УДК 539.374

ЛОКАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВЫРАБОТОК МНОГОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАССИВАХ

Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин

Воронежский государственный университет, 394006 Воронеж
E-mail: enenkoira@yandex.ru

В рамках точных трехмерных уравнений устойчивости исследована локальная неустойчивость горизонтальной горной выработки, имеющей в поперечном сечении форму правильного многоугольника при упруговязкопластическом поведении массива горных пород. Дана оценка влияния параметров горного массива на величину критического давления.

Ключевые слова: локальная неустойчивость, горные выработки, упруговязкопластическая среда.

Известно, что решение задач горной механики, относящихся к процессам проведения подземных выработок, бурения нефтяных и газовых скважин, сводится к постановке и решению задач локальной неустойчивости массива в окрестности выработок при упругопластических деформациях [1–4]. Это обусловлено тем, что вокруг выработок и скважин напряжения уже на небольших глубинах до 1 км превосходят предел прочности горной породы, в результате она переходит в состояние неупругого деформирования раньше, чем происходит локальная потеря устойчивости. Первый этап решения этой задачи заключается в нахождении напряженно-деформированного состояния бесконечного пространства, нагруженного собственным весом, с бесконечной цилиндрической выработкой, имеющей в поперечном сечении форму правильного многоугольника. Второй этап состоит в решении линеаризированной задачи устойчивости, т. е. в определении критического значения давления, равномерно распределенного по контуру выработки. В отличие от [2] в настоящей работе на основе точных трехмерных уравнений [5] исследуется локальная неустойчивость пород приствольной зоны горизонтальной горной выработки с учетом многоугольной формы ее поперечного сечения. Свойства пород приствольной зоны моделируются соотношениями упруговязкопластического тела с трансляционным упрочнением [6, 7].

В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = (S_i^j - c(\varepsilon_i^j)^p - \eta(e_i^j)^p)(S_j^i - c(\varepsilon_j^i)^p - \eta(e_j^i)^p) - k^2, \tag{1}$$

а соотношения ассоциированного закона течения — вид

$$(e_i^j)^p = \lambda(S_i^j - c(\varepsilon_i^j)^p - \eta(e_i^j)^p). \tag{2}$$

Здесь c — коэффициент упрочнения; η — коэффициент вязкости; k — предел текучести; $S_i^j = \sigma_i^j - \sigma\delta_i^j$ — девиатор тензора напряжений; $\sigma = \sigma_k^k/3$; δ_i^j — символ Кронекера; ε_i^j — компоненты тензора деформаций; e_i^j — компоненты тензора скоростей деформаций; λ — положительный множитель.

Исследование основного состояния тела объема V, характеризуемого вектором перемещения $\mathring{u}_i(x_k,t)$, тензором напряжений $\mathring{\sigma}_i^j(x_k,t)$, вектором объемных $X\mathring{X}_i$ и поверхностных $\mathring{P}_i$ сил, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях [4].

Уравнения равновесия для областей пластического V^p и упругого V^e деформирования имеют вид

$$\nabla_i(\sigma_j^i + \mathring{\sigma}_\alpha^i \nabla^\alpha u_j) + X_i - \rho s^2 u_j = 0, \qquad s = i\omega. \tag{3}$$

Граничные условия на внешней поверхности S_p^p (соответственно S_p^e) запишем в виде

$$N_i(\sigma_j^i + \mathring{\sigma}_\alpha^i \nabla^\alpha u_j) = p_j, \qquad u_j\big|_{r\to\infty} \to 0, \tag{4}$$

при этом в случае “следящей” нагрузки $p_i = \mathring{p}_k \nabla^k u_j$, $X_i = \mathring{X}_k \nabla^k u_j$, в случае “мертвой” нагрузки $p_i = X_i = 0$. Здесь и далее ∇ — символ ковариантного дифференцирования; индексы e и p обозначают, что соответствующие величины относятся к упругой или пластической области; кружочком вверху помечены компоненты основного невозмущенного состояния.

Условия непрерывности на упругопластической границе γ имеют вид

$$[N_i(\sigma_j^i + \mathring{\sigma}_\alpha^i \nabla^\alpha u_j)] = 0, \qquad [u_i] = 0. \tag{5}$$

Зависимость между амплитудными значениями напряжений и перемещений для несжимаемой упруговязкопластической модели среды в случае неоднородного основного состояния в пластической и упругой областях можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{\alpha\beta} a_{ij}^\alpha g^{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{12} a_{ij}^4 + p g_{ij}. \tag{6}$$

Коэффициенты a_{ij}^s имеют вид

$$\begin{gathered} a_{ij}^1 = a f_{ij}(-2f_{11} + r^2 f_{22})/3, \qquad a_{ij}^2 = a f_{ij}(f_{11} - 2r^2 f_{22})/3, \qquad a_{ij}^3 = a f_{ij}(f_{11} + r^2 f_{22})/3, \\ a_{ij}^4 = -2a f_{ij} f_{12}, \qquad f_{ij} = S_{ij}^0 - c\mathring{\varepsilon}_{ij}^p, \qquad a = 4\mu^2/(k^2(2\mu + c + \eta s)), \end{gathered} \tag{7}$$

где p — множитель Лагранжа; $s = i\omega$; $\omega = \alpha + i\beta$; μ — параметр Ламе. При $a = 0$ соотношения (6), (7) соответствуют упругой области.

