

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ВОДОЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ ВОДОНЕФТЯНОЙ СМЕСИ В ТОНКОМ НАКЛОННОМ ПЛАСТЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ ПЕРЕПАДЕ ДАВЛЕНИЯ

В. П. Пилатовский

(Москва)

Рассматривается задача о вытеснении нефти водой в тонком наклонном пласте при постоянном перепаде давления в случае образования водонефтяной смеси позади фронта вытеснения; при этом учитывается различие вязкостей, объемных весов, фазовых проницаемостей, а также проявление капиллярных свойств обеих жидких фаз. Вода и нефть предполагаются несжимаемыми, взаимно нерастворимыми жидкостями. Определяются старшие члены функциональных разложений координаты фронта вытеснения и «нормализованной» водонасыщенности в области водонефтяной смеси. Исследуется капиллярнооднородное и капиллярнонеоднородное вытеснение.

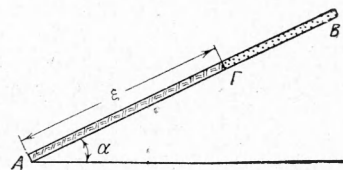
Доказывается, что задача о вытеснении нефти водой при заданном перепаде давления имеет решение лишь при соблюдении некоторых условий совместимости капиллярной функции и фазовых проницаемостей.

Из найденных разложений вытекают соответствующие выражения известного автомодельного вытеснения.

§ 1. Обозначения и основные уравнения задачи. Здесь применяется следующая система обозначений: l — длина пласта (цилиндр AB из пористой среды) (фиг. 1); α — угол наклона; m — пористость; μ_1 — вязкость нефти; μ_2 — вязкость воды; γ_1 — объемный вес нефти; γ_2 — объемный вес воды; k_1, k_2 — фазовая проницаемость среды соответственно по нефти и воде; k_0 — начальная проницаемость пласта по нефти в условиях водонасыщения связной водой; k_* — предельная проницаемость пласта; $f_1(\xi), f_2(\xi)$ — относительная фазовая проницаемость пористой среды соответственно по нефти и воде; $\tau = t/T$ — безразмерное время, t — размерное время, T — масштаб времени; $\xi(\tau)$ — размерная координата фронта вытеснения Γ ; $\sigma(\tau) = \xi/l$ — безразмерная координата фронта вытеснения; s — безразмерная координата ($0 \leq s \leq \sigma$) сечения $M(s)$ области смеси позади фронта вытеснения; ρ — водонасыщенность; ρ_0 — водонасыщенность на фронте вытеснения; ρ_c — начальная водонасыщенность; ρ_* — предельная водонасыщенность; $\xi = \xi(s, \tau)$ — нормализованная водонасыщенность; Δp — перепад давления; p_2, p_1 — давление соответственно на входном и выходном сечениях пласта ($\Delta p = p_2 - p_1$); $\lambda(\xi) = p_2(s, \tau) - p_1(s, \tau)$ — капиллярное давление; $p_1(s, \tau), p_2(s, \tau)$ — фазовое давление соответственно в нефти и в воде; $\omega(\xi) = \lambda/K$ — безразмерная капиллярная функция; K — масштаб капиллярного давления; $\kappa = (k_0/\mu_1)/(k_*/\mu_2)$ — коэффициент неоднородности потока.

Величины $k_0, k_*, \mu_1, \mu_2, \gamma_1, \gamma_2, \Delta p, \xi_0, \xi_*$ принимают постоянные значения, причем числа ξ_0, ξ_* выражаются равенствами

$$\xi_0 = (\rho_0 - \rho_c) / (\rho_* - \rho_c), \quad \xi_* = (\rho_* - \rho_c) / (1 - \rho_c)$$



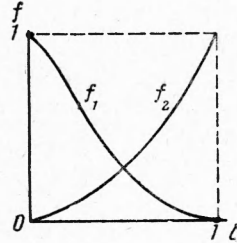
Фиг. 1

Водонасыщенность ρ в области смеси определяется зависимостью

$$\rho = \rho_c + (\rho_* - \rho_c) \zeta(s, \tau) \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \quad (1.1)$$

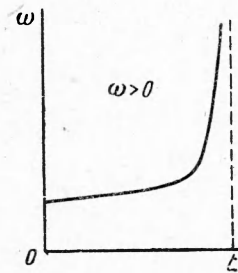
Фазовые и относительные проницаемости связываются соотношениями

$$k_1 = k_0 f_1(\zeta), \quad k_2 = k_* f_2(\zeta) \quad (k_* \leq k_0) \quad (1.2)$$



Функции $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ определяются эмпирически (фиг. 2, 3); в исследовании предполагается, что $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ заданы соответствующими аналитическими приближениями. При помощи $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ вводятся функции

$$F_1(\zeta) = \frac{\kappa f_1(\zeta)}{\kappa f_1(\zeta) + f_2(\zeta)}, \quad F_2(\zeta) = \frac{f_2(\zeta)}{\kappa f_1(\zeta) + f_2(\zeta)} \\ F_1(\zeta) + F_2(\zeta) = 1 \quad (1.3)$$



