

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН

УДК 539.37

И. А. Банщикова<sup>1</sup>, И. Ю. Цвелодуб<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

<sup>2</sup> Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
630090 Новосибирск

Исследуется класс обратных задач (ОЗ) о нахождении кинематических внешних воздействий, обеспечивающих за заданное время требуемые остаточные прогибы физически нелинейной вязкоупругой пластины (в геометрически линейной постановке). Показана корректность данных ОЗ, обоснован итерационный метод решения. Получена верхняя оценка уровня остаточных напряжений, возникающих в пластине после снятия внешних нагрузок. Приведены некоторые численные примеры.

**1. Постановка обратной задачи.** Рассмотрим вязкоупругую пластину постоянной толщины  $h$ , занимающую в своей срединной плоскости  $Ox_1x_2$  область  $S$ , ограниченную контуром  $\gamma$ , ось  $z$  перпендикулярна этой плоскости. Считаем, что в любой момент времени  $t$  прогиб  $w = w(x_1, x_2, t)$  мал в сравнении с  $h$ , и для полных деформаций имеем [1]

$$\varepsilon_{kl} = -zw_{,kl}, \quad (1.1)$$

что соответствует состоянию чистого изгиба. В (1.1) и ниже  $k, l = 1, 2$ ; индекс после запятой означает производную по соответствующей координате.

Уравнения равновесия следующие [1]:

$$Q_k = M_{kl,l}, \quad Q_{k,k} = -q, \quad Q_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zk} dz, \quad M_{kl} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl} z dz. \quad (1.2)$$

Здесь  $Q_k, M_{kl}$  — перерезывающие силы и моменты;  $q$  — интенсивность внешней нагрузки;  $\sigma_{kl}$  — компоненты напряжений; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Из (1.1), (1.2) вытекает равенство (уравнение виртуальных работ) [1]

$$\int_V \sigma_{kl} \varepsilon_{kl} dV = \int_S q w dS + \int_\gamma ((Q + \partial H / \partial s) w - G \partial w / \partial n) ds, \quad (1.3)$$

где  $Q = Q_k n_k$ ;  $H = M_{kl} n_k t_l$ ;  $G = M_{kl} n_k n_l$ ;  $n_k, t_l$  — компоненты единичных векторов нормали и касательной к контуру  $\gamma$ ;  $s$  — длина его дуги;

$$\int_V \dots dV = \int_{-h/2}^{h/2} \int_S \dots dS dz.$$

Заметим, что поля  $\varepsilon_{kl}$  и  $\sigma_{kl}$  в (1.3) могут быть не связанными между собой.

Определяющие уравнения деформирования материала пластины примем в виде

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn} \sigma_{mn} + \varepsilon_{kl}^c. \quad (1.4)$$

Здесь  $a_{klmn}$  и  $\varepsilon_{kl}^e$  — компоненты упругих податливостей и вязких деформаций (деформаций ползучести). Предполагаем, что скорости последних  $\eta_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e$  зависят только от напряжений и удовлетворяют следующему условию, обобщающему постулат устойчивости [2]:

$$\begin{aligned} \Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl} &\geq \lambda a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}, \quad \lambda = \text{const}, \quad \lambda > 0, \\ \Delta\sigma_{kl} &= \sigma_{kl}^{(1)} - \sigma_{kl}^{(2)}, \quad \Delta\eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn}^{(1)}) - \eta_{kl}(\sigma_{mn}^{(2)}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Так, если

$$\eta_{kl} = \Gamma \partial \Sigma / \partial \sigma_{kl}, \quad \Gamma = \Gamma(\Sigma), \quad \Sigma = (a_{klmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn})^{1/2}, \quad (1.6)$$

то можно показать, что для выполнения (1.5) достаточно условий  $\Gamma' \geq \Gamma/\Sigma \geq \lambda$ , что, в свою очередь, обеспечивается, если  $\Gamma(0) = 0$ ,  $\Gamma'(0) = \lambda > 0$ ,  $\Gamma''(\Sigma) \geq 0$ . Последним условиям удовлетворяют, например, следующие функции, используемые в теории ползучести [2]:  $\Gamma = B[\exp(\lambda\Sigma/B) - 1]$ ,  $\Gamma = B \operatorname{sh}(\lambda\Sigma/B)$ ,  $\Gamma = B\Sigma/(B/\lambda - \Sigma)$ ,  $B = \text{const}$ .

Рассматриваемая ниже ОЗ связана с нахождением кинематических воздействий, обеспечивающих за заданное время  $t_*$  требуемую остаточную форму пластины, а именно: необходимо подобрать такой путь деформирования  $w = w(x_1, x_2, t)$ , чтобы в момент  $t = t_*$  прогиб  $w$  принимал заданное значение  $\tilde{w}_*(x_1, x_2)$  при нулевой внешней нагрузке  $q$ . Очевидно, что упомянутый путь может быть неединственным. Поэтому выделим класс таких воздействий, когда прогиб  $w$  изменяется по заданному во времени закону, но с неизвестным значением  $w_*$  при  $t = t_*$ , после чего в указанный момент соответствующая нагрузка  $q_* = q(x_1, x_2, t_*)$  мгновенно снимается, так что после упругого «распружинивания» остаточный прогиб  $\tilde{w}(x_1, x_2, t_*) = \tilde{w}_*(x_1, x_2)$ .