Уравнения (3)–(7) представляют собой замкнутую систему уравнений для исследования задач устойчивости, когда имеется граница раздела областей упругого и пластического поведения материала при нагружении.

Горный массив с горизонтальной выработкой, имеющей в поперечном сечении форму правильного многоугольника (со сглаженными углами), будем моделировать невесомой бесконечной пластиной с многоугольным отверстием радиуса R_B, по контуру которого приложена равномерно распределенная нагрузка q_0 (давление жидкости или газа на выработку). Величина q_0 такова, что образовавшаяся пластическая область полностью охватывает контур выработки. На бесконечности напряжения в пластине стремятся к величине gh (g — объемный вес породы; h — глубина заложения выработки), т. е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим.

При определении компонент напряженно-деформированного основного состояния все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра δ, характеризующего отклонение невозмущенного состояния от исходного, т. е. отклонение окружности радиуса R_0 от правильного многоугольника (B-угольника), уравнение контура которого имеет вид

$$R_B = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n R_B^{(n)} = R_0\Big(1 + \delta\cos B\theta - \frac{3}{4}\,\delta^2 d'^2(1 - \cos 2B\theta + \ldots)\Big), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

$$\{\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij}, \varepsilon^e_{ij}, e^p_{ij}, \ldots\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \{\sigma^{(n)}_{ij}, \varepsilon^{p(n)}_{ij}, \varepsilon^{e(n)}_{ij}, e^{p(n)}_{ij}, \ldots\}.$$

Нулевое приближение соответствует осесимметричному состоянию плоскости с круговым отверстием радиуса R_0 и в полярных координатах (r, θ) согласно [8] принимает следующий вид:

— в пластической области $(R_0 < r < 1)$

$$\sigma^{(0)}_r = -q_0 + \frac{4\chi\mu}{2\mu + c}\Big[\frac{c + 2\mu\,\mathrm{e}^{-\alpha t}}{4\mu}\Big(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2}\Big) + (1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})\ln\frac{r}{R_0}\Big],$$

$$\sigma^{(0)}_\theta = -q_0 + \frac{4\chi\mu}{2\mu + c}\Big[\frac{c + 2\mu\,\mathrm{e}^{-\alpha t}}{4\mu}\Big(\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{r^2}\Big) + (1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})\Big(1 + \ln\frac{r}{R_0}\Big)\Big], \tag{8}$$

$$\varepsilon^{p(0)}_\theta = -\varepsilon^{p(0)}_r = \frac{\chi(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})}{2\mu + c}\Big(\frac{1}{r^2} - 1\Big),$$

где μ — модуль сдвига; $\chi = \operatorname{sign}(q_0 - gh)$; $\alpha = (2\mu + c)/\eta$;

— в упругой области $(1 < r < \infty)$

$$\sigma^{(0)}_r = -gh - \frac{1}{r^2}, \qquad \sigma^{(0)}_\theta = -gh + \frac{1}{r^2}, \qquad \varepsilon^{p(0)}_\theta = -\varepsilon^{p(0)}_r = \frac{\chi}{2\mu r^2}. \tag{9}$$

Уравнение для определения радиуса $\gamma^{(0)}$ упругопластической границы в массиве имеет вид

$$|q_0 - gh|(2\mu + c) - 2\mu + 4\mu\ln R_0(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}) - (2\mu\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + c)/R_0^2 = 0. \tag{10}$$

Первое приближение согласно [8] запишем в следующем виде:

— в пластической области $(R_0 < r < 1)$

$$\sigma^{(1)}_r = \frac{m_1}{2}\Big(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} - 2\ln\frac{r}{R_0}\Big) + \frac{2AR_0d'}{r}\,(\sqrt{B^2 - 1}\sin\phi_1 - \cos\phi_1)\cos B\theta,$$

$$\sigma^{(1)}_\theta = \frac{m_1}{2}\Big(\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{r^2} - 2 - 2\ln\frac{r}{R_0}\Big) + \frac{2AR_0d'}{r}\,(\sqrt{B^2 - 1}\sin\phi_1 - \cos\phi_1)\cos B\theta,$$

$$\tau^{(1)}_{r\theta} = -\frac{2m_1AR_0d'}{r}\,\cos\phi_1'\sin B\theta, \tag{11}$$

$$\varepsilon^{p(1)}_\theta = \frac{m_1}{2\mu}\Big(1 - \frac{2a_0 + 1}{r^2}\Big) - \frac{1}{r}\Big\{B\sqrt{B^2 - 1}\,(c_1\sin\phi - c_2\cos\phi) -$$
$$- \frac{AR_0d'}{\mu(2\mu + c)}\Big[((1 + B^2)\cos\phi_1 - \sqrt{B^2 - 1}\,\sin\phi_1)\,\frac{\mu(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})}{r^2} +$$
$$+ \frac{B^2(2\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + c)}{\sqrt{B^2 - 1}}(\sin\phi_1 + \sqrt{B^2 - 1}\,\ln r\cos\phi_1)\Big]\Big\}\sin B\theta,$$
$$\varepsilon^{p(1)}_r = -\varepsilon^{p(1)}_\theta,$$

