

УДК 539.3

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ

Ю. М. Волчков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: volk@hydro.nsc.ru

Приведены модифицированные уравнения изгиба слоистых ортотропных пластин в первом приближении. В результате аппроксимации решений уравнений трехмерной теории упругости отрезками полиномов Лежандра получены дифференциальные уравнения упругого слоя. Для аппроксимации уравнений равновесия и краевых условий трехмерной теории упругости использовано несколько аппроксимаций каждой искомой функции (напряжений и смещений). Напряжения во внутренних точках пластины определяются из осредненных по ее толщине определяющих уравнений для ортотропного материала. При построении уравнений изгиба слоистых пластин для каждого слоя использованы уравнения упругого слоя и условия сопряжения на границах между слоями — условия непрерывности нормальных напряжений и смещений. Проведено сравнение численного решения задачи об изгибе прямоугольной слоистой пластины, полученного с использованием модифицированных уравнений, и аналитического решения. Установлено, что максимальная погрешность при определении напряжений не превышает 3 %.

Ключевые слова: уравнения изгиба слоистых пластин, ортотропный материал, полиномы Лежандра.

DOI: 10.15372/PMTF20170517

Введение. При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной (теории оболочек) используются либо гипотезы кинематического и силового характера [1–7], либо разложения решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций [8–15]. Гипотезы кинематического и силового характера накладывают достаточно сильные ограничения на напряженно-деформированное состояние, поэтому, как правило, с использованием таких гипотез строятся уравнения теории оболочек для случая, когда на лицевых поверхностях оболочки заданы напряжения. При решении контактных задач на основе таких уравнений зачастую возникают эффекты, не имеющие физического смысла. Применение разложений решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций позволяет построить уравнения оболочек в различных приближениях. При этом одним из основных вопросов является следующий: на основе каких дополнительных предположений строится то или иное приближение, а именно: сколько членов в разложениях нужно удерживать при построении данного приближения? Поскольку полиномы

Лежандра образуют полную систему функций в пространстве $L_2[-1, 1]$, именно эта система функций обычно используется при построении уравнений теории оболочек.

При редукции трехмерной задачи к двумерной с использованием аппроксимаций напряжений и перемещений рядами функций необходимо выполнить их усечение при построении конечного приближения. При этом разрешающие уравнения должны быть достаточно простыми и должны допускать корректную формулировку контактных условий на лицевых поверхностях оболочки и краевых условий на ее торцах.

В работах [11–15] предложена процедура построения модифицированных уравнений пластин и оболочек на основе разложений искомым функций по полиномам Лежандра. Для каждой искомой функции используется несколько аппроксимаций. Одновременная аппроксимация смещений и напряжений, как правило, приводит к смешанным вариационным постановкам задач, в которых отсутствует свойство минимальности действительного поля перемещений. При использовании нескольких аппроксимаций смещений и напряжений указанное свойство сохраняется. Это позволяет построить положительно-определенный квадратичный функционал и сходящийся итерационный алгоритм численного решения плоских задач теории упругости с использованием конечного элемента [16].

В [12, 17] построены уравнения теории оболочек порядка N в ортогональной криволинейной системе координат. В любом приближении порядок построенной системы дифференциальных уравнений не зависит от того, задаются ли на лицевых поверхностях оболочки напряжения, смещения или их линейная комбинация, что обеспечивает корректную формулировку контактных условий на этих поверхностях как в перемещениях, так и в напряжениях. Уравнения оболочек в первом приближении являются дифференциальными уравнениями в частных производных 10-го порядка. При $N = 1$ искомыми функциями в дифференциальных уравнениях являются используемые в теории оболочек усилия, моменты и соответствующие им перемещения и углы поворотов поперечных сечений, осредненные по толщине оболочки. В случае цилиндрического изгиба пластин или осесимметричного деформирования оболочки система уравнений в первом приближении является системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка с переменными коэффициентами для неоднородных пластин и с постоянными коэффициентами для однородных. Коэффициенты этой системы зависят от вида условий, заданных на лицевых поверхностях пластины или оболочки.

В работах [18–23] приведены решения различных задач о напряженно-деформированном состоянии однородных и слоистых пластин и оболочек с помощью модифицированных уравнений.