Фиг. 2

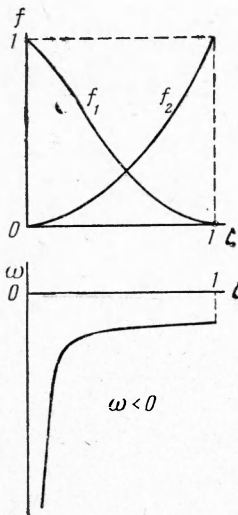
Безразмерное капиллярное давление $\omega = \omega(\zeta)$ задается аналитическим выражением, учитывающим особенности поведения этой функции. В зависимости от того, смачивает или не смачивает вытесняющая жидкость пористую среду пласта, функция $\omega(\zeta)$ принимает как угодно большие значения (обращается в бесконечность) соответственно при $\zeta = 0$, $\rho_c = 0$ или при $\zeta = 1$, $\rho_* = 1$. Учитывая такой характер поведения $\omega(\zeta)$, аналитически определяем эту функцию условиями:

1) Если вытесняющая жидкость смачивает скелет пласта,

$$\omega(\zeta) = \frac{a}{\zeta} + \Omega(\zeta) \quad (0 > a = \text{const}) \quad (1.4)$$

2) Если вытесняющая жидкость не смачивает скелет пласта,

$$\omega(\zeta) = \frac{a}{1-\zeta} + \Omega(\zeta) \quad (0 < a = \text{const}) \quad (1.5)$$



Фиг. 3

Слагаемое $\Omega(\zeta)$ в формулах (1.4) — (1.5) представляет некоторый многочлен от ζ ; постоянная a и функция $\Omega(\zeta)$ определяются из соображений наилучшей аппроксимации эмпирической зависимости капиллярного давления λ от нормализованной водонасыщенности ζ . Принятое здесь аналитическое определение функции $\omega(\zeta)$ находится в полном согласии с известными экспериментальными определениями [1, 2, 3] капиллярного давления $|\lambda(\rho)|$ в зависимости от насыщенности ρ смачивающей фазы (фиг. 4).

Систему введенных обозначений дополняем безразмерными параметрами

$$\beta = \frac{k_0 K T}{\mu_1 m (\rho_* - \rho_c) l^2}, \quad \delta = \frac{k_0 (\gamma_2 - \gamma_1) T \sin \alpha}{\mu_1 m (\rho_* - \rho_c) l}, \quad \varepsilon = \frac{k_0 \Delta P T}{\mu_1 m (\rho_* - \rho_c) l^2}$$

Величина

$$\Delta P = \Delta p - \gamma_1 l \sin \alpha + \varphi K \quad (1.7)$$

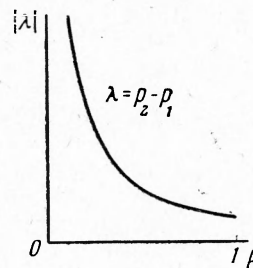
представляет действующий напор на длине l пласта AB ; коэффициент φ характеризует капиллярные свойства потока. В соответствии с результатами работ [4,5] нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}\varphi &= [1 - \rho(\xi)] \omega(\xi) \Big|_{\xi_0}^1 - \int_{\xi_0}^1 F_1(\xi) d\omega(\xi) && \left(\begin{array}{l} \text{вытеснение несмачи-} \\ \text{вающей жидкостью} \end{array} \right) \\ \varphi &= -\rho(\xi) \omega(\xi) \Big|_{\xi_0}^1 + \int_{\xi_0}^1 F_2(\xi) d\omega(\xi) && \left(\begin{array}{l} \text{вытеснение смачи-} \\ \text{вающей жидкостью} \end{array} \right)\end{aligned}\quad (1.8)$$

Величины β , δ , ε , κ дают важнейшие характеристики процесса, которые необходимо учитывать при моделировании вытеснения нефти водой.

Решение сформулированной задачи сводится к нахождению функций $\sigma(\tau)$ и $\xi(s, \tau)$, определяющих положение фронта вытеснений $\Gamma(\tau)$ и распределение водонасыщенности за ним.

В работах [4,5] выведена система функциональных (интегродифференциальных) уравнений, описывающих процесс вытеснения несжимаемой жидкой смеси в недеформируемой трубке тока при постоянном перепаде давления. Учитывая введенные здесь обозначения и соотношения, приводим в безразмерном виде упомянутую систему уравнений первой (безводной) стадии вытеснения в тонком наклонном пласте, на которой фронт вытеснения $\Gamma(\tau)$ не достигает выходного сечения пласта



Фиг. 4

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\sigma} \xi(s, \tau) ds = \frac{\varepsilon - \delta v_2(\sigma, \tau)}{1 - \sigma + \kappa v(\sigma, \tau)} = \Phi(\tau) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^s \xi(s, \tau) ds = \Phi(\tau) F_1(\xi) + \delta F_3(\xi) + \beta F_3(\xi) \frac{\partial \omega(\xi)}{\partial s} \quad (1.10)$$

Здесь

$$\xi = \xi(s, \tau), \quad v(\sigma, \tau) = \int_0^{\sigma} F(\xi) ds, \quad v_2(\sigma, \tau) = \int_0^{\sigma} F_2(\xi) ds$$

Искомые функции $\sigma(\tau)$ и $\xi(s, \tau)$ ищем в виде аналитических разложений

$$\sigma = \sigma(\tau) = \sum_{(n)} \sigma_n \frac{\tau^n}{n!} \quad (\sigma_0 = 0), \quad \xi(s, \tau) = \sum_{(n)} z_n(g) \frac{\tau^n}{n!} \quad \left(g = \frac{s}{\sigma}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.11)$$