где

$$c_1 = \frac{AR_0d'}{B\mu(2\mu + c)(B^2 - 1)}\,\{\mu(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})(B^2 - 1)\cos\phi_0 +$$
$$+ \sqrt{B^2 - 1}\,[\mu(m^2 - 1)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}) - B(2\mu + c)]\sin\phi_0\},$$

$$c_2 = \frac{AR_0 d'}{B\mu(2\mu + c)(B^2 - 1)} \{\sqrt{B^2 - 1}\, [\mu(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})(B^2 + 1) - m(2\mu + c)] \cos\phi_0 + \\ + [B^2(2\mu\, \mathrm{e}^{-\alpha t} + c) + (1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})(B^2 - 1)\mu] \sin\phi_0\},$$

$$A = \frac{1}{2\mu + c}\Big[2\mu(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}) + \frac{c + 2\mu\, \mathrm{e}^{-\alpha t}}{R_0^2}\Big], \qquad m_1 = \frac{2c}{2\mu + c}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}) + 2\,\mathrm{e}^{-\alpha t},$$

$$\phi = \sqrt{B^2 - 1}\, \ln r, \quad \phi_1 = \sqrt{B^2 - 1}\, \ln\frac{r}{R_0}, \quad \phi_0 = \sqrt{B^2 - 1}\, \ln R_0, \quad a_0 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{R_0^2} - 1 + 2\ln R_0\Big);$$

— в упругой области ($1 < r < \infty$)

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{m_1 a_0}{r^2} - \frac{M}{2}\Big(\frac{B+2}{r^B} - \frac{B}{r^{B+2}}\Big) + N\Big(\frac{B+2}{r^{B+2}} - \frac{B+2}{r^B}\Big)\cos B\theta,$$
$$\sigma_\theta^{(1)} = -\frac{m_1 a_0}{r^2} - \frac{M}{2}\Big(\frac{B}{r^{B+2}} - \frac{B-2}{r^B}\Big) + N\Big(\frac{B-2}{r^B} - \frac{B+2}{r^{B+2}}\Big)\cos B\theta, \tag{12}$$
$$\tau_{r\theta}^{(1)} = \frac{M}{2}\Big(\frac{B}{r^{B+2}} - \frac{B}{r^B}\Big) - N\Big(\frac{B}{r^B} - \frac{B+2}{r^{B+2}}\Big)\sin B\theta,$$

где $M = 2AR_0 d'(\sqrt{m^2 - 1}\, \sin\phi_0 + \cos\phi_0)$; $N = 2BAR_0 d' \cos\phi_0$.

Уравнение для определения радиуса $\gamma^{(1)}$ упругопластической границы имеет вид

$$\gamma^{(1)} = -\frac{(2\mu + c)m_1 a_0}{4\mu(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})} + \frac{2\mu + c}{2\mu(1 - \mathrm{e}^{-2t})}\, BAR_0 d' \cos\phi_0 \cos B\theta. \tag{13}$$

В (8)–(13) все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к пределу текучести k, а имеющие размерность длины — к радиусу $\gamma^{(0)}$ упругопластической границы в невозмущенном состоянии.

Для определения нулевого и первого приближений этой задачи использовались уравнения равновесия, условие пластичности (1), соотношения ассоциированного закона пластического течения (2), соотношения, связывающие полные упругие и пластические деформации, общие уравнения теории упругости, граничные условия, а также условия сопряжения решений в упругой и пластической областях.

Уравнения (3)–(7) в предположении продолжающегося нагружения [5] и с учетом условия несжимаемости массива представляют собой замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости основного состояния (8)–(13) горизонтальной выработки с многоугольным поперечным сечением, когда имеется граница раздела областей упругого и пластического поведения материала при нагружении в массиве горных пород. Это система дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент векторов перемещений u, v, w и гидростатического давления p, соответствующих пластической и упругой зонам массива. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений задачи перемещения и гидростатические давления в зонах упругого и пластического деформирования горного массива аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами:

$$u = \sum_n^\infty \sum_m^\infty A_{nm}(r)\cos m\theta \cos nz, \qquad v = \sum_n^\infty \sum_m^\infty B_{nm}(r)\sin m\theta \cos nz,$$
$$w = \sum_n^\infty \sum_m^\infty C_{nm}(r)\cos m\theta \sin nz, \qquad p = \sum_n^\infty \sum_m^\infty D_{nm}(r)\cos m\theta \cos nz$$

(n, m — параметры волнообразования).