Как отмечено выше, для получения приближенных уравнений равновесия и соотношений между деформациями и перемещениями используется несколько аппроксимаций каждой искомой функции (напряжений и смещений). Напряжения внутри оболочки определяются из осредненных по ее толщине определяющих соотношений, что позволяет достаточно легко обобщить метод для вывода уравнений упругопластического деформирования пластин и оболочек.

В работах [24–26] приведены аналитические решения задач об изгибе многослойных ортотропных пластин при действии на них нагрузок специального вида.

Приведенные ниже уравнения изгиба пластин следуют из уравнений работы [15], если в последних положить $R_1 = R_2 = \infty$, $A_1 = A_2 = 1$.

1. Уравнения трехмерной задачи теории упругости в декартовой системе координат. Запишем уравнения плоской задачи теории упругости в области $\omega = \{x_1, x_2, x_3: x_i \in [a_i, b_i], x_3 \in [-h/2, h/2], i = 1, 2\}$.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + q_1 = 0 \quad (1 \rightleftharpoons 2), \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + q_3 = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где σ_{ij} — напряжения; q_i — объемные силы; запись “ $1 \rightleftharpoons 2$ ” означает наличие уравнений и соотношений, которые получаются из предыдущих заменой индекса 1 на 2, а индекса 2 на 1.

В линейной теории упругости в декартовой системе координат компоненты тензора деформаций e_{ij} выражаются через компоненты вектора перемещения $\mathbf{U}(u_1, u_2, u_3)$ по формулам

$$\begin{aligned} e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad 2e_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \\ 2e_{31} = 2e_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \quad (1 \rightleftharpoons 2), \quad e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций запишем в виде

$$\sigma_{ij} = a_{ijmn} e_{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

В соотношениях (1.3) коэффициенты a_{ijmn} удовлетворяют условиям

$$a_{ijmn} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} - c \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \geq 0, \quad a_{ijmn} = a_{jimn} = a_{ijnm},$$

где c — неотрицательная постоянная; по неммым индексам проводится суммирование от 1 до 3.

Для ортотропного и трансверсально-изотропного материалов соотношения (1.3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \end{pmatrix}, \\ \sigma_{23} = C_{44} e_{23}, \quad \sigma_{13} = C_{44} e_{13}, \quad \sigma_{12} = C_{44} e_{12}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В (1.4) для ортотропного материала 9 констант упругости являются независимыми, для трансверсально-изотропного материала — 5.

Предполагается, что краевые условия для напряжений и перемещений заданы в виде

$$\begin{aligned} [a_{im}^{\pm} u_i + (1 - a_{im}^{\pm}) \hat{\sigma}_{im}]_{\alpha m = x_m^{\pm}} = \varphi_{im}^{\pm}, \quad m = 1, 2, \\ [a_{i3}^{\pm} u_i + (1 - a_{i3}^{\pm}) \hat{\sigma}_{i3}]_{x_3 = x_3^{\pm}} = \varphi_{i3}^{\pm}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где a_{i3}^{\pm} — заданные кусочно-постоянные функции переменных x_1, x_2 , равные нулю или единице; φ_{i3}^{\pm} — заданные кусочно-непрерывные функции переменных x_1, x_2 ; a_{im}^{\pm} — постоянные, равные нулю или единице.

2. Сведение трехмерной задачи к двумерной. Уравнения изгиба пластин в первом приближении. При выводе уравнений изгиба пластин в первом приближении уравнения равновесия бесконечно малого элемента сплошной среды (1.1) заменяются уравнениями равновесия элемента, имеющего бесконечно малые размеры в направлениях координат x_1, x_2 и конечный размер в направлении координаты x_3 :

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + q_1 \right) P_k d\zeta \quad (1 \rightleftharpoons 2), \quad k = 0, 1; \quad (2.1)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + q_3 \right) P_0 d\zeta = 0. \quad (2.2)$$