Подстановка $\xi(s, \tau)$ (1.11) в систему (1.9), (1.10) приводит последнюю к виду

$$\sum_{(n)} \frac{(\sigma \tau^n)' }{n!} \int_0^1 z_n(s) ds = \frac{\varepsilon - \delta \sigma v_2(1, \tau)}{1 - \sigma + \kappa \sigma v(1, \tau)} = \Phi(\tau) \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}\sum_{(n)} \frac{(\sigma \tau^n)' }{n!} \int_0^g z_n(s) ds - \sum_{(n)} \frac{\sigma' \tau^n}{n!} g z_n(g) &= \Phi(\tau) F_1(\xi) + \delta F_3(\xi) + \\ &+ \beta F_3(\xi) \omega'(\xi) \frac{\xi g'}{\sigma} = U(\tau, g)\end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь символы z , ζ и ζ_g' соответственно обозначают выражения

$$z = \sum_{(n)} z_n(s) \frac{\tau^n}{n!}, \quad \zeta = \sum_{(n)} z_n(g) \frac{\tau^n}{n!}, \quad \zeta_g' = \sum_{(n)} z_n'(g) \frac{\tau^n}{n!} \quad (1.14)$$

В системе (1.12) — (1.13) некоторые коэффициенты содержат $\sigma = \sigma(\tau)$ под знаком обыкновенного дифференцирования («штрих») по аргументу τ .

Левые части равенств (1.12) — (1.13) представляют целые функции аргумента τ . Из разложений в ряд Тейлора по аргументу τ обеих частей функции $\Phi(\tau)$ (1.12) и функции $U(\tau, g)$ в (1.13) находим систему рекуррентных соотношений

$$\sum_{i=0}^n C_{n+1}^i \sigma_{n+1-i} \int_0^1 z_i(s) ds = \Phi_n \quad (1.15)$$

$$\sum_{i=0}^n C_{n+1}^i \sigma_{n+1-i} \int_0^{\zeta} z_i(s) ds - \sum_{i=0}^n C_n^i \sigma_{n+1-i} g z_i(g) = U_n(g) \quad (1.16)$$

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad \Phi_n = \Phi^{(n)}(0), \quad U_n(g) = \left. \frac{\partial^n U(\tau, g)}{\partial \tau^n} \right|_{\tau=0} \quad (1.17)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$)

Коэффициенты Φ_0, Φ_1, Φ_2 при разложении правой части равенства (1.12) записываются в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \varepsilon, & \Phi_1 &= (\varepsilon B_0 - A_0) \sigma_1 \\ \Phi_2 &= (\varepsilon B_0 - A_0) \sigma_2 + (\varepsilon B_1 - A_1) \sigma_1 + 2\varepsilon (\varepsilon B_0 - A_0) \sigma_1^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь величины A_0, A_1, B_0, B_1 находятся из соотношений

$$\begin{aligned} A_0 &= \delta \int_0^1 F_2(z_0) ds, & B_0 &= 1 - \kappa \int_0^1 F(z_0) ds, & z_0 &= z_0(s) \\ A_1 &= 2\delta \int_0^1 F_2'(z_0) z_1 ds, & B_1 &= 2\kappa \int_0^1 F'(z_0) ds, & z_1 &= z_1(s) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Выражения $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ содержат параметр ε , определяемый из (1.6) — (1.8). Конечное значение ε возможно лишь при условии совместности функций $f_1(\zeta), f_2(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$; эти условия вытекают из характера операций в соотношениях (1.9), (1.12) и (1.13).

§ 2. Условия совместности относительных проницаемостей и функции капиллярного давления. Эти условия получаем из необходимости выполнить интегродифференциальные операции в равенствах (1.9), (1.12) и (1.13).

Заметим, что эмпирические фазовые относительные проницаемости $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ с достаточной точностью всегда возможно задать в виде

$$f_1(\zeta) = (1 - \zeta)^q (1 + M_1 \zeta + M_2 \zeta^2 + \dots + M_n \zeta^n) \quad (q \geq 1) \quad (2.1)$$

$$f_2(\zeta) = \zeta^r [1 + N_1 (1 - \zeta) + N_2 (1 - \zeta)^2 + \dots + N_n (1 - \zeta)^n] \quad (r \geq 1)$$

$$f_1^{(q)}(1) \neq 0, \quad f_2^{(r)}(0) \neq 0 \quad \text{при } M_i = \text{const}, \quad N_i = \text{const}$$

Если учесть свойства функции $\omega(\zeta)$ в соответствии с выражениями (1.4) и (1.5), то целые числа q и r подчиняются дальнейшим ограничениям. Рассмотрим вытеснение несмачивающей жидкостью. При конечном значении ϕ (1.8) на основании (1.3), (1.5) и (2.1) из сходимости интеграла в первом равенстве (1.8) получаем условие $q \geq 2, r \geq 1$.