Подставляя функции u, v, w, p в линеаризированные уравнения устойчивости (3) и учитывая (6), (7), а также условие несжимаемости, после ряда преобразований бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно A_{nm} и B_{nm} получим в виде

$$\xi_1 A(r)+\xi_2 A'(r)+\xi_3 A''(r)+\xi_4 A'''(r)+\xi_5 A^{IV}(r)+\xi_6 B(r)+\xi_7 B'(r)+\xi_8 B''(r)+\xi_9 B'''(r)=0,$$

$$\xi_{10} A(r)+\xi_{11} A'(r)+\xi_{12} A''(r)+\xi_{13} A'''(r)+\xi_{14} B(r)+\xi_{15} B'(r)+\xi_{16} B''(r)=0, \tag{14}$$

где

$$\xi_1=\Big\{a_{2,r}+\frac{1}{r}\,(a_{10,\theta}-a_6)-\frac{\sigma_\theta^0}{r}\,(1+m^2)+r\rho\omega^2-m^2a_{12}-n^2\mu r+$$
$$+\frac{1}{r}\Big[a_7-a_{11,\theta}-ra_{3,r}+\frac{1}{n^2}\Big(\frac{3\mu}{r^2}\,(1-m^2)-\frac{3m^2}{r^2}\,\sigma_\theta^0+\frac{m^2}{r}\,\sigma_{\theta,r}^0+$$
$$+\frac{1}{r}\Big(r\rho\omega^2-\frac{3}{r}\,(\tau_{r\theta,\theta}^0-3\sigma_r^0)-5\sigma_{r,r}^0+r\sigma_{r,rr}^0+\tau_{r\theta,r\theta}^0\Big)\Big)\Big]\Big\}\cos m\theta+$$
$$+\Big\{a_4-a_{12,\theta}+ra_{4,r}-a_8-\tau_{r\theta,r}^0+$$
$$+\frac{1}{r}\Big[a_{11}-a_{10}-\sigma_{\theta,\theta}^0+\frac{1}{n^2}\Big(\frac{6\tau_{r\theta}^0}{r^2}-\frac{4}{r}\,\tau_{r\theta,r}^0-\frac{3}{r^2}\,\sigma_{\theta,\theta}^0+\tau_{r\theta,r\theta}^0+\frac{1}{r}\,\sigma_{\theta,\theta r}^0\Big)\Big]\Big\}m\sin m\theta,$$

$$\xi_2=\Big\{a_1+a_2-2a_3-a_5+a_7+r(a_{1,r}-a_{3,r})+a_{9,\theta}-a_{11,\theta}-\sigma_r^0+r\sigma_{r,r}^0+\tau_{r\theta,\theta}^0+$$
$$+\frac{1}{r}\,(\lambda+\mu)-\frac{1}{n^2}\Big[\frac{\mu}{r^2}\,(3+m^2)+\frac{m^2}{r^2}\,\sigma_\theta^0-\frac{m^2}{r}\,\sigma_{\theta,r}^0+$$
$$+\frac{1}{r}\Big(r\rho\omega^2+r\sigma_{r,rr}^0-\frac{3}{r}\,\tau_{r\theta,\theta}^0+\frac{9}{r}\,\sigma_r^0+\tau_{r\theta,r\theta}^0-5\sigma_{r,r}^0\Big)\Big]\Big\}\cos m\theta+$$
$$+\Big\{ra_4+a_{11}-a_9-2\tau_{r\theta}^0\Big(1+\frac{3}{r^2n^2}\Big)+\frac{1}{n^2}\Big[\frac{2\tau_{r\theta,r}^0}{r}-\frac{1}{r^2}\,\sigma_{\theta,\theta}^0+\tau_{r\theta,r\theta}^0+\frac{1}{r}\,\sigma_{\theta,\theta r}^0\Big]\Big\}m\sin m\theta,$$

$$\xi_3=\Big\{r(a_1-a_3+\sigma_r^0)+(r-1)(\lambda+\mu)-$$
$$-\frac{1}{n^2}\Big[r\rho\omega^2-\frac{\mu}{r}\,(m^2+3)-\frac{m^2}{r}\,\sigma_\theta^0+\sigma_{r,r}^0-\frac{3}{r}\,\sigma_r^0+\tau_{r\theta,r\theta}^0+r\sigma_{r,rr}^0\Big]\Big\}\cos m\theta+$$
$$+\Big\{\frac{1}{r}\,\sigma_{\theta,\theta r}^0+3\tau_{r\theta,r}^0\Big\}\frac{m}{n^2}\,\sin m\theta,$$

$$\xi_4=-\frac{1}{n^2}\,\{2r\sigma_{r,r}^0+2\mu+\tau_{r\theta,\theta}^0\}\cos m\theta+\frac{2m}{n^2}\,\tau_{r\theta}^0\sin m\theta, \qquad \xi_5=-\frac{r(\mu+\sigma_r^0)}{n^2}\,\cos m\theta,$$

$$\xi_6=\Big\{a_{2,r}-a_{12}+\frac{1}{r}\Big[a_{10,\theta}-a_6-2\sigma_\theta^0-a_{11,\theta}+a_7-ra_{3,r}-$$
$$-\frac{1}{n^2}\Big(\frac{\mu}{r^2}\,(5+3m^2)+\frac{3m^2}{r^2}\,\sigma_\theta^0-\frac{m^2}{r}\,\sigma_{\theta,r}^0+\rho\omega^2-\frac{3}{r}\,\sigma_{r,r}^0-\frac{1}{r^2}\,\tau_{r\theta,\theta}^0+$$
$$+\frac{7}{r^2}\,\sigma_r^0-\sigma_{r,rr}^0-\frac{1}{r}\,\tau_{r\theta,r\theta}^0\Big)\Big]\Big\}m\cos m\theta+$$
$$+\Big\{ra_{4,r}-a_{12,\theta}+a_4-a_8-\tau_{r\theta,r}^0-\frac{1}{r}\,(\sigma_{\theta,\theta}^0+m^2(a_{10}-a_{11}))-$$