В (2.1), (2.2) при построении уравнений оболочки в первом приближении величины σ_{ij} аппроксимируются полиномами Лежандра (для некоторых компонент тензора напряжений используются две аппроксимации), так чтобы все слагаемые в подынтегральных выражениях являлись разложениями по полиномам Лежандра одной и той же степени:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sum_{k=0}^{k=1} \sigma'_{11}{}^k P_k, & \sigma'_{12} &= \sum_{k=0}^{k=1} \sigma'_{12}{}^k P_k, & \sigma'_{13} &= \sum_{k=0}^{k=2} \sigma'_{13}{}^k P_k, \\ \sigma'_{31} &= \sum_{k=0}^{k=1} \sigma'_{31}{}^k P_k, & \sigma'_{33} &= \sum_{k=0}^{k=1} \sigma'_{33}{}^k P_k, & & \\ \sigma''_{31} &= \sigma''_{31}{}^0 P_0, & \sigma''_{11} &= \sigma''_{11}{}^0 P_0 & (1 \Leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^k &= \frac{1}{2} (1 + 2k) \int_{-1}^1 \sigma_{11} P_k d\zeta, & \sigma_{12}^k &= \frac{1}{2} (1 + 2k) \int_{-1}^1 \sigma_{12} P_k d\zeta, \\ \sigma_{13}^k &= \frac{1}{2} (1 + 2k) \int_{-1}^1 \sigma_{13} P_k d\zeta, & \sigma_{31}^k &= \frac{1}{2} (1 + 2k) \int_{-1}^1 \sigma_{31} P_k d\zeta, \\ \sigma_{33}^k &= \frac{1}{2} (1 + 2k) \int_{-1}^1 \sigma_{33} P_k d\zeta & (1 \Leftrightarrow 2), & \quad k = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

С учетом (2.3), (2.4) уравнения (2.1), (2.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{13}}{\partial x_3} + q_1 = 0 \quad (1 \Leftrightarrow 2); \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \sigma''_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma''_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma''_{33}}{\partial x_3} + q_3 = 0, \quad (2.6)$$

где

$$q_1 = \sum_{k=0}^{k=1} q_1^k P_k \quad (1 \Leftrightarrow 2), \quad q_3 = q_3^0 P_0, \quad q_i^k = \frac{1}{2} (1 + 2k) \int_{-1}^1 q_i P_k d\zeta, \quad i = 1, 2, 3.$$

Компоненты вектора смещений u_i аппроксимируются полиномами Лежандра u_i' и u_i'' , так чтобы полиномы σ'_{11} , σ'_{12} , σ'_{13} , σ''_{31} ($1 \Leftrightarrow 2$), σ'_{33} и полиномы $\partial u_1'/\partial x_1$, $\partial u_1'/\partial x_2$, $\partial u_1''/\partial x_3$, $\partial u_3'/\partial x_1$ ($1 \Leftrightarrow 2$), $\partial u_3''/\partial x_3$ имели одинаковую степень соответственно. Поэтому для перемещений принимаются следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} u_1' &= \sum_{k=0}^{k=1} u_1^k P_k, & u_1'' &= \sum_{k=0}^{k=3} u_1^k P_k & (1 \Leftrightarrow 2), \\ u_3' &= u_3^0 P_0, & u_3'' &= \sum_{k=0}^{k=2} u_3^k P_k. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Можно показать [15], что для полиномов (2.3), (2.7) выполняется следующее интегральное равенство:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left(\hat{\sigma}'_{\delta\gamma} \frac{\partial u'_{\delta}}{\partial \alpha_{\gamma}} + \hat{\sigma}''_{3\gamma} \frac{\partial u'_{\delta}}{\partial \alpha_{\gamma}} + \hat{\sigma}'_{i3} \frac{\partial u''_i}{\partial x_3} - (\hat{\sigma}'_{21} A_{12} + \hat{\sigma}'_{31} A'_1 - \hat{\sigma}'_{22} A_{21}) u'_1 - \right. \\ \left. - (\hat{\sigma}'_{12} A_{21} + \hat{\sigma}'_{32} A'_2 - \hat{\sigma}'_{11} A_{12}) u'_2 + (\hat{\sigma}''_{13} A'_1 + \hat{\sigma}''_{23} A'_2) u'_3 \right) d\omega = \\ = \int_{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{\delta}} (\hat{\sigma}'_{\gamma\delta} u'_{\gamma} + \hat{\sigma}''_{3\delta} u'_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\hat{\sigma}'_{i3} u''_i) + \hat{q}_i u'_i \right) d\omega. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Обозначим интеграл в левой части равенства (2.8) через E . Если для деформаций e_{ij} в (1.2) принять аппроксимацию