Выражение φ (1.8) содержит слагаемое

$$\begin{aligned} [1 - \rho(\xi)] \omega(\xi) \Big|_{\xi_0}^1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [1 - \rho_c - (\rho_* - \rho_c) \xi] \omega(\xi) \Big|_{\xi_0 + \varepsilon}^{1 - \varepsilon} = \\ &= (1 - \rho_c) a - (1 - \rho_0) \omega(\xi_0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Предельный переход в (2.2) получается лишь при условии $\rho_* = 1$; из гидродинамических соображений это требование вполне естественно: оно характеризует предельное проявление капиллярных свойств потока, когда происходит полное вытеснение нефти водой из пористой среды.

Таким образом, при вытеснении несмачивающей жидкостью

$$\varphi = (1 - \rho_c) a - (1 - \rho_0) \omega(\xi_0) - \int_{\xi_0}^1 F_1(\xi) d\omega(\xi) \quad (2.3)$$

причем

$$\rho_* = 1, \quad \rho_0 > \rho_c, \quad \xi_0 = (\rho_0 - \rho_c) / (1 - \rho_c), \quad q \geq 2, \quad r \geq 1$$

В случае вытеснения смачивающей жидкостью при $\xi_0 > 0$ всегда φ принимает конечное значение и вычисляется по второму равенству из (1.8). Если же вытеснение смачивающей жидкостью происходит при $\rho_0 = \rho_c = 0$ (явление начальной капиллярной пропитки), то, как нетрудно обнаружить на основании (1.3), (1.5), (2.1) и второго равенства из (1.8), φ вычисляется по формуле

$$\varphi = \rho_* [a - \omega(1)] + \int_0^1 F_2(\xi) d\omega(\xi) \quad (2.4)$$

Здесь сходимость интеграла обеспечивается $q \geq 1$ и $r \geq 2$.

Из аналитических свойств функций $\omega(\xi)$, $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $\sigma(\tau)$, $\xi(s, \tau)$, ξ_g' , $\Phi(\tau)$ в некотором промежутке изменения τ ($0 \leq \tau \leq \tau_*$) следует возможность выражения $U_n(g)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); приводим выражения

$$\begin{aligned} U_{-1} &= H_0 L_{-1} \equiv 0, \quad U_0 = H_0 L_0 + H_1 L_{-1} + G_0, \quad U_1 = H_0 L_1 + H_1 L_0 + \\ &+ \frac{1}{2} H_2 L_{-1} + G_1, \quad U_2 = H_0 L_2 + 2H_1 L_1 + H_2 L_0 + \frac{1}{3} H_3 L_{-1} + G_2 \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь G_n , H_n , L_n определяются из разложений

$$\begin{aligned} G &= \Phi(\tau) F_1(\xi) + \delta F_3(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{\tau^n}{n!}, \quad H = \beta F_3(\xi) \omega'(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{\tau^n}{n!} \\ L &= \frac{\xi_g'}{\sigma} = \sum_{n=-1}^{\infty} L_n \frac{\tau^n}{n!}, \quad \Phi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \frac{\tau^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.6)$$

В развернутом виде первые функции из G_n , H_n , L_n выражаются

$$\begin{aligned} G_0 &= \Phi_0 F_1 + \delta F_3, \quad G_1 = G_0' z_1 + \Phi_1 F_1, \quad G_0' = G_0'(z_0), \quad F_1 = F_1(z_0) \\ G_2 &= G_0' z_2 + G_0'' z_1^2 + \Phi_2 F_1 + 2\Phi_1 F_1' z_1, \quad G_0'' = G_0''(z_0), \quad F_3 = F_3(z_0) \\ F_1' &= F_1'(z_0), \quad F_3' = F_3'(z_0), \quad H_0 = \beta F_3' \omega', \quad H_1 = H_0' z_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= H_0'' z_1^2 + H_0' z_2, \quad H_3 = H_0''' z_1^3 + 3H_0'' z_1 z_2 + H_0' z_3 \\ H_0' &= H_0'(z_0), \quad H_0'' = H_0''(z_0), \quad H_0''' = H_0'''(z_0) \\ \omega' &= \omega'(z_0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} L_{-1} &= \frac{z_0'}{\sigma_1}, \quad L_0 = \frac{z_1'}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2 z_0'}{2\sigma_1^2}, \quad L_1 = \frac{z_2'}{2\sigma_1} - \frac{\sigma_2 z_1'}{2\sigma_1^2} - \left(\frac{\sigma_3}{6\sigma_1^2} - \frac{\sigma_2^2}{4\sigma_1^3} \right) z_0' \\ L_2 &= \frac{z_3'}{3\sigma_1} - \frac{\sigma_2 z_2'}{2\sigma_1^2} - \left(\frac{\sigma_3}{3\sigma_1^2} - \frac{\sigma_2^2}{2\sigma_1^3} \right) z_1' - \left(\frac{\sigma_4}{12\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2 \sigma_3}{3\sigma_1^3} + \frac{\sigma_2^3}{4\sigma_1^4} \right) z_0' \end{aligned} \quad (2.9)$$

Первое из равенств (2.5) подробно записывается

$$H_0 L_{-1} = \beta F_3(z_0) \omega'(z_0) \frac{z_0'}{\sigma_1} = 0, \quad z_0 = z_0(g) \quad (2.10)$$

Рассмотрим отдельные случаи тождества (2.10).

