УДК 539.371:519.632.4

Метод внешнего слоя для решения краевых задач теории упругости

В.И. Машуков

Сибирский государственный университет путей сообщения, ул. Дуси Ковальчук, 191, Новосибирск, 630049
E-mail: mvimash@pochta.ru

Машуков В.И. Метод внешнего слоя для решения краевых задач теории упругости // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2017.— Т. 20, № 3.— С. 289–296.

В статье представлен вычислительный алгоритм для решения краевых задач теории упругости, пригодный для решения контактных задач и задач, область деформирования которых содержит тонкие слои среды. Решение представляется в виде линейной комбинации вспомогательных решений и фундаментальных решений уравнений Ляме. Сингулярные точки фундаментальных решений уравнений Ляме располагаются слоем вне области деформирования вблизи граничной. Коэффициенты линейной комбинации определяются путём минимизации отклонения линейной комбинации от граничных условий. Для минимизации отклонений применяется метод сопряжённых градиентов. Приведены примеры расчётов для смешанных граничных условий.

DOI: 10.15372/SJNM20170305

Ключевые слова: *теория, упругость, граничные интегральные уравнения, внешний слой, двумерные, задачи, метод сопряжённых градиентов.*

Mashukov V.I. The outer layer method for solving boundary value problems of the elasticity theory // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2017.— Vol. 20, № 3.— P. 289–296.

This paper presents an algorithm for solving boundary value problems of the elasticity theory, suitable to solve contact problems and those whose scope of deformation contains thin layers of a medium. The solution is represented as a linear combination of subsidiary solutions and fundamental solutions to the Lame equations. Singular points of fundamental solutions of the Lame equations are located as an external layer of the deformation around the perimeter. Coefficients of the linear combination are determined by minimizing deviations of a linear combination from the boundary conditions. To minimize deviations, the conjugate gradient method is applied. Examples of calculations for mixed boundary conditions are presented.

Keywords: *theory, elasticity, boundary integral equations, external layer, two-dimensional, objectives, conjugate gradients method.*

При численном решении краевых задач механики сплошной среды методом потенциалов (методами граничных интегральных уравнений) во многих случаях приходится преодолевать тем или иным способом сложности, связанные с сингулярностью ядер интегральных операторов. Эти сложности проявляются не только при вычислении граничных значений сингулярных интегральных операторов, но и при кодировании граничных контуров в тех случаях, когда область деформирования разделена тонким слоем среды. Близость участков граничных контуров приводит к необходимости задавать очень большое количество точек на граничном контуре даже в том случае, когда в этом месте граничный контур и краевое условие представляются функциями, медленно изменяющимися относительно длины дуги граничного контура.

Внешний слой сингулярных решений снимает проблему тонких слоёв. В случае тонкого слоя среды размер граничного элемента может значительно превосходить толщину слоя, если граничные условия медленно изменяются относительно длины дуги граничного контура.

В данной статье предлагается метод приближённого представления краевой задачи в виде граничных контуров, заданных ломаными линиями (в плоском случае), дискретных функций, постоянных на звеньях ломаных линий, и сосредоточенных усилий, распределённых слоем вблизи граничного контура вне области деформирования.

Предлагаемый метод имеет некоторые общие черты с методом фиктивных областей в случае конечно-разностного подхода к решению краевых задач [1]. Как в том, так и в этом случае предполагается, что область деформирования принадлежит охватывающей её области, и решение краевой задачи может быть продолжено в охватывающую область.

В [2] при формулировке метода обобщённых рядов Фурье рассмотрена вспомогательная поверхность, охватывающая граничную поверхность области деформирования и не пересекающуюся с ней. На вспомогательной поверхности располагаются точки сингулярности фундаментальных решений, по которым решение краевой задачи раскладывается в ряд Фурье. В предлагаемом здесь методе также применяется подобная структура, но только в качестве базовой, т. к. в линейную комбинацию, в виде которой представляется решение краевой задачи, могут входить любые решения, регулярные во вспомогательной области и зависящие от одного скалярного параметра (коэффициента). Решения в линейной комбинации могут быть неортогональными.