Таким образом, рассматривается следующий класс ОЗ: требуется определить функцию  $w_* = w_*(x_1, x_2)$  такую, чтобы при текущем прогибе  $w(x_1, x_2, t) = f(t)w_*(x_1, x_2)$  ( $0 \leq t \leq t_*$ ) ( $f(t)$  — заданная функция ( $f(0) = 0$ ,  $f(t_*) = 1$ )) в момент  $t = t_*$  после мгновенного снятия внешней нагрузки  $q_* = q(x_1, x_2, t_*)$  и упругой разгрузки остаточный прогиб  $\tilde{w}(x_1, x_2, t_*)$  принимал заданное значение  $\tilde{w}_*(x_1, x_2)$ .

При этом считается, что при  $t < 0$  пластина находится в недеформированном состоянии, следовательно,  $\varepsilon_{kl}^e = 0$  при  $t = 0$  всюду в пластине.

Сделаем несколько замечаний относительно процесса мгновенной разгрузки при  $t = t_*$  и сформулируем необходимые граничные условия на  $\gamma$ . Прогиб  $w_*$  представим в виде  $w_* = w_*^e + \tilde{w}_*$  ( $\tilde{w}_*$  — заданный остаточный прогиб,  $w_*^e$  — величина упругого «распружинивания», являющаяся решением чисто упругой задачи при внешней нагрузке  $q_* = q(x_1, x_2, t_*)$  и соответствующих граничных условиях). При этом для напряжений при  $t = t_*$  имеем [1, 2]

$$\sigma_{kl*} = \sigma_{kl*}^e + \rho_{kl*}, \quad (1.7)$$

где  $\rho_{kl*}$  — остаточные напряжения, возникающие после упругой разгрузки;  $\sigma_{kl*}^e$  — компоненты упругих напряжений, отвечающие прогибу  $w_*^e$ , т. е.

$$\sigma_{kl*}^e = b_{klmn} \varepsilon_{mn*}^e = -z b_{klmn} w_{*,mn}^e. \quad (1.8)$$

Здесь  $b_{klmn}$  — компоненты тензора упругих модулей, который является обратным  $a_{klmn}$ , так что

$$a_{klmn} b_{klij} = \delta_{im} \delta_{jn} \quad (1.9)$$

( $\delta_{im}$  — компоненты единичного тензора).

При известной внешней нагрузке  $q_*(x_1, x_2)$  уравнение для  $w_*^e$  вследствие (1.2), (1.8) имеет вид  $b_{klmn}w_{*,klmn}^e = 12h^{-3}q_*$ .

В свою очередь, величина  $q_*$  связана с моментами  $M_{kl*}$ , соответствующими напряжениям  $\sigma_{kl*}$ , соотношением, вытекающим из (1.2):  $q_* = -M_{kl*,kl}$ . Из двух последних равенств получим

$$b_{klmn}w_{*,klmn}^e = -12h^{-3}M_{kl*,kl}. \quad (1.10)$$

В качестве граничных условий на  $\gamma$  при разгрузке в момент  $t = t_*$  можно принять одно из следующих соотношений [1, 2]:

$$w_*^e = \partial w_*^e / \partial n = 0; \quad (1.11a)$$

$$w_*^e = \tilde{G}_* = 0; \quad (1.11б)$$

$$\tilde{G}_* = \tilde{Q}_* + \partial \tilde{H}_* / \partial s = 0; \quad (1.11в)$$

$$\partial w_*^e / \partial n = \tilde{Q}_* + \partial \tilde{H}_* / \partial s = 0 \quad (1.11г)$$

(знак тильда относится к величинам, характеризующим силовое воздействие после разгрузки). Условия (1.11a)–(1.11в) означают соответственно, что при разгрузке контур  $\gamma$  защемлен, свободно оперт и свободен от нагрузок.

Легко видеть, что при известной функции  $w_*(x_1, x_2)$  компоненты  $\sigma_{kl*}(x_1, x_2, z) = \sigma_{kl}(x_1, x_2, z, t_*)$  находятся однозначно из системы уравнений (вытекающей из (1.1) и (1.4))

$$a_{klmn}\dot{\sigma}_{mn} + \eta_{kl}(\sigma_{mn}) = -zf\dot{w}_{*,kl} \quad (1.12)$$

с начальными условиями  $\sigma_{kl}(x_1, x_2, z, 0) = 0$ , поскольку из (1.1) и (1.4) при  $t = 0$  имеем  $a_{klmn}\sigma_{mn} = 0$ , так как  $\varepsilon_{kl}^e = 0$  и  $w = 0$ .