§ 3. Вытеснение капиллярнооднородной смеси. Смесь двух взаимно нерастворимых жидкостей образует капиллярнооднородную систему при $\omega = \omega(\xi) = \text{const}$. Условие (2.10) выполняется, так как $\omega'(\xi) = 0$. Величина φ (1.8) на основании (1.1) находится в виде $\varphi = (\rho_0 - \rho_*) \omega$. Решение задачи о вытеснении нефти водой в тонком наклонном пласте в случае образования капиллярнооднородной смеси позади фронта вытеснения ищем в виде (1.11).

Коэффициенты σ_n должны удовлетворять системе уравнений (1.15), (1.18), (1.19). Выпишем в развернутом виде уравнения (1.15)

$$\begin{aligned} \sigma_1 \int_0^1 z_0(s) ds &= \Phi_0, & \sigma_2 \int_0^1 z_0(s) ds + 2\sigma_1 \int_0^1 z_1(s) ds &= \Phi_1 \\ \sigma_3 \int_0^1 z_0(s) ds + 3\sigma_2 \int_0^1 z_1(s) ds + 3\sigma_1 \int_0^1 z_2(s) ds &= \Phi_2 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Функции $z_0(s)$, $z_1(s)$, $z_2(s)$, ... удовлетворяют системе уравнений (1.16), (2.6), которая приводится к виду

$$\begin{aligned} \sigma_1 \int_0^g z_0(s) ds - \sigma_1 g z_0 &= G_0 \\ \sigma_2 \int_0^g z_0(s) ds + 2\sigma_1 \int_0^g z_1(s) ds - \sigma_2 g z_0 - \sigma_1 g z_1 &= G_0' z_1 + \Phi_1 F_1 \\ \sigma_3 \int_0^g z_0(s) ds + 3\sigma_2 \int_0^g z_1(s) ds + 3\sigma_1 \int_0^g z_2(s) ds - \sigma_3 g z_0 - 2\sigma_2 g z_1 - \\ &\quad - \sigma_1 g z_2 = G_0' z_2 + G_0'' z_1^2 + 2\Phi_1 F_1' z_1 + \Phi_2 F_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_0 &= G_0(z_0) = \Phi_0 F_1(z_0) + \delta F_3(z_0), & F_1 &= F_1(z_0) \\ z_0 &= z_0(g), & z_1 &= z_1(g), & z_2 &= z_2(g) \end{aligned}$$

Коэффициенты σ_1 , σ_2 , σ_3 , ... и функции $z_0(g)$, $z_1(g)$, $z_2(g)$, ... последовательно определяются из систем (3.1) и (3.2).

Сначала возьмем первые из уравнений (3.1) и (3.2). На фронте вытеснения при $g = 1$ ($s = \sigma$) насыщенность принимает значение $\xi = \xi_0$. Полагаем $z_0(1) = \xi_0$. Уравнения, взятые из системы (3.1) и (3.2), дают

$$\sigma_1 \int_0^1 z_0(s) ds = \Phi_0 = \varepsilon \quad (3.3)$$

$$\sigma_1 \int_0^1 z_0(s) ds - \sigma_1 \xi_0 = G_0(\xi_0) = \varepsilon F_1(\xi_0) + \delta F_3(\xi_0) - \sigma_1 g z_0'(g) = G_0'(z_0) z_0'(g)$$

Из первых двух уравнений (3.3) исключаем член, содержащий интеграл, в результате находим зависимость между σ_1 и ξ_0

$$\sigma_1 \xi_0 = \varepsilon - G_0(\xi_0) \quad (3.4)$$

Предполагаем, что в области D_{12} за фронтом вытеснения $z_0'(g) \neq 0$, поэтому из последнего равенства (3.3) получаем

$$- \sigma_1 g = G_0'(z_0), \quad z_0 = z_0(g) \quad (3.5)$$

На фронте вытеснения принимаем граничное условие $z_0(1) = \xi_0$; тогда равенство (3.5) дает начальную скорость фронта $\Gamma(\tau)$

$$\sigma_1 = -G_0'(\xi_0) \quad (3.6)$$

Исключаем σ_1 из (3.4) и (3.6), находим уравнение для водонасыщенности ξ_0

$$G_0(\xi_0) - \xi_0 G_0'(\xi_0) = \varepsilon \quad (3.7)$$

Это уравнение обобщает известную зависимость, найденную в случае автомодельного вытеснения, когда капиллярностью и весомостью жидкостей пренебрежено [6].

Из равенства (3.5) и (3.6) получаем уравнение функции $z_0(g)$

$$g = \frac{G_0'(z_0)}{G_0'(\xi_0)} \quad (3.8)$$

Из монотонного характера изменения $F_1(z_0)$ и $F_3(z_0)$ легко доказать, как, например, это сделано в статье [6], что для найденной зависимости g от z_0 в виде соотношения (3.8) существует обратная однозначная функция $z_0(g)$, определенная в промежутке $0 \leq g \leq 1$ и принимающая значения $1 \geq z_0 \geq \xi_0$. Таким образом, начальная функция $z_0(g)$ в разложении (1.11) определена вполне.