1. Уравнения и обозначения

Область деформирования $\boldsymbol{D}^-$, конечная или бесконечная, предполагается ограниченной несколькими кусочно-гладкими замкнутыми непересекающимися контурами $\boldsymbol{\Gamma}_i$, внутренние области которых $\boldsymbol{D}_i^+$ не пусты и односвязны, $\boldsymbol{\Gamma} = \bigcup_i \boldsymbol{\Gamma}_i$. В случае конечной области деформирования среди граничных контуров есть один и только один $\boldsymbol{\Gamma}_0$, внутренности которого принадлежат остальные граничные контуры. Положительной считается нормаль $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{g})$ к граничному контуру $\boldsymbol{\Gamma}_i$, направленная наружу по отношению к области деформирования $\boldsymbol{D}^-$.

Среда в области деформирования линейно упругая. На части граничного контура $\boldsymbol{\Gamma}_u$ могут быть заданы смещения $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g})$, на остальной части $\boldsymbol{\Gamma}_f$ — вектор усилий $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g})$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$ — радиус-вектор точки граничного контура.

Напряжённо-деформированное состояние упругой среды представляется в виде линейной комбинации фундаментальных решений уравнений Ляме [2, 3] $\sum_i a_i \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x})$ для сосредоточенных усилий, приложенных в точках $\boldsymbol{t}_i$: i — номер точки, расположенной вне области деформирования вблизи граничного контура (внешний слой). Но в линейной комбинации могут участвовать любые решения уравнений Ляме, регулярные в области деформирования. В частности, для ограниченных областей деформирования в линейную комбинацию включались решения для жёсткого сдвига и поворота, если на всём граничном контуре или на его части были заданы смещения.

Чем ближе к граничному контуру располагается точка $\boldsymbol{t}_i$, тем меньшие размеры должны иметь ближайшие к нему граничные элементы, на которые разбивается граничный контур при выполнении расчётов. В примерах расчётов расстояние по нормали от граничного элемента до точки $\boldsymbol{t}_i$ было равно 1.5 длины граничного элемента (плоская деформация). Кроме того, число таких точек $\boldsymbol{t}_i$ было равно удвоенному числу граничных элементов $2M$. То есть над каждым граничным элементом располагалось по две точки $\boldsymbol{t}_i$: $\boldsymbol{g}$ — точка, принадлежащая граничному контуру, $\boldsymbol{g}_i$ — точка, соответствующая середине граничного элемента с номером i. Таких точек M.

Скалярное произведение двух векторных функций, заданных на граничном контуре, вычислялось по формуле:

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_i (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}_i), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{g}_i)), \quad i = 1, \ldots, M.$$

Под знаком суммы в скобках — скалярное произведение двумерных векторов.

Граничные условия $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{g})$ задавались в виде значения смещения $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g})$ на граничном контуре или значения вектора усилий $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g})$, приложенных к граничному элементу. На граничном элементе $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g})$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g})$ предполагались постоянными, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g})$ вычислялся с помощью линейного дифференциального оператора $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{g}))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g})$ [3]:

$$T_{ij}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{g})) = \lambda n_i(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{g}))\frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \mu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{g}))}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{g}))} = \sum_i n_i(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{g}))\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$i = 1, \ldots, 2; \quad j = 1, \ldots, 2.$$

Краевая задача решалась путём минимизации функционала:

$$(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{g}) - \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{g}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{g}) - \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{g})) = \int_{\boldsymbol{\Gamma}} |(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{g}) - \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{g})|^2\, ds \to \min, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{g})$ — краевые значения приближённого решения.

В дальнейшем $\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{g})$ это линейный оператор, вычисляющий краевые значения смещений и вектора усилий на элементах граничного контура в зависимости от того, какие краевые условия заданы на этих элементах.

В случае конечной области деформирования и заданном на всей границе области деформирования или на её части векторе смещений решения с номерами $2M+1$, $2M+2$, $2M+3$ имели вид: $((1,0),(0,1),(-x_2,x_1))$. Они соответствуют жёсткому сдвигу по первой и второй координатам и жёсткому повороту. Вектор усилий на границе, соответствующий этим решениям, равняется нулю. В дальнейшем число базовых элементов обозначается Ma. Для набора $\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{g})$ базисных решений:

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{Ma}), \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}) = \sum_i a_i \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{g}),$$

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{B}\left(\sum_i a_i \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{g})\right).$$

В этом случае выражение (2) принимает вид

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}^l) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{g}), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}^l) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{g})) \to \min, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

l — номер итерации.