$$
-\frac{m^2}{n^2 r}\Big[\frac{2}{r^2}\,\tau^0_{r\theta}+\frac{4}{r}\,\tau^0_{r\theta,r}+\frac{3}{r^2}\,\sigma^0_{\theta,\theta}-\tau^0_{r\theta,r\theta}-\frac{1}{r}\,\sigma^0_{\theta,\theta r}\Big]\Big\}\sin m\theta,
$$

$$
\xi_7=\Big\{a_2+ra_{12}-a_3-\frac{1}{rn^2}\Big[r\rho\omega^2+\frac{\mu}{r}\,(3-m^2)-\frac{m^2}{r}\,\sigma^0_\theta+r\sigma^0_{r,rr}-
$$

$$
-\frac{3}{r}\,\tau^0_{r\theta,\theta}+\frac{9}{r}\,\sigma^0_r-5\sigma^0_{r,r}+\tau^0_{r\theta,r\theta}\Big]\Big\}m\cos m\theta+
$$

$$
+\Big\{r\Big(a_{12,\theta}-a_4+a_8-ra_{4,r}-\frac{2}{r}\,\tau^0_{r\theta}\Big)-\frac{m^2}{n^2 r}\Big(\frac{6}{r}\,\tau^0_{r\theta}-3\tau^0_{r\theta,r}-\frac{1}{r}\,\sigma^0_{\theta,\theta}\Big)\Big\}\sin m\theta,
$$

$$
\xi_8=-\frac{m}{rn^2}\Big\{2r\sigma^0_{r,r}-2\mu-4\sigma^0_r+\tau^0_{r\theta,\theta}\Big\}\cos m\theta+\Big\{\frac{2m^2}{rn^2}\,\tau^0_{r\theta}-r^2a_4\Big\}\sin m\theta,
$$

$$
\xi_9=-\frac{m(\mu+\sigma^0_r)}{n^2}\,\cos m\theta, \qquad (15)
$$

$$
\xi_{10}=m\Big\{a_{8,\theta}-2a_{12}-a_{12,r}+\frac{1}{r}\Big[a_7-a_6-2\sigma^0_\theta+\frac{1}{rn^2}\Big(r\rho\omega^2+\frac{\mu}{r}\,(1-m^2)-
$$

$$
-\frac{m^2}{r}\sigma^0_\theta-\sigma^0_{r,r}-\frac{1}{r}\,(\tau^0_{r\theta,\theta}-3\sigma^0_r)\Big)\Big]\Big\}\cos m\theta\sin m\theta+
$$

$$
+\Big\{\frac{1}{r}\Big[(a_{10}-a_{11})\Big(2-\frac{1}{r}\Big)+a_{10,r}+a_{6,\theta}+r\tau^0_{r\theta,r}+\sigma^0_{\theta,\theta}-a_{11,r}-a_{7,\theta}+rm^2a_8\Big]\Big\}\cos^2 m\theta+
$$

$$
+\Big(\frac{m}{rn}\Big)^2\Big\{\frac{1}{r}\,(2\tau^0_{r\theta}-\sigma^0_{\theta,\theta})-\tau^0_{r\theta,r}\Big\}\sin^2 m\theta,
$$

$$
\xi_{11}=m\Big\{a_7-a_{12}-a_5+\frac{1}{r}\Big[(\lambda+\mu)(1-r)+
$$

$$
+\frac{1}{n^2}\Big(r\rho\omega^2-\frac{\mu}{r}\,(1+m^2)-\frac{m^2}{r}\,\sigma^0_\theta+\sigma^0_{r,r}+\frac{1}{r}\,(\tau^0_{r\theta,\theta}-3\sigma^0_r)\Big)\Big]\Big\}\cos m\theta\sin m\theta+
$$

$$
+\Big\{2\tau^0_{r\theta}+2a_9+a_{9,r}+\frac{1}{r}\,a_{10,r}+a_{5,\theta}-a_{11,r}-a_{7,\theta}-a_{11}\Big(2+\frac{1}{r}\Big)\Big\}\cos^2 m\theta-
$$

$$
-\frac{m^2}{rn^2}\Big\{\frac{1}{r}\,(2\tau^0_{r\theta}+\sigma^0_{\theta,\theta})+\tau^0_{r\theta,r}\Big\}\sin^2 m\theta,
$$

$$
\xi_{12}=\frac{m}{rn^2}\,\{2\mu+r\sigma^0_{r,r}+\tau^0_{r\theta,\theta}\}\cos m\theta\sin m\theta+\{a_9-a_{11}\}\cos^2 m\theta-\frac{2m^2}{rn^2}\,\tau^0_{r\theta}\sin^2 m\theta,
$$