Аналогично действуем в отношении вторых уравнений систем (3.1) и (3.2): находим выражение σ_2 и функцию $z_1 = z_1(g)$

$$\sigma_2 = \frac{\Phi_1 F_2(\xi_0)}{\xi_0} \quad (3.9)$$

$$z_1 = -\frac{\Phi_1}{2G_0'(\xi_0)} \left[\frac{F_2(\xi_0)}{\xi_0} \frac{G_0'(z_0)}{G_0''(z_0)} + G_0'(\xi_0) \frac{F_1'(z_0)}{G_0''(z_0)} \right] \text{ при } z_0 = z_0(g) \quad (3.10)$$

Из третьих уравнений систем (3.1) и (3.2) при помощи достаточно простых преобразований с использованием предыдущих результатов получаем σ_3 и $z_2(g)$

$$\sigma_3 = \frac{\Phi_2 F_2(\xi_0)}{\xi_0} + \frac{3\Phi_1^2}{4\xi_0 G_0''(\xi_0)} \left[\frac{F_2(\xi_0)}{\xi_0} + F_1'(\xi_0) \right]^2 \quad (3.11)$$

$$z_2 = \frac{1}{G_0''(z_0)} \frac{d}{dz_0} [G_0''(z_0) z_1^2] + \frac{\sigma_3}{3\sigma_1} \frac{G_0'(z_0)}{G_0''(z_0)} - \Phi_2 \sigma_1 \frac{F_1'(z_0)}{G_0''(z_0)} - z_1 \quad (3.12)$$

при $z_0 = z_0(g)$, $z_1 = z_1(z_0)$

Нетрудно обнаружить, что процесс построения коэффициентов σ_n и функций $z_n(g)$ может быть неограниченно продолжен.

Таким образом, решение задачи при $\omega = \omega(\xi) = \text{const}$ конструктивно представлено в виде разложений (1.11). Ограничиваясь найденными выражениями σ_1 , σ_2 , σ_3 , z_0 , z_1 , z_2 , получаем старшие члены разложений решения

$$\sigma(\tau) = \sigma_1 \tau + \sigma_2 \frac{\tau^2}{2} + \sigma_3 \frac{\tau^3}{6} + O(\tau^4)$$

$$\xi(s, \tau) = z_0(g) + z_1(g) \tau + z_2(g) \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3) \quad \text{при } g = \frac{s}{\sigma} \leq 1 \quad (3.13)$$

Решение задачи в виде (3.13) с использованием соотношений (1.18), (1.19), (3.6) — (3.11) позволяет количественно исследовать вытеснение нефти водой в тонком наклонном пласте в рассматриваемых условиях.

§ 4. Сопоставление с автомодельным решением. В работе [6] независимо от развитой здесь теории изучено автомодельное вытеснение в случае, когда исключается проявление капиллярности и различие весомости жидких фаз. Целесообразно сопоставить автомодельное решение в конечной форме [6] с полученным разложением (3.13) решения задачи в общей постановке.

Если в системе зависимостей (7) — (13) статьи [6] применить обозначения данного исследования и, кроме того, заменить ρ_* на $\rho_* - \rho_c$ (так как в статье [6] было принято $\rho_c = 0$), то имеем

$$\xi = z_0(g) \quad \left(g = \frac{s}{\sigma}\right), \quad g = \frac{F_1'(z_0)}{F_1'(\xi_0)} \quad (\xi_0 \leq z_0 \leq 1), \quad F_1(\xi_0) - \xi_0 F_1'(\xi_0) = 1 \quad (4.1)$$

$$\sigma = \frac{1}{v} \left(\sqrt{1 - 2v\epsilon F_1'(\xi_0)\tau} - 1 \right), \quad -v = 1 - \kappa F(\xi_0) - \kappa \int_{\xi_0}^1 F'(z) \frac{F_1'(z)}{F_1'(\xi_0)} dz \quad (4.2)$$

Степенные разложения автомодельного вытеснения (4.1) и (4.2) должны получаться из решения (3.13) при $\delta = 0$ и $\omega(\xi) = 0$. В результате очевидных упрощений (3.4) — (3.13) находим

$$G_0(z_0) = \beta F_1(z_0), \quad z_1(g) = z_2(g) \equiv 0$$

Разложение $\xi(s, \tau)$ (3.13) при $\delta = 0$ и $\omega(\xi) = 0$ приводится к виду

$$\xi = \xi(s, \tau) = z_0(g) + O(\tau^3) \quad (4.3)$$

Зависимость σ (4.2) через σ_1 (3.6), σ_2 (3.9), σ_3 (3.11) преобразуется к виду

$$\sigma = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \left(1 - \sqrt{1 - 2 \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \tau} \right) \quad (4.4)$$

Если τ удовлетворяет неравенству $1 > 2|\sigma_3/\sigma_1|\tau$, то из (4.4) следует разложение

$$\sigma = \sigma_1 \tau + \sigma_2 \frac{\tau^2}{2} + 3 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} \frac{\tau^3}{6} + O(\tau^4) \quad (4.5)$$

Равенство (3.11) при $\delta = 0$, $\omega = 0$ преобразуется к виду

$$\sigma_3 = 3 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1}$$

Итак, разложение строгого автомодельного решения (4.1) и (4.2) с точностью до порядка влияния трех старших членов, найденное в виде зависимостей (4.3) и (4.5), вытекает из соответствующего разложения общего решения (3.13) капиллярнооднородного вытеснения, в котором учтено влияние весомости жидких фаз.