Решение ищется методом последовательных приближений:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{a}^0(\boldsymbol{g}) = 0, \quad \boldsymbol{a}^{l+1}(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{a}^l(\boldsymbol{g}) - \beta^l \boldsymbol{A}^* \boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{g}), \\
\boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}^l) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{g}), \\
\beta^l = \frac{(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{g})), \boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{g}))}{(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{g})), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{g})))},
\end{gathered} \tag{4}$$

$\boldsymbol{A}^*$ — оператор, сопряжённый оператору относительно скалярного произведения

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_i (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}_i), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{g}_i)), \quad i = 1, \ldots, M.$$

В результате вычисления оператора $\boldsymbol{A}^*$ получается набор коэффициентов для вычисления линейной комбинации базовых функций.

Оператор $\boldsymbol{A}$ действует из пространства коэффициентов в пространство кусочно-постоянных функций, заданных на граничных элементах границы области деформирования. Оператор $\boldsymbol{A}^*$ действует из пространства кусочно-постоянных функций, заданных на граничных элементах границы области деформирования, в пространство коэффициентов. Набор коэффициентов

$$(q_1, \ldots, q_{Ma}) = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{g}))$$

является градиентом функционала (3), т. е. вектором в пространстве коэффициентов, определяющем направление наискорейшего уменьшения функционала. В этом смысле предлагаемый алгоритм минимизации функционала (3) можно назвать разновидностью метода сопряжённых градиентов.

В отличие от традиционного подхода, когда минимизируется функционал вида [4]:

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) \to \min$$

и при этом предполагается, что матрица $\boldsymbol{A}$ квадратная и положительно определённая, в (3) матрица прямоугольная. Функционал (3) очевидно неотрицательно определённый.

2. Ускорение сходимости итераций

Итерационный процесс, представленный в (4), очень медленно сходится, если на границе области деформирования заданы смешанные краевые условия (на части границы вектор смещения, а на части границы вектор усилий), а также в некоторых случаях, когда на границе заданы смещения.

Ускорить сходимость итераций удаётся с помощью следующей модификации итерационного процесса (4):

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{a}^0 = 0, \quad \boldsymbol{a}^{l+1} = \boldsymbol{a}^l - \beta^l \boldsymbol{p}^l, \\
\beta^l = \frac{(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}^l), \boldsymbol{F}_{11})}{(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}^l), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}^l))}, \quad \boldsymbol{p}^l = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{F}_{11} - \lambda^l \boldsymbol{p}^{l-1}, \quad \boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{F}_{11}, \\
\boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}^l) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{g}), \\
\lambda^l = \frac{(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{g})), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}^{l-1}))}{(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}^{l-1}), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}^{l-1}))}.
\end{gathered} \tag{5}$$

В [4] приведён метод ускорения сходимости итераций при минимизации функционала

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}).$$

Здесь минимизируется функционал

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{b}).$$

Модификация (5) является преобразованием предложенного в [4, с. 164] метода ускорения сходимости итераций.

Алгоритм (5) ускоряет сходимость итераций, но всё-таки в случае смешанных краевых условий скорость сходимости итераций оставляет желать лучшего. Иногда скорость сходимости итераций в сотни раз меньше в случае смешанных краевых условий по сравнению с заданным на границе вектором усилий при одном и том же граничном контуре. Ускорение сходимости итераций в этих случаях является предметом дальнейших исследований.

3. Пример расчётов

На внешнем контуре квадратной области со скруглёнными углами задан вектор смещения единичной длины, направленный по касательной к граничному контуру в сторону положительного обхода области. На внутреннем граничном контуре задан вектор усилий единичной длины, направленный по касательной к граничному контуру в сторону положительного обхода области. Константы Ляме упругой среды (λ, μ) равны единице.

На рисунке 1 представлено распределение интенсивности касательных напряжений в целом по области деформирования и в окрестности левого верхнего угла внутреннего контура.