$$
\xi_{13}=\frac{m}{n^2}\,\{\mu+\sigma^0_r\}\cos m\theta\sin m\theta,
$$

$$
\xi_{14}=\Big\{a_{8,\theta}-2a_{12}-a_{12,r}+r\rho\omega^2\Big(1+\Big(\frac{m}{rn}\Big)^2\Big)-n^2\mu r-\frac{1}{r}\,\sigma^0_\theta+
$$

$$
+\frac{m^2}{r}\Big[a_7-a_6-\sigma^0_\theta+\frac{1}{rn^2}\Big(\frac{\mu}{r}\,(1-m^2)-\frac{m^2}{r}\,\sigma^0_\theta-\sigma^0_{r,r}-\frac{1}{r}\,(\tau^0_{r\theta,\theta}-3\sigma^0_r)\Big)\Big]\Big\}\cos m\theta\sin m\theta+
$$

$$
+\frac{m}{r}\Big\{(a_{10}-a_{11})\Big(2-\frac{1}{r}\Big)+a_{10,r}+r\tau^0_{r\theta,r}+\sigma^0_{\theta,\theta}+a_{6,\theta}-a_{11,r}-a_{7,\theta}+ra_8\Big\}\cos^2 m\theta-
$$

$$
-\frac{m^3}{r^3n^2}\,\{2\tau^0_{r\theta}-\sigma^0_{\theta,\theta}-r\tau^0_{r\theta,r}\}\sin^2 m\theta,
$$

$$
\xi_{15}=\Big\{r\Big(2a_{12}+a_{12,r}-a_{8,\theta}+\sigma^0_{r,r}+\frac{1}{r}\,(\tau^0_{r\theta,\theta}-\sigma^0_r)\Big)+
$$

$$+\left(\frac{m}{rn}\right)^2(\tau^0_{r\theta,\theta}+r\sigma^0_{r,r}-3\sigma^0_r-\mu)\Big\}\cos m\theta\sin m\theta+$$

$$+m\Big\{\frac{1}{r}(a_{10}-a_{11})-ra_8+2\tau^0_{r\theta}\Big\}\cos^2 m\theta-\frac{2m^3}{r^2n^2}\tau^0_{r\theta}\sin^2 m\theta,$$

$$\xi_{16}=\frac{m}{n^2}\Big\{r(a_{12}+\sigma^0_r)+\frac{m^2}{rn^2}(\mu+\sigma^0_r)\Big\}\cos m\theta\sin m\theta.$$

При этом в горном массиве в пластической области V^p докритическое состояние определяется по формулам (8), (11), а в упругой области V^e — по формулам (9), (12). Для упрощения записи в (14) и далее индексы n, m у величин A, B опущены.

Граничные условия (4) на внутреннем контуре выработки при $r=R_0(1+\delta\cos B\theta-(3/4)\delta^2 d'^2(1-\cos 2B\theta+\ldots))$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ с учетом (6), (7) принимают вид

$$\begin{gathered}A\varphi_1+A'\varphi_2+A''\varphi_3+A'''\varphi_4+B\varphi_5+B'\varphi_6+B''\varphi_7=0,\\ A\varphi_8+A'\varphi_9+B\varphi_{10}+B'\varphi_{11}=0,\\ A\varphi_{12}+A'\varphi_{13}+A''\varphi_{14}+B\varphi_{15}+B'\varphi_{16}=0,\end{gathered}\tag{16}$$

где

$$\varphi_1=-\frac{1}{r}\Big\{a_3-a_2-\mu+\frac{1}{rn^2}\Big[r\rho\omega^2+\frac{\mu}{r}(1-m^2)-\frac{m^2}{r}\sigma^0_\theta+\frac{1}{r}(3\sigma^0_r-\tau^0_{r\theta,\theta}-r\sigma^0_{r,r})\Big]\Big\}\cos m\theta+$$

$$+m\Big\{a_4-\frac{1}{r}\tau^0_{r\theta}\Big(1+\frac{2}{r^2n^2}\Big)+\frac{1}{n^2r^2}\Big(\tau^0_{r\theta,r}+\frac{1}{r}\sigma^0_{\theta,\theta}\Big)\Big\}\sin m\theta,$$

$$\varphi_2=\Big\{a_1-a_3+\sigma^0_r-\frac{1}{r}\Big[(1-r)(\lambda+\mu)+\frac{1}{n^2}\Big(r\rho\omega^2-\frac{\mu}{r}(m^2+1+n^2r^2)-$$

$$-\frac{m^2}{r}\sigma^0_\theta+\frac{1}{r}(r\sigma^0_{r,r}-3\sigma^0_r+\tau^0_{r\theta,\theta})\Big)\Big]\Big\}\cos m\theta+$$

$$+\frac{m}{rn^2}\Big\{\frac{1}{r}\sigma^0_{\theta,\theta r}+\tau^0_{r\theta,r}+\frac{2}{r}\tau^0_{r\theta}\Big\}\sin m\theta,$$

$$\varphi_3=-\frac{1}{rn^2}\{r\sigma^0_{r,r}+2\mu+\tau^0_{r\theta,\theta}\}\cos m\theta+\frac{2m}{rn^2}\tau^0_{r\theta}\sin m\theta,\qquad \varphi_4=-\frac{\mu+\sigma^0_r}{n^2}\cos m\theta,$$