Таким образом, правая часть уравнения (1.10) определяется функцией  $w_* = w_*(x_1, x_2)$ , поэтому решение краевой задачи (1.10), (1.11) зависит от  $w_*$ . Некоторые свойства оператора  $w_*^e = w_*^e(w_*)$  установлены ниже.

Если обозначить правую часть (1.10) через  $\Psi(w_*)$ , то с учетом равенства  $w_*^e = w_* - \tilde{w}_*$  из (1.10) для неизвестной функции  $w_* = w_*(x_1, x_2)$  получим уравнение  $b_{klmn}w_{*,klmn} - \Psi(w_*) = b_{klmn}\tilde{w}_{*,klmn}$ ; причем в общем случае нелинейных зависимостей  $\eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn})$  оператор  $\Psi = \Psi(w_*)$  выписать в явном виде невозможно. Тем не менее при некоторых достаточно простых ограничениях на функцию  $f = f(t)$  рассматриваемая ОЗ может быть сведена к последовательности прямых задач типа (1.10) с известной правой частью и граничными условиями (1.11), решения которых будут сходиться к решению ОЗ.

**2. Корректность обратной задачи.** Выясним, при каких условиях существует единственное обобщенное решение сформулированной ОЗ.

Введем обозначения:

$$I_1(\sigma_{kl}) = \left( \int_V \frac{1}{2} a_{klmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn} dV \right)^{1/2}, \quad I_2(\varepsilon_{kl}) = \left( \int_V \frac{1}{2} b_{klmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} dV \right)^{1/2}.$$

Пусть задано поле прогибов  $w = w(x_1, x_2)$ . Обозначим через  $\bar{\sigma}_{kl}^e$  упругие напряжения, соответствующие этим прогибам, т. е.  $\bar{\sigma}_{kl}^e = b_{klmn}\bar{\varepsilon}_{mn}^e = -zb_{klmn}w_{,mn}$ . Пусть

$$\|w\| = I_1(\bar{\sigma}_{kl}^e) = I_2(\bar{\varepsilon}_{kl}^e) = \left( \int_S (h^3/24) b_{klmn} w_{,kl} w_{,mn} dS \right)^{1/2}.$$

Как известно [3], если в трех точках пластины, не лежащих на одной прямой, прогиб  $w = 0$  (например,  $w = 0$  на контуре  $\gamma$ , как в случае граничных условий вида (1.11а) или (1.11б)), то величина  $\|w\|$  является нормой, эквивалентной  $\|w\|_{H^2(S)}$ , причем пространство  $H^2(S)$  будет полным относительно введенной нормы. Последняя порождается скалярным произведением

$$(w_1, w_2) = \int_S (h^3/24) b_{klmn} w_{,kl}^{(1)} w_{,mn}^{(2)} dS.$$

В общем же случае величина  $\|w\|$  — полунорма, и из равенства  $\|w\| = 0$  следует, что  $w$  есть линейная функция  $x_1$  и  $x_2$ .

Пусть заданы кинематические воздействия  $w^{(i)} = f(t)w_*^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), где  $f(t)$  ( $0 \leq t \leq t_*$ ) — известная функция; причем в момент разгрузки при  $t = t_*$  выполняется одно из граничных условий (1.11) одновременно для обоих воздействий. При этом предполагается, что прогибы  $w_*^{(i)} = w_*^{(i)}(x_1, x_2)$  и соответствующие им напряжения  $\sigma_{kl*}^{(i)}$ , определяемые из (1.12), а следовательно, и моменты  $M_{kl*}^{(i)}$  обладают необходимой гладкостью, так что условия (1.11) имеют смысл.

Как и выше, разности соответствующих величин будем обозначать с помощью символа  $\Delta$ . Получим оценку для  $\|\Delta w_*^e\|$  через  $\|\Delta w_*\|$ . Поскольку  $I_1(\Delta \sigma_{kl*}^e) = \|\Delta w_*^e\|$ , то из (1.7) и вытекающего из (1.3) и (1.11) равенства [1, 2]

$$\int_V a_{klmn} \Delta \sigma_{mn*}^e \Delta \rho_{kl*} dV = 0$$

получим

$$I_1^2(\Delta \sigma_{kl*}) = \|\Delta w_*^e\|^2 + I_1^2(\Delta \rho_{kl*}) \geq \|\Delta w_*^e\|^2. \quad (2.1)$$

В любой момент  $t$  ( $0 \leq t \leq t_*$ ) вследствие (1.4) и (1.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V (a_{klmn} \Delta \dot{\sigma}_{mn} \Delta \sigma_{kl} + \Delta \eta_{kl} \Delta \sigma_{kl}) dV &= \frac{1}{2} \int_V \Delta \dot{\epsilon}_{kl} \Delta \sigma_{kl} dV = \frac{1}{2} \int_V a_{klmn} \Delta \sigma_{mn} (b_{kl ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}) dV \leq \\ &\leq I_1(\Delta \sigma_{kl}) I_1(b_{kl mn} \Delta \dot{\epsilon}_{mn}) = I_1(\Delta \sigma_{kl}) I_2(\Delta \dot{\epsilon}_{kl}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где использовалось известное неравенство

$$\frac{1}{2} \int_V a_{klmn} x_{kl} y_{mn} dV \leq I_1(x_{kl}) I_1(y_{kl})$$

при  $x_{kl} = \Delta \sigma_{kl}$  и  $y_{kl} = b_{kl mn} \Delta \dot{\epsilon}_{mn}$ .