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u'_1}{\partial x_1}, & 2e_{12} &= \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_2}, \\ 2e_{31} = 2e_{13} &= \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u''_1}{\partial x_3} \quad (1 \leftrightarrow 2), & e_{33} &= \frac{\partial u''_3}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (2.9)$$

и полагать, что напряжения во внутренних точках пластины σ_{ij} связаны с деформациями (2.9) уравнениями

$$\sigma_{ij} = a_{ijks} e_{ks}, \quad i, j, k, s = 1, 2, 3, \quad (2.10)$$

то

$$E = \int_{\omega} \sigma_{ij} e_{ij} H_1 H_2 d\omega. \quad (2.11)$$

Следовательно, для напряжений, перемещений и деформаций, вычисленных по уравнениям изгиба пластин в первом приближении, выполняется энергетическое тождество, обеспечивающее единственность решения контактных задач [13].

Так как в подынтегральное выражение в правой части равенства (2.8) входят производные от произведений полиномов $\hat{\sigma}'_{\gamma\delta} u'_{\gamma}$, $\hat{\sigma}''_{3\delta} u'_3$, $\hat{\sigma}'_{i3} u''_i$, граничные условия (1.5) заменяются условиями

$$[a_{\gamma m}^{\pm} u'_{\gamma} + (1 - a_{\gamma m}^{\pm}) \hat{\sigma}'_{\gamma m}]_{x_m = x_m^{\pm}} = \hat{\varphi}_{\gamma m}^{\pm}, \quad (2.12)$$

$$[a_{3m}^{\pm} u'_3 + (1 - a_{3m}^{\pm}) \hat{\sigma}''_{3m}]_{x_m = x_m^{\pm}} = \hat{\varphi}_{3m}^{\pm}, \quad \gamma = 1, 2, \quad m = 1, 2; \quad (2.13)$$

$$[a_{i3}^{\pm} u''_i + (1 - a_{i3}^{\pm}) \hat{\sigma}'_{i3}]_{x_3 = x_3^{\pm}} = \varphi_{i3}^{\pm}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\hat{\varphi}_{\gamma m}^{\pm} = \sum_{k=0}^{k=N} (\varphi_{\gamma m}^{\pm})^k P_k, \quad \gamma = 1, 2, \quad \hat{\varphi}_{3m}^{\pm} = \sum_{k=0}^{k=N-1} (\varphi_{3m}^{\pm})^k P_k,$$

$$(\varphi_{im}^{\pm})^k = \frac{1}{2} (1 + 2k) \int_{-1}^1 \varphi_{im}^{\pm} P_k d\zeta, \quad i = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2.$$

Условия (2.12) означают, что для уравнений изгиба пластин в первом приближении на боковых поверхностях оболочки задаются силы, изгибающие и крутящие моменты либо соответствующие им перемещения и углы поворота.

Двумерная задача в первом приближении состоит в нахождении функций σ'_{ij} , σ''_{ij} , u'_i , u''_i , удовлетворяющих уравнениям (2.3)–(2.7), (2.9)–(2.13).

Функции $\hat{\sigma}'_{ij}$, $\hat{\sigma}''_{ij}$, u'_i , u''_i , производные по x_i от которых содержатся в (2.5), (2.6), (2.9), будем называть основными, остальные функции $\hat{\sigma}^k_{ij}$, u^k_i — дополнительными. Соответственно коэффициенты при полиномах $P_k(\zeta)$ в разложениях

$$\hat{\sigma}'_{11}, \hat{\sigma}'_{12}, \hat{\sigma}''_{31} \quad (1 \Leftrightarrow 2), \quad u'_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

будем называть основными функциями переменных x_1, x_2 , а в разложениях

$$\sigma'_{31} - \sigma''_{31}, \quad \hat{\sigma}'_{32} - \hat{\sigma}''_{32}, \quad \hat{\sigma}'_{i3}, \quad u''_i - u'_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

дополнительными. Число основных функций составляет $9N + 6$, дополнительных — $3N + 13$.

