ПМТФ, № 4, 1970

ДВИЖЕНИЕ НАМАГНИЧИВАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. М. Суязов

(*Воронеж*)

В работе [1] описывается явление увлечения магнитной жидкости (коллоидной суспензии ферромагнитных «однодоменных» частиц в жидком носителе) вращающимся магнитным полем.

Для макроскопического описания поведения магнитных суспензий предложены различные гидродинамические модели [2,3]. При построении модели в [2] предполагалось, что вектор намагничивания единицы объема всегда направлен по полю (объемный момент равен нулю). Поэтому в рамках этой модели невозможно описать данное явление.

При ряде упрощающих предположений рассматривается задача о стационарном ламинарном течении несжимаемой вязкой намагничиваемой жидкости с внутренним вращением частиц, движущейся в бесконечно длинном цилиндрическом сосуде под действием вращающегося магнитного поля.

Обсуждается физический механизм, приводящий жидкость в движение. Подчеркивается важная роль несимметричных силовых и моментных напряжений, явления релаксации намагниченности.

Решение, полученное ниже, представляет собой также решение задачи о вращении поляризуемой жидкости модели [3] под действием вращающегося электрического поля [1].

1. Система уравнений [4] при условии постоянства физических характеристик, несжимаемости, изотермичности жидкости, отсутствия электропроводности, поляризуемости, перекрестных эффектов состоит из уравнения количества движения (1.1), уравнения для внутреннего вращения частиц (1.2), определяющего уравнения для намагниченности (1.3), урав-

---

[1] Примечание. Пока работа находилась в редакции, из печати вышла работа В. М. Зайцева и М. И. Шлиомиса, которая посвящена решению аналогичной задачи [4]. Основные выводы данной статьи совпадают с выводами указанной выше работы. Различие между этими работами заключается в разном подходе к описанию явления увлечения ферромагнитной суспензии вращающимся полем.

При решении задачи в [4] используются уравнения движения несжимаемой жидкости, обладающей внутренним моментом импульса [5], записанных с учетом наличия объемной плотности макроскопического момента внешних сил. В общем случае эта система уравнений не замкнута. Для замыкания ее необходимо, во-первых, знать величину макроскопического момента внешних сил (вычисление этого момента в [4] предлагается проводить путем усреднения микроскопических моментов, действующих на каждую отдельную частицу, что в каждом конкретном случае требует специального рассмотрения [4]), во-вторых, необходимо привлекать то или иное уравнение (например, из теории парамагнитной релаксации), описывающее изменение вектора намагниченности со временем.

Таким образом, задача о вращении ферромагнитной суспензии в [4] решена не на основе чисто гидродинамической модели, которая могла быть применима для описания механического поведения таких жидкостей. Поэтому представляет интерес описать данное явление в рамках какой-либо модели намагничиваемой жидкости, построенной с помощью методов механики сплошной среды [6]. Отысканию именно такого решения посвящена данная статья. Найденное решение задачи указывает на возможность применения системы уравнения работы [3] для описания макроскопического поведения ферромагнитных суспензий. При этом полученное в [3] выражение для электромагнитного объемного момента и уравнение для вектора намагниченности, описывающее его изменение со временем, имеют достаточно общий характер и пригодны к описанию широкого класса явлений физико-механической природы.

нений электродинамики движущейся намагничиваемой среды (1.4)

$$\rho\mathbf{v}^{\cdot} = -\nabla p + 2\alpha_2\nabla\cdot(\nabla\mathbf{v})^d + \alpha_3\nabla\times(2\boldsymbol{\omega} - \nabla\times\mathbf{v}) +$$
$$+\mu_0\mathbf{m}\cdot\nabla\mathbf{h} - \mu_0\mathbf{m}^{\cdot}\times\varepsilon_0\mathbf{e} - \mathbf{v}\times(\mu_0\mathbf{m}\cdot\nabla)\,\varepsilon_0\mathbf{e} + \rho\mathbf{f} \tag{1.1}$$
$$p = -(\partial\varphi/\partial\rho^{-1}) + K^{-1}\mu_0 m^2, \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

$$\rho J\boldsymbol{\omega}^{\cdot} = \gamma_1\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\omega} + 2\gamma_2\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{\omega})^d + 2\gamma_3\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{\omega})^a + 2\alpha_3(\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + \mu_0\mathbf{m}\times\boldsymbol{\eta} \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{\eta} - K^{-1}\mathbf{m} = \mu_0 h_1(\mathbf{m}^{\cdot} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{m}), \qquad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h} - \mathbf{v}\times\varepsilon_0\mathbf{e} \tag{1.3}$$

$$\nabla\times\mathbf{e} + \partial\mu_0\mathbf{h}/\partial t = -\partial\mu_0\mathbf{m}^{\cdot}/\partial t - \nabla\times(\mu_0\mathbf{m}\times\mathbf{v}), \qquad \nabla\cdot\varepsilon_0\mathbf{e} = 0 \tag{1.4}$$
$$\nabla\times\mathbf{h} - \partial\varepsilon_0\mathbf{e}/\partial t = 0, \qquad \nabla\cdot\mu_0\mathbf{h} = -\nabla\cdot\mu_0\mathbf{m}$$