Учитывая неравенство (1.5) и равенства

$$\frac{1}{2} \int_V a_{klmn} \Delta \dot{\sigma}_{mn} \Delta \sigma_{kl} dV = \dot{I}_1(\Delta \sigma_{kl}) I_1(\Delta \sigma_{kl}), \quad I_2(\Delta \dot{\epsilon}_{kl}) = \|\Delta \dot{w}\| = |\dot{f}| \|\Delta w_*\|,$$

из (2.2) находим

$$\dot{I}_1(\Delta \sigma_{kl}) + \lambda I_1(\Delta \sigma_{kl}) \leq |\dot{f}| \|\Delta w_*\| \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} [I_1(\Delta \sigma_{kl}) \exp(\lambda t)] \leq \|\Delta w_*\| |\dot{f}| \exp(\lambda t).$$

Интегрируя это неравенство по времени от нуля до  $t_*$  и учитывая, что  $\Delta \sigma_{kl} = 0$  при

$t = 0$  всюду в пластине (поскольку  $\Delta w = 0$  при  $t = 0$ , так как  $f(0) = 0$ ), получим

$$I_1(\Delta \sigma_{kl*}) \leq \beta \|\Delta w_*\|, \quad \beta = \exp(-\lambda t_*) \int_0^{t_*} |\dot{f}| \exp(\lambda t) dt. \quad (2.3)$$

Из (2.1) и (2.3) следует требуемая оценка

$$\|\Delta w_*^e\| \leq \beta \|\Delta w_*\|. \quad (2.4)$$

Поскольку  $\|\Delta w_*\| = \|\Delta w_*^e + \Delta \tilde{w}_*\| \leq \|\Delta w_*^e\| + \|\Delta \tilde{w}_*\|$ , из (2.4) вытекает  $(1 - \beta)\|\Delta w_*\| \leq \|\Delta \tilde{w}_*\|$ , что при  $\beta < 1$  гарантирует единственность решения рассматриваемой задачи и непрерывность оператора  $w_* = w_*(\tilde{w}_*)$ .

Заметим, что неравенство  $\beta < 1$  имеет место для любой монотонно возрастающей от нуля до единицы функции  $f = f(t)$ . Действительно, в этом случае  $|\dot{f}| = \dot{f}$ , и из (2.3) найдем

$$\beta = 1 - \lambda \exp(-\lambda t_*) \int_0^{t_*} f \exp(\lambda t) dt < 1,$$

откуда, в частности, следует, что минимальное значение  $\beta$  соответствует релаксационному режиму деформирования, когда  $f(0) = 0$ ,  $\dot{f} > 0$  ( $0 < t < t_0$ ),  $f = 1$  ( $t_0 \leq t \leq t_*$ ) при  $t_0 \rightarrow 0$ . Легко видеть, что  $\beta_{\min} = \exp(-\lambda t_*)$ , т. е. в этом случае

$$\int_0^{t_*} |\dot{f}| \exp(\lambda t) dt = 1.$$

Для любого другого режима

$$\int_0^{t_*} |\dot{f}| \exp(\lambda t) dt \geq \int_0^{t_*} |\dot{f}| dt \geq \int_0^{t_*} \dot{f} dt = 1.$$

Для доказательства существования обобщенного решения заметим, что данная задача сводится к решению функционального уравнения в области  $S$ :

$$w_* = F(w_*), \quad F(w_*) = w_*^e(w_*) + \tilde{w}_* \quad (2.5)$$

( $\tilde{w}_* = \tilde{w}_*(x_1, x_2)$ ) — заданная функция, а оператор  $w_*^e = w_*^e(w_*)$  определен в п. 1).

Рассмотрим вначале случай, когда граничные условия вида (1.11а). Тогда можно показать, что если  $w_*^{(i)} \in H^2(S)$  ( $i = 1, 2$ ), то имеет место оценка (2.4).