Из (2.3), (2.4), (2.9), (2.10) следует

$$\int_{-1}^1 (\hat{\sigma}'_{13} - a_{13ij}e_{ij})P_k d\zeta = 0 \quad (1 \Leftrightarrow 2), \quad k = 0, 1, 2, \quad (2.16)$$

$$\int_{-1}^1 (\hat{\sigma}'_{33} - a_{33ij}e_{ij})P_k d\zeta = 0, \quad k = 0, 1,$$

$$\int_{-1}^1 (\hat{\sigma}'_{31} - a_{31ij}e_{ij})P_1 d\zeta = 0 \quad (1 \Leftrightarrow 2).$$

Уравнения (2.13), (2.16) образуют замкнутую систему уравнений относительно дополнительных функций (2.15). Из решения системы (2.13), (2.16) дополнительные функции выражаются через φ_{i3}^{\pm} и коэффициенты при полиномах u'_i , $\partial u'_i/\partial x_1$, $\partial u'_i/\partial x_2$ ($i = 1, 2, 3$). Используя эти выражения, уравнения двумерной задачи можно сформулировать только относительно основных функций (2.14).

Из (2.3), (2.4), (2.10) следует

$$\int_{-1}^1 (\hat{\sigma}'_{11} - H_2 a_{11ij}e_{ij})P_k d\zeta = 0,$$

$$\int_{-1}^1 (\hat{\sigma}'_{12} - H_1 a_{12ij}e_{ij})P_k d\zeta = 0 \quad (1 \Leftrightarrow 2), \quad k = 0, 1, \quad (2.17)$$

$$\int_{-1}^1 (\hat{\sigma}''_{31} - H_2 a_{31ij}e_{ij})P_0 d\zeta = 0 \quad (1 \Leftrightarrow 2).$$

Выражая содержащиеся в уравнениях (2.2), (2.6), (2.17) дополнительные функции через основные, получаем замкнутую систему уравнений относительно основных функций. Эта система с краевыми условиями (2.12) представляет собой краевую задачу для $9N + 6$ основных функций (2.14). Зная эти функции, можно определить дополнительные функции и, следовательно, найти деформации по формулам (2.9) и напряжения по формулам (2.10) в любой точке оболочки.

3. Алгоритм вычисления напряженно-деформированных состояний в слоистых пластинах. Основное преимущество построенных уравнений упругого ортотропного слоя заключается в том, что они допускают постановку условий на лицевых поверхностях как в смещениях, так и в напряжениях, при этом порядок системы дифференциальных уравнений не меняется. Это позволяет построить уравнения слоистых пластин. Для каждого слоя используются уравнения, приведенные в п. 2. На границах между слоями ставятся условия сопряжения — условия непрерывности нормальных напряжений и смещений. Эти условия формулируются через отрезки полиномов Лежандра $\hat{\sigma}'_{13}$, $\hat{\sigma}'_{23}$, $\hat{\sigma}''_{33}$ для напряжений и u''_1 , u''_2 , u''_3 для смещений.

В общем случае напряженно-деформированного состояния система дифференциальных уравнений упругого слоя в первом приближении представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных 10-го порядка и решения краевых задач можно получить лишь численными методами. Коэффициенты разложений (2.3), (2.7) являются функциями переменных x_1 и x_2 . Заменяя эти функции в единичном квадрате $\{-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$ отрезками полиномов Лежандра по переменным x_1 и x_2 , можно построить конечный моментный элемент [21]. В данной работе численное решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений изгиба слоистых ортотропных пластин получено с использованием конечных элементов [21] и итерационного метода самоуравновешенных невязок [16].

4. Сравнение численного решения задачи о напряженно-деформированном состоянии слоистых ортотропных пластин конечных размеров с аналитическими решениями. В работах [24–26] построены аналитические решения задач об изгибе многослойных балок и пластин, состоящих из ортотропных слоев. В работе [25] приведено решение задачи об изгибе многослойной пластины конечных размеров (рис. 1). На верхнюю лицевую поверхность пластины действует внешняя нагрузка, распределенная по закону $q(x_1, x_2) = \sigma_0 \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b)$. На боковых поверхностях пластины ставятся следующие условия:

$$\sigma_{11} = u_2 = u_3 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, x_1 = a,$$

$$\sigma_{22} = u_1 = u_3 = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0, x_2 = b.$$

Балка состоит из углепластиковых монослоев со следующими характеристиками (ось x совпадает с направлением армирования): $E_{11} = 1,724 \cdot 10^5$ МПа, $E_{22} = 6895$ МПа, $G_{12} = 3448$ МПа, $G_{23} = 1379$ МПа, $\nu_{12} = 0,25$ МПа.