Здесь ρ — массовая плотность, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения частиц, p — гидростатическое давление, J — среднее значение момента инерции единицы массы, $\mathbf{m}$ — вектор намагниченности, $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ — векторы электрической и магнитной напряженности, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная проницаемости в вакууме, ∇ — оператор Гамильтона, φ — функция свободной энергии, $\mathbf{f}$ — вектор массовой силы, α_2 — коэффициент вязкости, α_3 — коэффициент вращательной вязкости, характеризующий вклад несимметричных напряжений в изменение импульса, γ_1 и γ_2, γ_3 — коэффициенты вязкости моментных напряжений, $K > 0$ — магнитная восприимчивость парамагнетика, $\tau = \mu_0 h_1 K$ — время релаксации намагниченности. Индексом d отмечены девиаторные части симметричных диад, индексом a — антисимметричные диады. Операция ($^{\cdot}$) означает полную производную по времени.

Отметим, что уравнения (1.1) — (1.4) образуют замкнутую систему уравнений, которые описывают движение изотропной однородно намагничиваемой жидкости с учетом внутреннего вращения частиц и явления релаксации намагниченности.

2. Допустим, что намагничиваемая жидкость с внутренним вращением частиц содержится в бесконечно длинном цилиндре радиуса R. Магнитное поле постоянной напряженности h_0 приложено перпендикулярно оси цилиндра и вращается с постоянной угловой скоростью ω_0.

Решенее задачи будем рассматривать в цилиндрической системе координат r, θ, z, вращающейся с угловой скоростью, равной скорости вращения магнитного поля.

При решении задачи будем пренебрегать изменением магнитного и электрического полей, связанным с движением намагничиваемой жидкости. Поэтому компоненты напряженности магнитного поля как для области, занятой жидкостью, так и для области, свободной от жидкости, имеют вид

$$h_r = h_0\cos\theta, \quad h_\theta = -h_0\sin\theta, \quad h_z = 0 \tag{2.1}$$

Магнитное поле (2.1) стремится повернуть ферромагнитные частицы в направлении вращения. Вследствие наличия вязкого сопротивления в жидкости, окружающей частицы, их вращательному движению возникает разность фаз δ между направлением поля и направлением вектора намагничивания единицы объема, вызываемого полем. Поэтому имеем

$$m_r = m_0\cos(\theta + \delta), \quad m_\theta = -m_0\sin(\theta + \delta), \quad m_z = 0 \tag{2.2}$$

Здесь m_0 — величина вектора намагниченности.

Граничные условия определяются конечным значением скорости движения, скорости внутреннего вращения на оси цилиндра, условием прилипания жидкости к стенке сосуда и отсутствием внутреннего вращения на поверхности цилиндра

$$\mathrm{v}(0) \neq \infty, \quad \omega(0) \neq \infty, \quad \mathrm{v}(R) = -R\omega_0, \quad \omega(R) = -\omega_0 \tag{2.3}$$

Стационарное течение, которое имеет место при этих условиях, описывается решением уравнений (1.1)—(1.3) вида

$$v_\theta = v(r), \quad \omega_z = \omega(r), \quad m_0 = m_0(r), \quad \delta = \delta(r)$$
$$p = p(r), \quad v_r = v_z = \omega_r = \omega_\theta = 0 \tag{2.4}$$

Из (1.1) — (1.3) находим следующие соотношения для определения v, ω, m_r, m_θ, p:

$$\alpha^* \frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr} - 2\alpha_3\omega = A, \qquad \frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r} + 2\rho v\omega_0 + \rho\omega_0^2 r$$
$$\gamma^* \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\omega}{dr}\right) + 2\alpha_3\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr} - 2\omega\right) + M = 0 \tag{2.5}$$
$$M = \mu_0(m_r h_\theta - m_\theta h_r), \quad \alpha^* = \alpha_2 + \alpha_3, \quad \gamma^* = \gamma_2 + \gamma_3$$
$$Kh_r = m_r + \tau\left[\frac{v}{r}\left(\frac{\partial m_r}{\partial\theta} - m_\theta\right) + m_\theta\omega\right] \tag{2.6}$$
$$Kh_\theta = m_\theta + \tau\left[\frac{v}{r}\left(\frac{\partial m_\theta}{\partial\theta} + m_r\right) - m_r\omega\right]$$

Здесь A — произвольная постоянная интегрирования.
Из (2.6) при помощи (2.1), (2.2) находим

$$\operatorname{tg}\delta = -\tau\omega, \qquad m_0 = Kh_0 / (1 + \operatorname{tg}^2\delta)\cos\delta \tag{2.7}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением слабовязких жидкостей и такой скорости вращения поля, когда можно считать, что фазовый угол запаздывания значительно меньше единицы ($\delta \ll 1$). В этом случае соотношения (2.7), вращающий момент (2.5) примут вид

$$\delta = -\tau\omega, \qquad m_0 = Kh_0, \qquad M = \mu_0 Kh_0^2\delta \tag{2.8}$$