Пусть  $\tilde{w}_* \in H^2(S)$ , т. е.  $\|\tilde{w}_*\| < \infty$ . Тогда оператор  $F$  из (2.5) будет переводить каждый элемент  $w_* \in H^2(S)$  в элемент этого же пространства, так как

$$\|F(w_*)\| = \|w_*^e + \tilde{w}_*\| \leq \|w_*^e\| + \|\tilde{w}_*\| \leq \beta \|w_*\| + \|\tilde{w}_*\| < \infty$$

(здесь использовалось неравенство (2.4) при  $w_*^{e(1)} = w_*^e$ ,  $w_*^{e(2)} = 0$ ,  $w_*^{(1)} = w_*$ ,  $w_*^{(2)} = 0$ ). Кроме того, при  $\beta < 1$  упомянутый оператор будет сжимающим, поскольку

$$\|F(w_*^{(1)}) - F(w_*^{(2)})\| = \|w_*^e(w_*^{(1)}) - w_*^e(w_*^{(2)})\| \leq \beta \|w_*^{(1)} - w_*^{(2)}\|$$

вследствие (2.4). Из принципа сжимающих отображений [4] вытекает, что существует единственное решение  $w_* \in H^2(S)$  уравнения (2.5) и оно может быть получено как предел

последовательности  $\{w_*^n\}$ , где  $w_*^{n+1} = F(w_*^n)$ , т. е., согласно (2.5),

$$w_*^{n+1} = w_*^e(w_*^n) + \tilde{w}_* \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.6)$$

а  $w_*^0$  — произвольный элемент из  $H^2(S)$ .

Относительно других граничных условий заметим, что, для того чтобы (1.11б) или (1.11в) и (1.11г) имели смысл, достаточно предположить, что  $\tilde{w}_* \in H^3(S)$  (соответственно  $\dot{w}_* \in H^4(S)$ ). Тогда при определенной гладкости функций  $\eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn})$  из (1.12) оператор  $F$  из (2.5) будет переводить любой элемент  $w_* \in H^3(S)$  ( $w_* \in H^4(S)$ ) в элемент этого же пространства, поскольку можно показать, что  $w_*^e \in H^3(S)$  ( $w_*^e \in H^4(S)$ ). Поэтому в обоих случаях все элементы последовательности (2.6) будут принадлежать соответствующему пространству ( $H^3(S)$  или  $H^4(S)$ ), если таковому принадлежит  $w_*^0$ . Поскольку оператор  $F$  является сжимающим в пространстве  $H^2(S)$ , то предел последовательности (2.6) при  $n \rightarrow \infty$  будет принадлежать, по крайней мере, этому пространству, т.е.  $w_* \in H^2(S) \supset H^3(S) \supset H^4(S)$ . При этом, как легко видеть, в случае граничных условий (1.11в) и (1.11г) прогиб  $w_*$  определится с точностью до произвольной линейной функции  $x_1$  и  $x_2$  и до произвольной постоянной соответственно.

Как отмечалось в п.1, при заданной функции  $w_*^n = w_*^n(x_1, x_2)$  прогиб  $w_*^{en} = w_*^e(w_*^n)$  будет решением краевой задачи (1.10), (1.11). Поэтому на каждой итерации ОЗ сводится к прямой задаче для  $w_*^e$ . Скорость сходимости последовательных приближений к точному решению определяется известным неравенством [4]

$$\|w_*^n - w_*\| \leq \beta^n \|w_*^1 - w_*^0\| / (1 - \beta) \quad (0 < \beta < 1).$$

Заметим, что единственность решения ОЗ можно доказать при более слабых, чем используемые выше, условиях, а именно вместо (1.5) достаточно постулировать справедливость неравенства [2]

$$I_3(t) \equiv \int_0^t \int_V \Delta \eta_{kl} \Delta \sigma_{kl} dV dt \geq 0,$$

где знак равенства возможен только при  $\Delta \sigma_{kl}(\tau) = 0$  ( $0 \leq \tau < t$ ) всюду в  $V$ .

Действительно, интегрируя неравенство (2.2) по времени от нуля до текущего момента  $t$ , получим

$$I_1^2(\Delta \sigma_{kl}(t)) + I_3(t) \leq 2 \int_0^t I_1(\Delta \sigma_{kl}(t)) \|\Delta \dot{w}(t)\| dt \equiv 2\Phi(t). \quad (2.7)$$

Поскольку  $I_3(t) \geq 0$  и  $I_1(\Delta \sigma_{kl}) = \dot{\Phi} / \|\Delta \dot{w}\|$ , из (2.7) имеем  $(\dot{\Phi})^2 \leq 2\Phi \|\Delta \dot{w}\|^2$  или  $\dot{\Phi} \Phi^{-1/2} \leq \sqrt{2} \|\Delta \dot{w}\|$ . Интегрируя последнее неравенство по времени и учитывая, что  $\Phi(0) = 0$ , найдем

$$2\Phi^{1/2} \leq \sqrt{2} \int_0^t \|\Delta \dot{w}\| dt,$$

отсюда

$$2\Phi \leq \left( \int_0^t \|\Delta \dot{w}\| dt \right)^2 = \|\Delta w_*\|^2 \left( \int_0^t |\dot{f}| dt \right)^2. \quad (2.8)$$



Поскольку  $\|\Delta w_*\| = \|\Delta w_*^e\|$ , так как  $\Delta \tilde{w}_* = 0$ , из (2.7) и (2.8) с учетом (2.1) получим

$$I_1^2(\Delta \rho_{kl*}) + I_3(t_*) \leq (\beta_0^2 - 1) \|\Delta w_*^e\|^2, \quad \beta_0 = \int_0^{t_*} |f| dt,$$

что при  $f \geq 0$ , когда  $\beta_0 = 1$ , возможно только при  $\Delta \sigma_{kl}(\tau) = 0$  ( $0 \leq \tau < t_*$ ), откуда, в свою очередь, следует единственность решения данной задачи в указанном выше смысле.