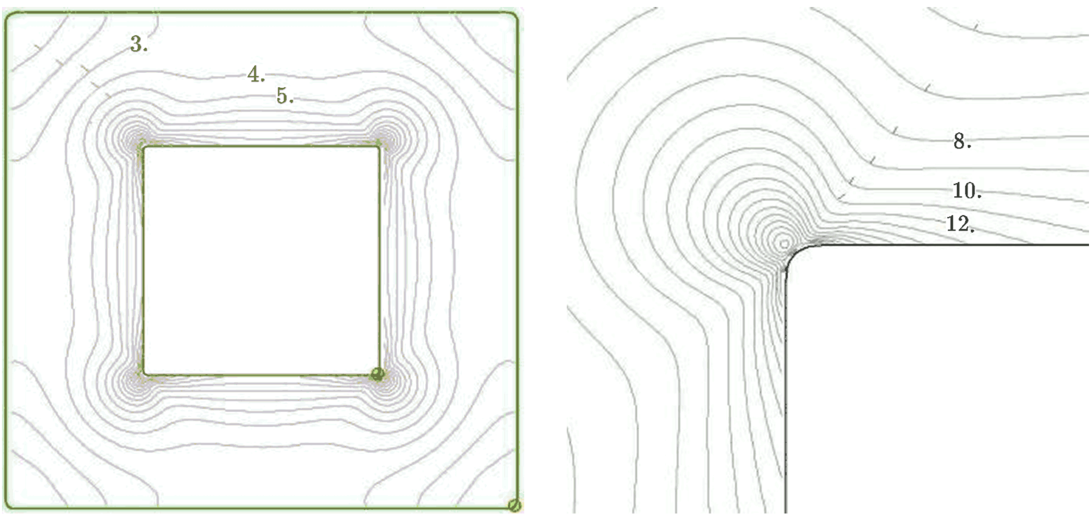

Рис. 1. Интенсивность касательных напряжений в области деформирования и в окрестности верхнего левого угла внутреннего контура, $\lambda = 1$, $\mu = 1$

На рис. 2 представлено распределение модуля смещений.

На рис. 3 и рис. 4 представлены распределения интенсивности касательных напряжений и модуля смещений при тех же краевых условиях, что и в предыдущем случае, но константы Ляме упругой среды равны $\lambda = 10^3$, $\mu = 10^3$. Более жёсткая среда приводит к концентрации касательных напряжений в окрестности углов внешнего контура. Однако в случае менее жёсткой среды максимальные по модулю смещения возникают в окрестности внутреннего граничного контура.