$$\varphi_5=-\frac{m}{r}\Big\{a_3-a_2-\mu+\frac{1}{rn^2}\Big[r\rho\omega^2+\frac{\mu}{r}(1-m^2)-\frac{m^2}{r}\sigma^0_\theta+\frac{1}{r}(3\sigma^0_r-\tau^0_{r\theta,\theta}-r\sigma^0_{r,r})\Big]\Big\}\cos m\theta+$$

$$+\Big\{a_4-\frac{1}{r}\tau^0_{r\theta}+\Big(\frac{m}{nr}\Big)^2\Big(\tau^0_{r\theta,r}+\frac{1}{r}\sigma^0_{\theta,\theta}-\frac{2}{r}\tau^0_{r\theta}\Big)\Big\}\sin m\theta,$$

$$\varphi_6=\frac{m}{r^2n^2}\{\mu+3\sigma^0_r-r\sigma^0_{r,r}-\tau^0_{r\theta,\theta}\}\cos m\theta+\Big\{2\Big(\frac{m}{rn}\Big)^2\tau^0_{r\theta}-ra_4\Big\}\sin m\theta,\tag{17}$$

$$\varphi_7=-\frac{m(\mu+\sigma^0_r)}{rn^2}\cos m\theta,\qquad \varphi_8=\frac{1}{r}\{a_{10}-a_{11}+\tau^0_{r\theta,\theta}\}\cos m\theta-ma_{12}\sin m\theta,$$

$$\varphi_9=\{a_9-a_{11}\}\cos m\theta,\qquad \varphi_{10}=\frac{m}{r}\{a_{10}-a_{11}+\tau^0_{r\theta,\theta}\}\cos m\theta-a_{12}\sin m\theta,$$

$$\varphi_{11}=\{ra_{12}+\sigma^0_r\}\sin m\theta,\qquad \varphi_{12}=\Big\{n\mu-\frac{\mu+\sigma^0_r}{nr^2}\Big\}\cos m\theta-\frac{m}{nr^2}\tau^0_{r\theta}\sin m\theta,$$

$$\varphi_{13}=\frac{\mu+\sigma^0_r}{nr}\cos m\theta-\frac{m}{nr}\tau^0_{r\theta}\sin m\theta,\qquad \varphi_{14}=\frac{\mu+\sigma^0_r}{nr}\cos m\theta,$$

$$\varphi_{15} = -\frac{m(\mu + \sigma_r^0)}{nr^2} \cos m\theta - \frac{m^2}{nr^2} \tau_{r\theta}^0 \sin m\theta, \qquad \varphi_{16} = \frac{m(\mu + \sigma_r^0)}{nr} \cos m\theta.$$

Условия непрерывности напряжений (5) на упругопластической границе $\gamma = \gamma^{(0)} + \delta\gamma^{(1)}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ с учетом (6), (7) имеют вид

$$A^p\zeta_1 + A'^p\zeta_2 + A''^p\varphi_3^p - A''^e\varphi_3^e + A'''^p\varphi_4^p - A'''^p\varphi_4^p + B^p\zeta_5 + B'^p\zeta_6 + B''^p\varphi_7^p - B''^e\varphi_7^e = 0,$$
$$A^p\zeta_8 + A'^p\zeta_9 + B^p\zeta_{10} + B'^p\zeta_{11} = 0, \qquad (18)$$
$$A^p\zeta_{12} + A'^p\zeta_{13} + A''^p\varphi_{14}^p - A''^e\varphi_{14}^e + B^p\zeta_{15} + B'^p\zeta_{16} = 0,$$

где $\zeta_i = \varphi_i^p - \varphi_i^e$ $(i = 1, 2, \ldots, 16)$.

Из условия локальности возмущений $u_j \to 0$ при $r \to \infty$ $(j = 1, 2, 3)$ следует

$$(A')^e = 0, \qquad (A'')^e = 0, \qquad (B')^e = 0, \qquad (B'')^e = 0. \qquad (19)$$

Поскольку точное аналитическое решение краевой задачи (14)–(19) найти не удается, будем искать приближенное решение методом конечных разностей [9]. Метод основан на замене производных от функций $A(r)$, $B(r)$ конечно-разностными выражениями. В результате получаем однородную систему алгебраических уравнений, линейных относительно параметров A_{nm}, B_{nm}. Отсюда следует, что определение значения критической нагрузки q_0, соответствующей локальной потере устойчивости горизонтальной выработки с многоугольным поперечным сечением, сводится к разрешимости матричного уравнения. При вычислении определителя наряду с нахождением основного напряженно-деформированного состояния для каждой области V^p, V^e массива (8), (11), (9), (12) необходимо учитывать уравнения (10) и (13), определяющие положение упругопластической границы γ в горном массиве. Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру m и образующей n, параметрам материала и конструкции λ_j. Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины q_0 в зависимости от m, n при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы: $\det(q_0, m, n, \lambda_j) = 0$.