**3. Оценка уровня остаточных напряжений при  $t = t_*$ .** Неравенства типа (2.3) и (2.4) позволяют получить верхнюю оценку для уровня остаточных напряжений, возникающих в пластине в момент  $t = t_*$  после упругой разгрузки. В качестве меры, характеризующей этот уровень, выберем  $I_* \equiv I_1^2(\rho_{kl*})$ .

Здесь необходимо заметить, что полученные в п. 2 формулы для разностей соответствующих величин справедливы и для самих величин, т. е. знак  $\Delta$  может быть опущен. Это следует из того, что в качестве первого можно принять основное напряженно-деформированное состояние, а в качестве второго — естественное состояние, отвечающее нулевым прогибам, деформациям и напряжениям всюду в пластине.

С учетом этого замечания из (2.1), (2.3) имеем

$$I_* \leq \beta^2 \|w_*\|^2 - \|w_*^e\|^2 \quad (\beta < 1). \quad (3.1)$$

Поскольку, согласно (2.4),  $\|w_*^e\| \leq \beta \|w_*\| = \beta \|w_*^e + \tilde{w}_*\| \leq \beta (\|w_*^e\| + \|\tilde{w}_*\|)$ , т. е.  $\|w_*^e\| \leq \beta(1 - \beta)^{-1} \|\tilde{w}_*\|$ , и  $\|w_*\|^2 \leq \|w_*^e\|^2 + 2\|w_*^e\| \|\tilde{w}_*\| + \|\tilde{w}_*\|^2 \leq \|w_*^e\|^2 + [2\beta(1 - \beta)^{-1} + 1] \|\tilde{w}_*\|^2$ , из (3.1) находим  $I_* \leq (\beta^2 - 1) \|w_*^e\|^2 + \beta^2(1 + \beta)(1 - \beta)^{-1} \|\tilde{w}_*\|^2 \leq \beta^2(1 + \beta)(1 - \beta)^{-1} \|\tilde{w}_*\|^2$ .

Отсюда видно, что минимальная оценка для  $I_*$  получается при минимальном значении  $\beta$ . Как отмечалось выше,  $\beta_{\min} = \exp(-\lambda t_*)$ , что соответствует релаксационному режиму деформирования.

**4. Численные примеры.** Рассмотрим квадратную пластину толщины  $h = 6$ , занимающую в срединной плоскости область  $S$ :  $0 \leq x_i \leq 300$  ( $i = 1, 2$ ) (здесь и далее все размеры даны в миллиметрах). Остаточный прогиб при  $t = t_*$  зададим в виде  $\tilde{w}_* = -9 \cdot 10^{-4} [x_1(x_1 - 300) + x_2(x_2 - 300)]$ .

Материал пластины считается изотропным, и определяющие уравнения деформирования пластины имеют вид (1.4), где для упругих деформаций  $\varepsilon_{kl}^e$  и скоростей вязких деформаций  $\eta_{kl}$  примем

$$\varepsilon_{kl}^e = (3/2) \sigma_{kl}^0 / E \quad (E — модуль Юнга); \quad (4.1)$$

$$\eta_{kl} = (3/2) A [\exp(\alpha \sigma_i) - 1] \sigma_{kl}^0 / \sigma_i \quad (A, \alpha — \text{const}). \quad (4.2)$$

В формулах (4.1), (4.2)  $\sigma_{kl}^0 = \sigma_{kl} - (1/3) \sigma_{nn} \delta_{kl}$  — компоненты девиатора напряжений;  $\sigma_i = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^{1/2}$  — интенсивность напряжений.

Легко видеть, что зависимости (4.2) являются частным случаем соотношений (1.6), в которых используется упомянутая в п. 1 функция  $\Gamma = B[\exp(\lambda \Sigma / B) - 1]$  ( $\Sigma = \sigma_i / \sqrt{E}$ ,  $B = A\sqrt{E}$ ,  $\lambda = \alpha AE$ ). При этом выполняется неравенство (1.5).

В качестве функции  $f = f(t)$ , фигурирующей в условии задачи, выбиралась

$$f(t) = C[(1 - t/t_*) - (1 - t/t_*)^{\varepsilon}] + t/t_*, \quad (4.3)$$

где  $C \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$  — постоянные.