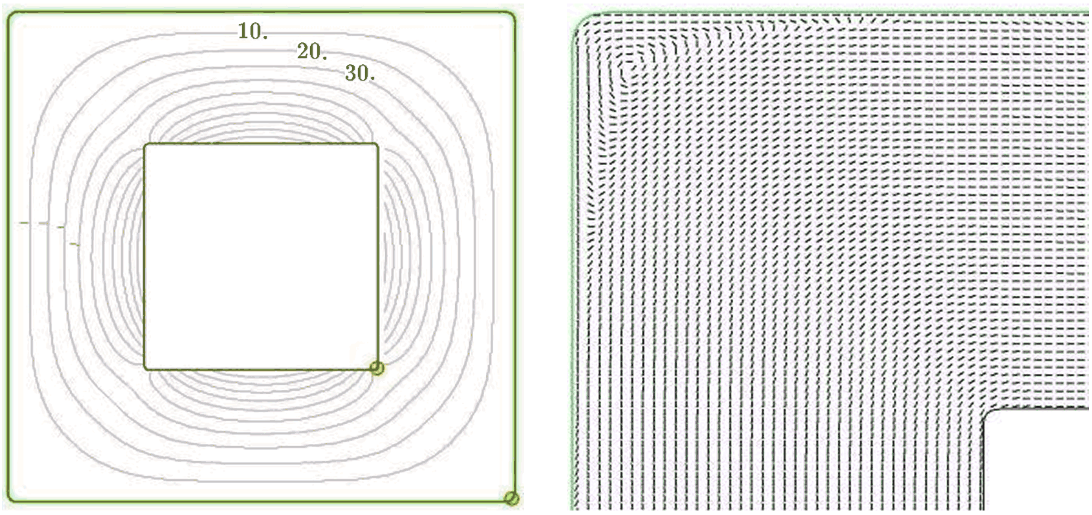

Рис. 2. Модуль вектора смещений и направление смещений, $\lambda = 1$, $\mu = 1$

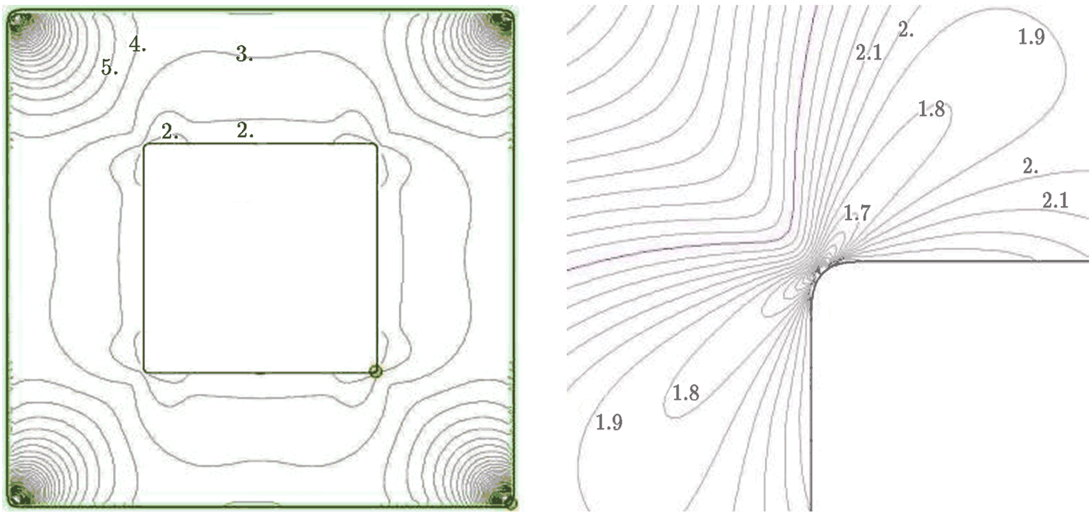

Рис. 3. Интенсивность касательных напряжений в области деформирования и в окрестности верхнего левого угла внутреннего контура, $\lambda = 10^3$, $\mu = 10^3$

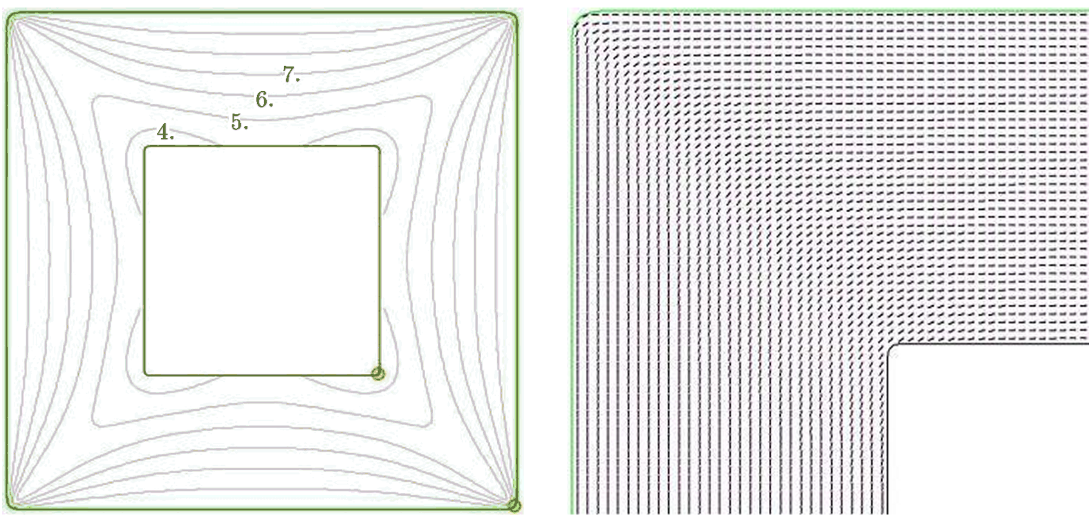

Рис. 4. Модуль вектора смещений и направление смещений, $\lambda = 10^3$, $\mu = 10^3$

На рис. 5 и рис. 6 представлены результаты расчётов, когда константы Ляме упругой среды равны $\lambda = 1$, $\mu = 1$ и на границе задан нулевой вектор усилий за исключением участков в середине верхней и нижней грани, где задан единичный вектор смещений, направленный противоположно нормали.

