, $\bar v_1 = -3{,}675$, $\varphi_1 = 2{,}77$. Результаты численных расчетов для некоторых искомых величин, характеризующих изменение напряженно-деформированного состояния среды в пластическом веере третьей зоны, представлены на фиг. 3 (сверху вниз: $\bar\sigma_{22}$, $\bar\sigma_{11}$, $\bar e^p_{33}$, $\bar e^p_{11}$, $\bar v_1$). При этом $\varphi_2 = 3{,}51$, т. е., как и ожидалось, пластическая область симметрично расположена по отношению к отрицательной оси x. В более общем случае ($z_1 \neq z_2$) она может располагаться как угодно по отношению к этой оси.

Поступила 24 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.** Теория упрочняющегося пластического тела.— М., «Наука», 1971.
2. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах.— М., «Мир», 1964.
3. **Чернышов А. Д.** Отражение безвихревой ударной волны от жесткой стенки и свободной поверхности упругого полупространства. Задача о движении ступенчатой нагрузки со сверхсейсмической скоростью по границе полупространства.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 8. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики, 1971.
4. **Блейх Г. Г., Мэтьюз А. Т.** Движение со сверхсейсмической скоростью ступенчатой нагрузки по поверхности упругопластического полупространства.— Сб. пер. Механика, 1968, № 1 (107).
5. **Баскаков В. А., Быковцев Г. И.** Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
6. **Баскаков В. А.** К задаче отражения безвихревых ударных волн от границы упругопластического полупространства.— «Труды ф-та ПММ ВГУ», Воронеж, 1971, вып. 1.
7. **Баскаков В. А.** Влияние упрочнения на пластическое деформирование материала при взаимодействии ударных волн с границей раздела двух упругопластических полупространств.— В кн.: Методы математической физики в механике структурных сплошных сред. Воронеж, изд. ВГПИ, 1976, т. 189.

УДК 534.232

ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ВЗРЫВЕ В ПОРИСТОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Е. Е. Ловецкий, А. М. Масленников, В. С. Фетисов

(*Москва*)

Значительная доля энергии взрыва в твердой среде диссипируется в веществе, окружающем заряд. Диссипация энергии взрыва происходит на фронте ударной волны, при пластическом течении вещества за фронтом ударной волны. Часть энергии переходит в энергию остаточных упругих деформаций. Небольшая доля от общей энергии взрыва излучается в виде упругих волн.

Многие реальные горные породы являются пористыми с той или иной степенью газоводонасыщенности. Поэтому вопрос об энергетических потерях при взрыве в пористых насыщенных средах представляет значительный интерес [1].

Теоретическое изучение вопроса о диссипации энергии при взрыве в пористой среде, деформирование которой происходит пластически, проводилось в работах [2, 3]. Рассмотрение, проведенное в этих работах, ограничивается случаем полного захлопывания пустых пор на ударном фронте. Вещество за фронтом ударной волны считалось несжимаемым.