Как отмечалось выше, при  $f \geq 0$  для постоянной  $\beta$  из (2.3) выполняется неравенство  $\beta < 1$ , гарантирующее корректность данной задачи. В рассматриваемом случае для

выполнения условия  $\dot{f} = [1 - C + C\alpha(1 - t/t_*)^{\alpha-1}]/t_* \geq 0$  достаточно, чтобы

а)  $1 - C \geq 0$ ,  $C \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ , т. е.  $0 \leq C \leq 1$ ,  $\alpha > 0$

или

б)  $\dot{f}(0) \geq 0$ ,  $\ddot{f} = -C\alpha(\alpha - 1)(1 - t/t_*)^{\alpha-2}/t_*^2 \geq 0$ , т. е.  $C > 0$ ,  $1 - 1/C \leq \alpha \leq 1$ .

Если  $\alpha > 1$  и  $C > 0$ , то  $|\dot{f}| \leq [|1 - C| + C\alpha(1 - t/t_*)^{\alpha-1}]/t_*$ , поэтому, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{t_*} |\dot{f}| \exp(\lambda t) dt &\leq |1 - C|[\exp(\lambda t_*) - 1]/(\lambda t_*) + C + C\lambda \int_0^{t_*} (1 - t/t_*)^{\alpha} \exp(\lambda t) dt < \\ &< |1 - C|[\exp(\lambda t_*) - 1]/(\lambda t_*) + C + C\lambda \int_0^{t_*} (1 - t/t_*) \exp(\lambda t) dt = \\ &= (|1 - C| + C)[\exp(\lambda t_*) - 1]/(\lambda t_*). \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае условие  $\beta < 1$  будет выполнено, если

в)  $(|1 - C| + C)[1 - \exp(-\lambda t_*)]/(\lambda t_*) \leq 1$ .

В основе численного решения данной задачи лежит итерационный процесс (2.6). Пусть известно  $n$ -е приближение для искомой функции  $w_*^n$ . Процедура нахождения  $(n + 1)$ -го приближения для  $w_*^{n+1}$  заключается в следующем. Из (1.1), (1.4), (4.1) и (4.2) находим систему уравнений вида (1.12)

$$(3/2)\dot{\sigma}_{kl}^{n0}/E + (3/2)A[\exp(\alpha\sigma_i^n) - 1]\sigma_{kl}^{n0}/\sigma_i^n = -zf w_{*,kl}^n \quad (4.4)$$

с начальными условиями  $\sigma_{kl}^n = 0$  при  $t = 0$ , интегрируя которую, определим компоненты напряжений  $\sigma_{kl}^n$   $n$ -го приближения перед разгрузкой при  $t = t_*$  и соответствующие им моменты  $M_{kl*}^n$ .

Тогда для нахождения упругого прогиба  $w_*^{en}$  получим уравнение вида (1.10), которое в данном случае будет бигармоническим [2, 5]

$$D\Delta\Delta w_*^{en} = -M_{kl*}^n \quad (4.5)$$

с одним из граничных условий (1.11) ( $D = Eh^3/9$  — цилиндрическая жесткость пластины).

По известной функции  $w_*^{en}$ , согласно (2.6), находим  $(n + 1)$ -е приближение для  $w_*^{n+1} = w_*^{en} + \tilde{w}_*$ . Далее процедура повторяется. В качестве нулевого приближения для искомой функции  $w_*$  полагалось  $w_*^0 = \tilde{w}_*$ .

В расчетах приняты следующие значения констант:  $E = 66700$  МПа,  $A = 2,008 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,13 \text{ МПа}^{-1}$ ,  $i_* = 10$  ч. Считалось, что в момент разгрузки ( $t = t_*$ ) контур  $\gamma$  полностью свободен, что соответствует граничному условию (1.11в). Задача (4.5), (1.11в) на каждой итерации решалась методом конечных элементов; при этом использовался треугольный элемент с кубической зависимостью функций формы от однородных  $L$ -координат треугольника [6]. Ввиду симметрии рассматривалась только четверть пластины ( $0 \leq x_i \leq 150$ ,  $i = 1, 2$ ), которая разбивалась на 18 треугольников (16 узлов). При вычислении моментов  $M_{kl*}$  использовалась формула Симпсона с 13 узлами интегрирования по толщине пластины. Система уравнений (4.4) решалась на каждой итерации в каждом узле разбиения (в плоскости  $Ox_1x_2$  и по координате  $z$ ) методом Рунге — Кутты — Мерсона с автоматическим выбором шагов по времени. Итерационный процесс (2.6)