Вычисления проводились для случая, когда горный массив содержал выработку, имеющую в поперечном сечении форму квадрата ($B = 4$) со сглаженными углами. На рис. 1–3 представлены зависимости критического давления на контуре выработки от величины

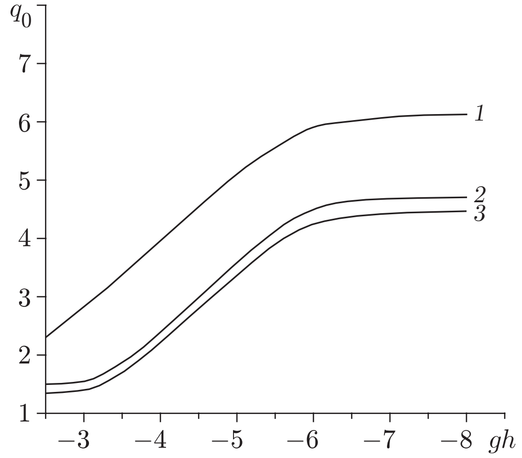

Рис. 1. Зависимость критического давления на контуре горной выработки от величины гидростатического давления gh при $\eta = 0{,}001$:
1 — $c = 0{,}9$; *2* — $c = 0{,}1$; *3* — $c = 0{,}01$

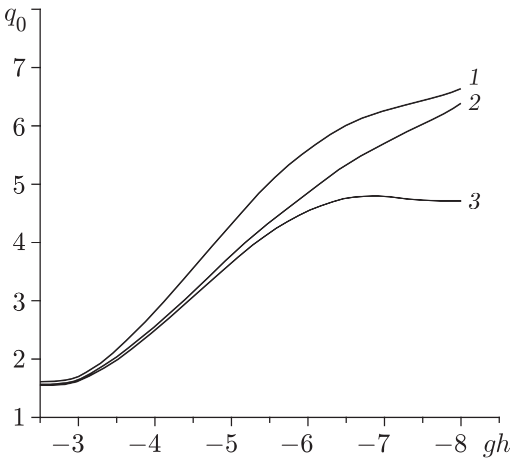

Рис. 2

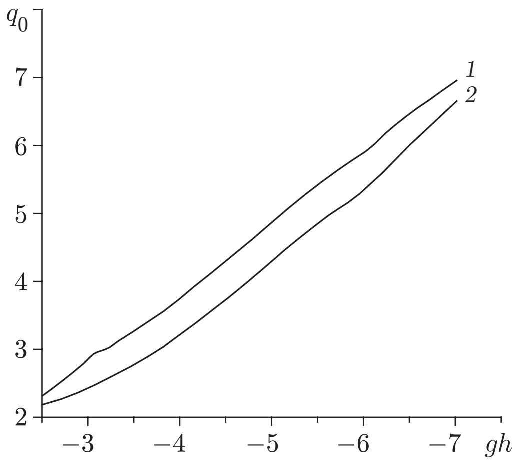

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость критического давления на контуре горной выработки от gh при $c = 0{,}1$:
1 — $\eta = 0{,}001$; *2* — $\eta = 0{,}01$; *3* — $\eta = 0{,}1$

Рис. 3. Зависимость критического давления на контуре горной выработки от gh при $c = 0{,}9$, $\eta = 0{,}001$:
1 — для выработки формы правильного четырехугольника со сглаженными углами ($B = 4$); *2* — формы окружности ($B = 60$)

гидростатического давления gh. При этом принято $R_0 = 0{,}4$, $\delta = 0{,}06$, $\mu = 1$, параметры волнообразования $n = m = 4$.

Анализ численного эксперимента показал:

— с увеличением глубины заложения критическое давление на контуре выработки увеличивается (см. рис. 1–3);

— с ростом коэффициента упрочнения c критическое давление на контуре выработки увеличивается (см. рис. 1);

— критическая нагрузка на контуре выработки при увеличении вязкости уменьшается, в этом смысле можно говорить о стабилизирующей роли вязкости в среде (см. рис. 2);

— для круговой цилиндрической выработки область устойчивости будет больше, чем для выработки с квадратным поперечным сечением (см. рис. 3).

Если в соотношениях (8)–(13) положить $\delta = 0$, то приходим к результатам, полученным в работе [4] для круговой цилиндрической выработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алимжанов М. Т.** Проблемы устойчивости равновесия в задачах геомеханики // Успехи механики. 1990. Т. 13, вып. 3. С. 21–57.
2. **Спорыхин А. Н., Гоцев Д. В.** Локальная неустойчивость горизонтальных выработок с многослойной крепью в упругопластических массивах // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 158–166.
3. **Спорыхин А. Н., Чеботарев А. С.** Локальная неустойчивость стенок бурящихся скважин в сжимаемых упрочняющихся упруговязкопластических массивах // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 6. С. 177–183.
4. **Спорыхин А. Н.** Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1997.

5. **Гузь А. Н.** Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наук. думка, 1977.
6. **Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д.** Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
7. **Спорыхин А. Н.** Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // ПМТФ. 1967. № 4. С. 52–58.
8. **Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д.** Неодномерные задачи упроговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2004.
9. **Корнишин М. С.** Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию 31/V 2004 г.