§ 5. Вытеснение капиллярнонеоднородной смеси. В этом случае имеем $\omega'(\xi) \neq 0$; тождество (2.10) выполняется при $z_0(g) = \text{const}$. За конечное время вытеснения на входном сечении A пласта AB насыщенность вытесняющей жидкости ρ не может достичь предельного значения $\rho_* = 1$. Допускаем, что наибольшее достижимое значение $\rho = \rho_* < 1$; тогда на входном сечении пласта нормализованная насыщенность ξ вытесняющей жидкости достигает наибольшего значения $\xi_* = (\rho_* - \rho_c)/(1 - \rho_c)$. На фронте вытеснения насыщенность ρ не может принимать значений, меньших чем ρ_c , поэтому величина ξ позади фронта вытеснения изменяется в промежутке $[\xi_0, \xi_*]$.

Уравнения (1.15) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma_1 \xi_* &= \Phi_0, \quad \sigma_2 \xi_* + 2\sigma_1 \int_0^1 z_1(s) ds = \Phi_1 \\ \sigma_3 \xi_* + 3\sigma_2 \int_0^1 z_1(s) ds + 3\sigma_1 \int_0^1 z_2(s) ds &= \Phi_2 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Функции $z_1(s)$, $z_2(s)$, ... удовлетворяют уравнениям (1.16), (2.6), которые после очевидных упрощений подробно выписываются в виде

$$\begin{aligned} 0 = H_0 \frac{z_1'}{\sigma_1} + G_0, \quad 2\sigma_1 \int_0^g z_1(s) ds = H_0 \left(\frac{z_2'}{2\sigma_1} - \frac{\sigma_2 z_1'}{2\sigma_1^2} \right) + H_0' z_1 \frac{z_1'}{\sigma_1} + G_0 z_1 + \Phi_1 F_1 \\ 3\sigma_2 \int_0^g z_1(s) ds + 3\sigma_1 \int_0^g z_2(s) ds - 2\sigma_2 g z_1 - \sigma_1 g z_2 = H_0 \left[\frac{z_3'}{3\sigma_1} - \frac{\sigma_2 z_2'}{2\sigma_1^2} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\sigma_3}{3\sigma_1^2} - \frac{\sigma_2^2}{2\sigma_1^3} \right) z_1' \right] + 2H_0' z_1 \left(\frac{z_2'}{2\sigma_1} - \frac{\sigma_2 z_1'}{2\sigma_1^2} \right) + (H_0'' z_1^2 + H_0' z_2) \frac{z_1'}{\sigma_1} + \\ + G_0' z_2 + G_0'' z_1^2 + 2\Phi_1 F_1' z_1 + \Phi_2 F_1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь в соответствии с определениями (2.7), (2.8) и (1.3) для сокращения записи положено: $H_0 = H_0(\zeta_*)$, $G_0 = G_0(\zeta_*)$, $F_1 = F_1(\zeta_*)$, $z_1 = z_1(g)$, $z_2 = z_2(g)$, $z_3 = z_3(g)$.

Решение рекуррентной системы уравнений (5.1) и (5.2) получается в виде многочленов

$$z_n(g) = \sum_{i=1}^n C_i g^i$$

и констант σ_n ($n = 1, 2, \dots$); в построении решения используется очевидное граничное условие $z_n(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Приводим выражения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $z_1(g), z_2(g), z_3(g)$

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \frac{\Phi_0}{\zeta_*}, \quad \sigma_2 = \frac{\Phi_1}{\zeta_*} + \frac{\Phi_0^2 G_0}{\zeta_*^3 H_0} \\ \sigma_3 = \frac{\Phi_2}{\zeta_*} + 2 \frac{\Phi_0^3}{\zeta_*^5} \left(\frac{G_0}{H_0} \right)^2 + \frac{\Phi_0 \Phi_1}{\zeta_*^3 H_0} (2G_0 + 3\Phi_0 \Phi_1) - \frac{\Phi_0^3 G_0}{\zeta_*^4 H_0} \left(\frac{G_0}{H_0} \right)' \\ z_0(g) = \zeta_*, \quad z_1(g) = - \frac{\Phi_0 G_0}{\zeta_* H_0} g \\ z_2(g) = \left(\frac{\Phi_0}{\zeta_*} \right)^2 \frac{G_0}{H_0} \left(\frac{G_0}{H_0} \right)' g^2 - \left[\frac{\Phi_1 G_0}{\zeta_* H_0} + \frac{\Phi_0^2}{\zeta_*^3} \left(\frac{G_0}{H_0} \right)^2 + 2 \frac{\Phi_0 \Phi_1 F_1}{\zeta_* H_0} \right] g \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь постоянные величины $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, H_0, H_0', G_0, G_0', F_1$, а также F_2, F_2', F, F' , в соответствии с принятыми обозначениями в равенствах, последовательно получаются из равенств (5.3), (1.18) и (1.19) при условии

$$z_0(s) = \zeta_*, \quad z_1(s) = - \frac{\Phi_0 G_0}{\zeta_* H_0} s$$

В результате имеем выражения A_0, A_1, B_0 и B_1 из (1.19)