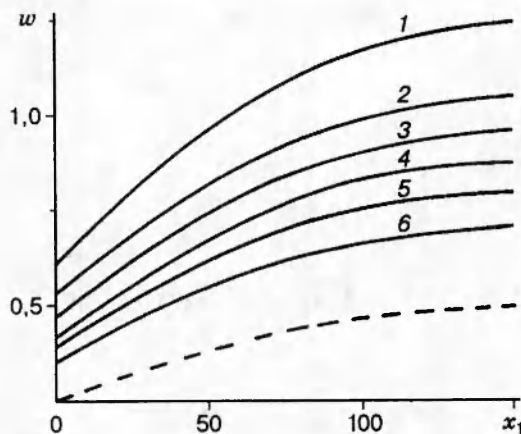


Рис. 1

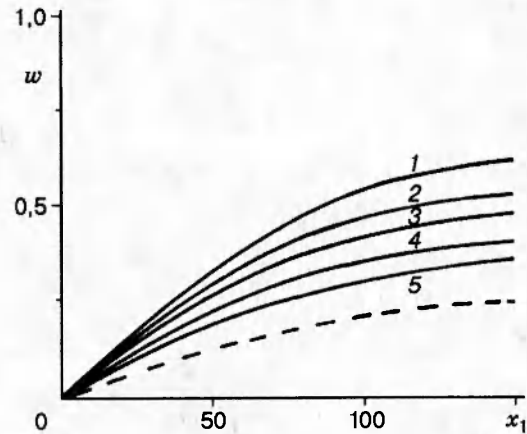


Рис. 2

прекращался, когда выполнялось условие  $\max_{x_1, x_2} |1 - \tilde{w}_*(x_1, x_2)/\tilde{w}_*(x_1, x_2)| \leq 10^{-3}$ .

Вычисления проводились при различных значениях параметров  $C$  и  $\varepsilon$  из (4.3). За счет подходящего выбора последних можно описать разные режимы деформирования пластины, например:

- 1) монотонное возрастание во времени прогиба от нуля до  $w_*$  ( $\dot{f} \geq 0$ , соответствующие ограничения на  $C$  и  $\varepsilon$  указаны выше);
- 2) деформирование, близкое к релаксационному [1, 2, 5], т. е. почти мгновенное возрастание прогиба до  $w_*$  с последующей его фиксацией до момента  $t = t_*$  ( $C = 1$ ,  $\varepsilon \gg 1$ );
- 3) монотонное возрастание прогиба до величины, большей  $w_*$ , с последующим монотонным убыванием до  $w_*$  ( $C > 1$ ,  $\varepsilon > 1$ ).

На рис. 1 и 2 представлены графики для заданного остаточного прогиба  $\tilde{w}_*$  (штриховые линии) и искомого прогиба  $w_*$  (сплошные) в сечениях  $x_2 = 150$  и  $0$  при  $C = 1,0; 0,8; 1,3; 1,0; 1,3$ ,  $\varepsilon = 1; 2; 2; 5; 30; 30$  (рис. 1, линии 1-6) и  $C = 1,0; 0,8; 1,3; 1,0; 1,3$ ,  $\varepsilon = 1; 2; 2; 30; 30$  (рис. 2, линии 1-5). Все эти значения удовлетворяют отмеченным выше ограничениям  $a$ , или  $b$ , или  $v$ , достаточным для выполнения неравенства  $\beta < 1$ , гарантирующего корректность рассматриваемой задачи.

Представляет определенный интерес указать среди множества функций вида (4.3), определяемого параметрами  $C$  и  $\varepsilon$ , такую, при которой уровень остаточных напряжений в пластине после разгрузки при  $t = t_*$  будет минимальным. Компоненты  $\rho_{kl*}$  находятся из (1.7):  $\rho_{kl*} = \sigma_{kl*} - \sigma_{kl*}^e$ . Здесь  $\sigma_{kl*}^e$  связаны с прогибом  $w_*^e$  соотношениями вида (1.8):  $\sigma_{kl*}^e = -(2/3)Ez(w_{*,kl}^e + w_{*,nn}^e \delta_{kl})$ . В качестве величины, характеризующей уровень остаточных напряжений, выберем их интенсивность  $\rho_{i*} = (\rho_{11*}^2 + \rho_{22*}^2 - \rho_{11*}\rho_{22*} + 3\rho_{12*}^2)^{1/2}$ .

Для режимов деформирования, отвечающих линиям 1-6 на рис. 1, получены следующие значения:  $\rho_{i*\max} = 1,09; 0,93; 0,88; 0,77; 0,67; 0,69$  МПа. Отсюда видно, что  $\min \rho_{i*\max} = 0,67$  МПа и соответствует  $C = 1$  и  $\varepsilon = 30$ . Сравнительный анализ результатов показывает, что при  $C = 1$  и  $\varepsilon \geq 30$  напряженно-деформированное состояние пластины (в том числе и эпюры остаточных напряжений) практически совпадает с аналогичным для релаксационного режима деформирования. Таким образом, последний является оптимальным в смысле уровня остаточных напряжений после разгрузки. Это качественно согласуется с оценкой, полученной в п. 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00896).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Цвелодуб И. Ю. Некоторые обратные задачи изгиба пластин при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 126–134.
2. Цвелодуб И. Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
3. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
5. Цвелодуб И. Ю., Сухоруков И. В. Некоторые обратные задачи упругопластического формоизменения пластин // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1990. Т. 4(21), № 4. С. 153–159.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.

*Поступила в редакцию 30/I 1995 г.,  
в окончательном варианте — 31/VII 1995 г.*

---