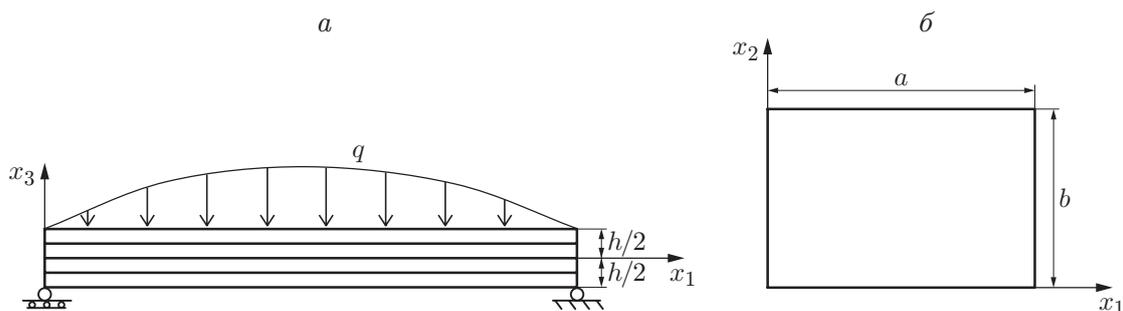


Рис. 1. Слоистая пластина:

a — продольное сечение, b — сечение в срединной плоскости

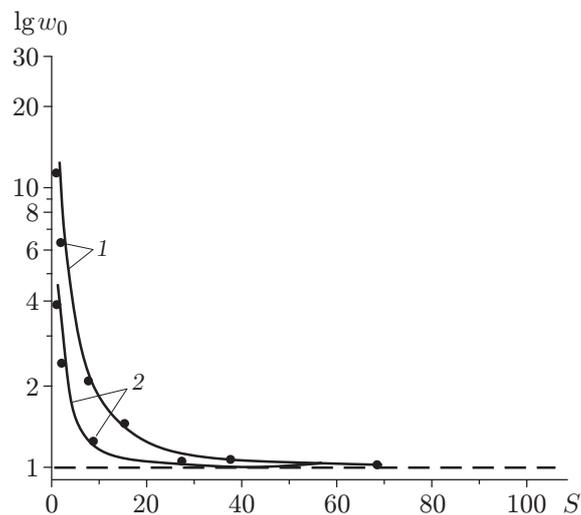


Рис. 2. Зависимость прогиба в центральной точке трехслойной (1) и двухслойной (2) пластин от параметра тонкостенности S :

сплошные линии — аналитическое решение [25], точки — численное решение, штриховая линия — зависимость, полученная с использованием классической теории пластин

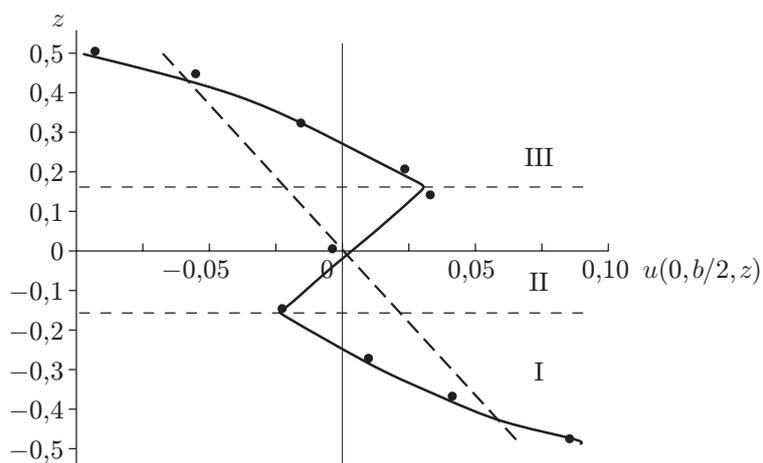


Рис. 3. Распределение компоненты вектора смещений u вдоль прямой $(0, b/2, z)$: сплошная линия — аналитическое решение [25], точки — численное решение, штриховая линия — зависимость, полученная с использованием классической теории пластин; I–III — слои пластины