Систему уравнений (2.5) с учетом (2.8) можно свести к виду

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\omega}{dr}\right) - k^2\omega + bA = 0, \qquad k^2 = \frac{4\alpha_2\alpha_3 + \tau^*\alpha^*}{\alpha^*\gamma^*} \tag{2.9}$$
$$\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr} = \frac{A}{\alpha^*} + b\gamma^*\omega, \qquad b = \frac{2\alpha_3}{\alpha^*\gamma^*}, \qquad \tau^* = \tau Kh_0^2\mu_0$$

В соотношениях (2.9) величина k^2 положительна. Это следует из вида термодинамических ограничений на феноменологические коэффициенты [3].
Уравнениям (2.9) и граничным условиям (2.3) соответствует решение

$$v = -r\omega_0 + \frac{Bb\gamma^*}{k}\left(I_1(kr) - \frac{r}{R}I_1(kR)\right) \tag{2.10}$$
$$\omega = -\frac{2b\alpha^*\omega_0}{k^2 + b^2\gamma^*\alpha^*} + B\left(I_0(kr) - \frac{2\alpha^* b^2\gamma^*}{kR(k^2 + b^2\gamma^*\alpha^*)}I_1(kR)\right)$$
$$B = \omega_0\left(\frac{2b\alpha^*}{k^2 + b^2\gamma^*\alpha^*} - 1\right)\left(I_0(kR) - \frac{2\alpha^* b^2\gamma^*}{kR(k^2 + b^2\gamma^*\alpha^*)}I_1(kR)\right)^{-1} \tag{2.11}$$

Здесь I_0 и I_1 — модифицированные бесселевы функции первого рода.

Таким образом, в рамках несимметричной модели электромагнитной жидкости [3] удается качественно описать своеобразное явление [1] вращения ферромагнитной жидкости под действием вращающегося магнитного поля. Возможность такого описания является следствием учета при построении этой модели диссипации энергии электромагнитного поля на релаксационные процессы, связанные с явлениями поляризации и намагничиваемости.

Действительно, из (2.6) непосредственно видно, что наличие в (2.6) членов с временем релаксации намагниченности приводит к несовпадению по направлению вектора магнитного поля с вектором намагничивания. Следствием этого факта является появление объемного вращающего момента (2.8), который индуцирует в жидкости внутреннее вращение частиц (2.5).

Вследствие вязкости жидкости при ориентирующем повороте частиц по полю происходит увлечение окружающей частицу жидкости. Тем самым в жидкости индуцируются локальные вихри. Наличие «трения» ($\alpha_3 \neq 0$) между внутренним полем вращения $\boldsymbol{\omega}$ и внешним полем вращения $\nabla \times \mathbf{v}$ (возникающего из-за различий инерционных свойств жидкости и частиц) создает несимметричные силовые напряжения (2.5), которые приводят жидкость в макроскопическое движение — во вращение (2.10).

Выясним роль моментных напряжений в появлении макроскопического движения жидкости. Для этого в (2.5) положим $\gamma^* = 0$. Тогда уравнениям (2.5), первому и третьему граничным условиям из (2.3) в неподвижной системе координат соответствует решение вида

$$v \equiv 0, \qquad \omega = \tau^* (4\varkappa_3 + \tau^*)^{-1} \omega_0 \tag{2.12}$$

Из (2.12) видно, что в жидкости отсутствует макроскопическое движение, а внутреннее вращение частиц образует равномерное поле. Таким образом, возникновение макроскопического движения жидкости существенно связано с неравномерностью поля внутреннего вращения частиц (наличием моментных напряжений). Как следует из (1.1), только лишь при этом условии в жидкости появляются несимметричные силовые напряжения, которые вносят свой вклад в изменение импульса и приводят жидкость в движение.

Отметим, что если в формулах (2.10), (2.11) заменить магнитную восприимчивость и вектор магнитного поля соответственно на электрическую восприимчивость и вектор электрического поля, то получим решение задачи о вращении поляризуемой жидкости модели работы [3] под действием вращающегося электрического поля.

Поступила 6 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Moskowitz R., Rosensweig R. E. Nommechanical torque — driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field. Appl. Phys. Litters, 1967, vol. 11, No. 10, pp. 301—303.
2. Neuringer J. Z., Rosensweig R. E. The Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
3. Суязов В. М. О несимметричной модели вязкой электромагнитной жидкости. ПМТФ, 1970, № 2.
4. Зайцев В. М., Шлиомис М. И. Увлечение ферромагнитной суспензии вращающимся полем. ПМТФ, 1969, № 5.
5. Шлиомис М. И. К гидродинамике жидкости с внутренним вращением. ЖЭТФ, 1965, т. 51, вып. 1.
6. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Усп. матем. н., 1965, т. 20, вып. 5.