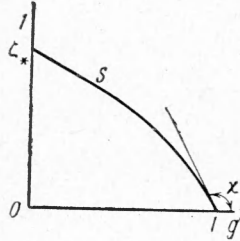
$$\begin{aligned} A_0 = \delta F_2, \quad B_0 = 1 - \kappa F \quad \text{при } F_2 = F_2(\zeta_*), \quad F = F(\zeta_*) \\ A_1 = - \frac{\delta \Phi_0 G_0 F_2'}{\zeta_* H_0}, \quad B_1 = - \frac{\kappa \Phi_0 G_0 F'}{\zeta_* H_0} \quad \text{при } F_2' = F_2'(\zeta_*), \quad F' = F'(\zeta_*) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Для вычисления Φ_0, Φ_1, Φ_2 получаем систему (1.18), (5.3) и (5.5). На основании (5.3) — (5.5) из (1.11) находим приближения искомых функций $\sigma(\tau)$ и $\zeta(s, \tau)$ в виде соотношений

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) = \sigma_1 \tau + \sigma_2 \frac{\tau^2}{2} + \sigma_3 \frac{\tau^3}{6} + O(\tau^4) \\ \zeta(s, \tau) = \zeta_* + z_1(g) \tau + z_2(g) \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3) \quad \text{при } g = \frac{s}{\sigma} \end{aligned} \quad (5.6)$$

График зависимости $\xi = \xi(s, \tau)$ при $\tau = \text{const}$, $0 \leq s \leq \sigma$ представляет профиль S водонасыщенности позади фронта вытеснения. Касательная к профилю S на фронте вытеснения имеет угол χ (фиг. 5) наклона к направлению перемещения; χ определяется из равенства $\partial \xi / \partial s$ при $g = 1$. В начальной стадии вытеснения, когда τ мало, из (5.6) находим

$$\operatorname{tg} \chi = -\frac{G_0}{H_0} = -\frac{\delta f_2(\xi_*) + \varepsilon \kappa}{f_2(\xi_*) \omega'(\xi_*)} \quad (5.7)$$



Фиг. 5

В зависимости от конкретного выражения $f_2(\xi)$ (2.1), $\omega(\xi)$ (1.4) — (1.5) проводится дальнейший анализ формы профиля водонасыщенности. Заметим, что найденное разложение (5.6) используется в исследовании начальной стадии вытеснения при нагнетании в пласт жидкости. Так, например, решается вопрос о нефтеотдаче в начальный период вытеснения нефти водой из тонкого наклонного пласта с учетом полного гидромеханического различия жидких фаз. Коэффициент нефтеотдачи b выражаем в виде

$$b \approx \frac{1}{\sigma(\rho_* - \rho_c)} \left(\int_0^\sigma \rho(s, \tau) ds - \sigma \rho_c \right) = \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \xi(s, \tau) ds \quad (5.8)$$

Подстановка $\xi(s, \tau)$ в (5.8) приводит к зависимости

$$b = \xi_* - \frac{\Phi_0 G_0 \tau}{\xi_* H_0} + \left(\frac{\Phi_0}{\xi_*} \right)^2 \frac{G_0}{H_0} \left(\frac{G_0}{H_0} \right)^* \frac{\tau^2}{6} - \left[\frac{\Phi_1 G_0}{\xi_* H_0} + \frac{\Phi_0^2}{\xi_*^3} \left(\frac{G_0}{H_0} \right)^2 + 2 \frac{\Phi_0 \Phi_1 F_1}{\xi_* H_0} \right] \frac{\tau^2}{4} + O(\tau^3) \quad (5.9)$$

В заключение заметим, что рекуррентный характер системы уравнений (5.1) и (5.2) позволяет в случае необходимости найти члены разложения (5.6) более высокого порядка, чем это сделано в данном исследовании.

Некоторые из выражений и зависимостей, описанных здесь, были найдены нами в работе [7], где рассматривалась аналогичная задача при помощи понятия «производящей функции». Полученные здесь результаты использовались в численном решении частной задачи [8] на вычислительной цифровой машине «Урал 1».

Поступила 1 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Purcell W. R. Capillary Pressures — their Measurement using Mercury and Calculation of Permeability there from. Trans. AIME, 1946, 186.
2. Walter Rose, Bruce W. A. Evaluation of Capillary Character in Petroleum Reservoir Rock. Trans. AIME, 1946, 186.
3. Sylvain Pirson J. R. Oil Reservoir Engineering, 1958, Sec. ed.
4. Пилатовский В. П. Исследование неоднородного фильтрационного потока жидкостей в недеформируемой трубке тока в случае образования двухфазной смеси. Тр. ВНИИнефти, Гостоптехиздат, 1959, т. 21.
5. Пилатовский В. П. К вопросу о численном решении задачи вертикального вытеснения нефти подошвенной водой. Научно-технический сб. по добыче нефти. ВНИИнефть, Гостоптехиздат, 1961, № 11.
6. Пилатовский В. П. Автомодельное решение задачи о вытеснении несжимаемой смеси при заданном перепаде давления. Научно-технический сб. по добыче нефти. ВНИИнефть, Гостоптехиздат, 1959, № 5.
7. Пилатовский В. П. Вытеснение нефти водой с образованием водонефтяной смеси в тонком наклонном пласте при постоянном перепаде давления. Научно-технич. сб. по добыче нефти. ВНИИнефть, Гостоптехиздат, 1961, № 14.
8. Пилатовский В. П. О результатах численного решения на ВЦМ задачи о вытеснении нефти водой в тонком наклонном пласте. Научно-технич. сб. по добыче нефти. ВНИИнефть, Гостоптехиздат, 1961, № 15.