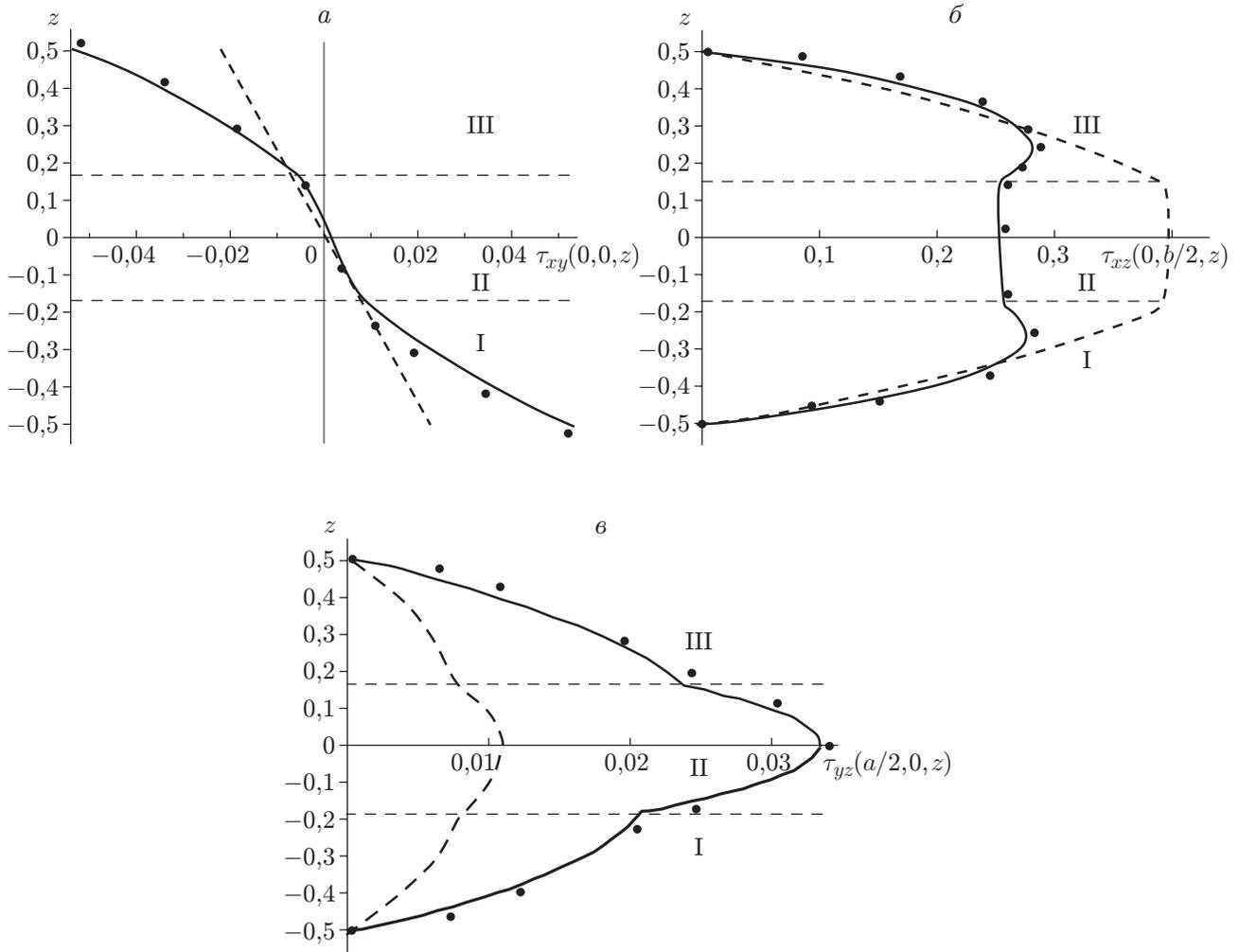


Рис. 4. Распределения касательного напряжения τ_{xy} вдоль прямой $(0, 0, z)$ (а), касательного напряжения τ_{xz} вдоль прямой $(0, b/2, z)$ (б) и касательного напряжения τ_{yz} вдоль прямой $(a/2, 0, z)$ (в) (обозначения те же, что на рис. 3)

На рис. 2–4 приведены аналитические решения и результаты численных расчетов в безразмерных переменных:

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \frac{1}{\sigma_0 S^2} (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}), \quad (\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \frac{1}{\sigma_0 S} (\sigma_{13}, \sigma_{23}),$$

$$u = \frac{E_{11} u_1}{\sigma_0 h S^3}, \quad w = \frac{100 E_{11} u_3}{\sigma_0 h S^4}, \quad S = \frac{a}{h}, \quad z = \frac{x_3}{h}.$$