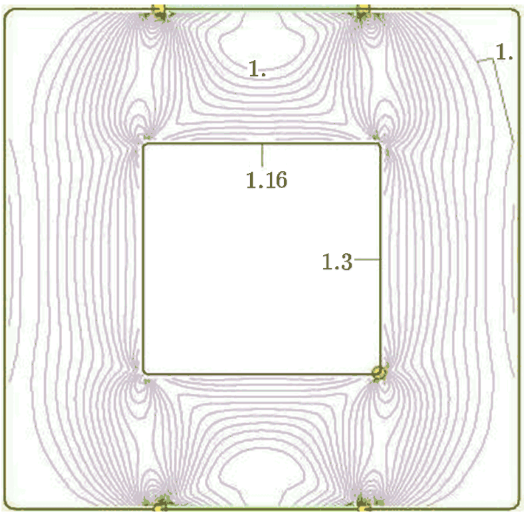

Рис. 5. Интенсивность касательных напряжений, $\lambda = 1$, $\mu = 1$

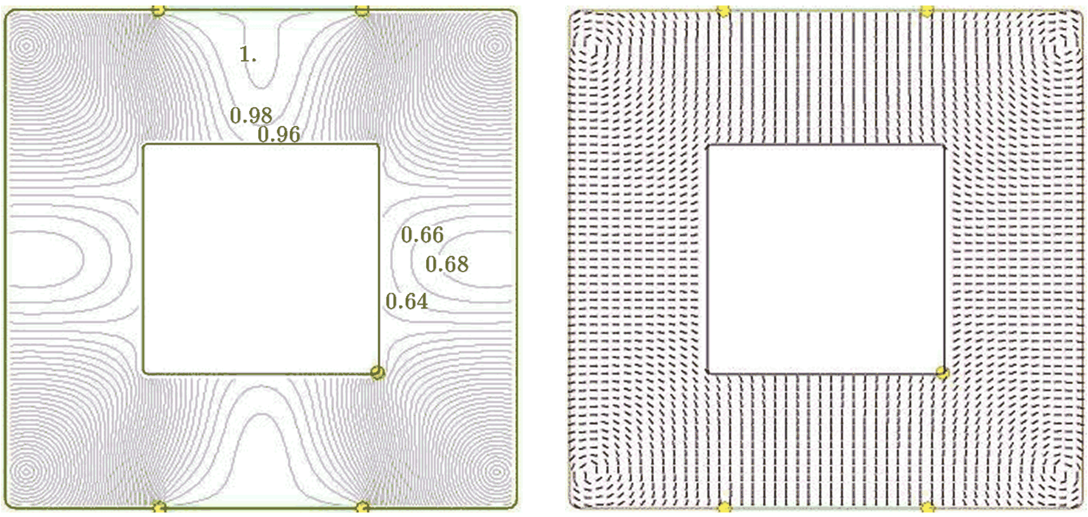

Рис. 6. Модуль и направление вектора смещений, $\lambda = 1$, $\mu = 1$

4. Заключение

В настоящее время по представленному в статье алгоритму разработана программа, позволяющая решать граничные задачи плоской теории упругости для однородных сред со сложной геометрией области деформирования. Область деформирования может быть многосвязной с произвольной формой граничных контуров. Область деформирования может быть полупространством. На границе могут задаваться вектор усилий, вектор смещений, а также смешанные условия: на части границы вектор усилий, на части границы вектор смещений. Программа оснащена удобным в использовании графическим интерфейсом для задания граничных контуров, граничных условий и для отображения результатов расчётов.

Литература

1. **Коновалов А.Н.** Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. — Новосибирск: Наука, 1988.
2. **Купрадзе В.Д.** Методы потенциала в теории упругости. — М.: Физматгиз, 1963.
3. **Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.** Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976.
4. **Хейгеман Л., Янг Д.** Прикладные итерационные методы. — М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 12 февраля 2013 г.,
в окончательном варианте 13 апреля 2013 г.

Литература в транслитерации

1. **Konovalov A.N.** Zadachi fil'tratsii mnogofaznoy neszhimaemoy zhidkosti. — Novosibirsk: Nauka, 1988.
2. **Kupradze V.D.** Metody potentsiala v teorii uprugosti. — M.: Fizmatgiz, 1963.
3. **Kupradze V.D., Gegeliya T.G., Basheleyshvili M.O., Burchuladze T.V.** Trekhmernye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti. — M.: Nauka, 1976.
4. **Heygeman L., Yang D.** Prikladnye iteratsionnye metody. — M.: Mir, 1986.