На рис. 2 представлена зависимость прогиба w_0 в точке $(a/2, b/2, 0)$ двухслойной и трехслойной пластин от параметра тонкостенности S . В двухслойной пластине направление армирования первого слоя совпадает с осью x_1 , а направление армирования второго слоя — с осью x_2 . В трехслойной пластине направления армирования первого и третьего слоев совпадают с осью x_1 , а направление армирования второго слоя — с осью x_2 . При использовании введенных выше безразмерных переменных прогиб, вычисленный с помощью классической теории пластин, не зависит от параметра S .

На рис. 3 приведена зависимость компоненты вектора смещения u от координаты z на прямой $(0, b/2, z)$, на рис. 4 — зависимости касательных напряжений от координаты z на прямых, проходящих через различные точки срединной плоскости.

Максимальное различие значений напряжений, вычисленных на основе модифицированных уравнений пластин и аналитического решения, не превышает 3 %.

Заключение. В работе приведены модифицированные уравнения изгиба ортотропных слоистых пластин. Получено численное решение задачи об изгибе прямоугольной слоистой пластины, состоящей из углепластиковых монослоев. Проведено сравнение численного и аналитического решений. Установлено, что максимальное различие значений напряжений, вычисленных с использованием модифицированных уравнений пластин и аналитического решения, не превышает 3 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.; Л.: ОГИЗ, 1935.
2. **Kirchhoff G.** Vorlesungen uber mathemaishe Phisik. Bd 1. Mechanik. Leipzig: V. G. Teubner, 1876.
3. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961.
4. **Болотин В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. М.: Машиностроение, 1980.
5. **Григолюк Э. И.** Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1957. № 1. С. 77–84.
6. **Григолюк Э. И.** Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. М.: Машиностроение, 1988.
7. **Аннин Б. Д., Баев Л. В., Волчков Ю. М.** Уравнения слоистого пакета с учетом поперечных сдвигов и обжатия // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2014. № 1. С. 76–87.
8. **Векуа И. Н.** Об одном варианте теории тонких и пологих оболочек: Лекции по спецкурсу “Математическая теория оболочек”. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1964.
9. **Векуа И. Н.** Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982.
10. **Пелех Б. Л.** Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский. Киев: Наук. думка, 1980.
11. **Иванов Г. В.** Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1976. № 6. С. 126–137.
12. **Иванов Г. В.** Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1980.
13. **Дергилева Л. А.** Метод решения плоской контактной задачи для упругого слоя // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 25. С. 24–32.
14. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Решение задач упругого слоя по приближенным уравнениям и сравнение с решениями теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1977. Вып. 28. С. 43–54.
15. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 3. С. 179–190.
16. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А., Иванов Г. В.** Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 129–135.
17. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Уравнения упругого анизотропного слоя // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 188–198.
18. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Краевые эффекты в напряженном состоянии тонкой упругой прослойки // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 189–195.

19. **Волчков Ю. М., Важева Д. В.** Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 169–176.
20. **Алексеев А. Е., Демешкин А. Г.** Об отрыве балки, приклеенной к жесткой плите // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 151–158.
21. **Волчков Ю. М.** Конечные элементы с условиями сопряжения на их гранях // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 175–180.
22. **Vajeva D. V., Volchkov Yu. M.** The equations for determination of stress-deformed state of multilayered shells // Proc. of the 9th Russian-Korean intern. symp. on sci. and technol., Novosibirsk, 26 June — 2 July 2005. Novosibirsk: Novosib. State Univ., 2005. P. 547–550.
23. **Волчков Ю. М., Полтавская Е. Н.** Моделирование напряженно-деформированного состояния в слоистых ортотропных пластинах // Мат. заметки Сев.-Вост. федер. ун-та. 2015. Т. 22, № 2. С. 62–71.
24. **Pagano N. J.** Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // J. Composite Materials. 1969. V. 3, N 4. P. 398–409.
25. **Pagano N. J.** Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // J. Composite Materials. 1970. V. 4, N 1. P. 20–34.
26. **Pagano N. J.** Elastic behavior of multilayered bidirectional composites // AIAA J. 1972. V. 10, N 7. P. 931–933.

Поступила в редакцию 1/VI 2017 г.
