

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ДИСЛОКАЦИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЕ

Э. П. Фельдман

(Харьков)

Решена задача об определении полей напряжений и смещений, вызываемых прямолинейной дислокацией, расположенной в анизотропной упругой пластинке. Найдены частные случаи анизотропии, для которых решение представляется элементарными функциями.

Для решения некоторых задач, связанных с дислокационным описанием явлений пластической деформации кристаллов, весьма важно знать поля упругих напряжений и смещений, вызываемых отдельной дислокацией, расположенной в ограниченном кристалле. Учет влияния границ кристалла на указанные поля представляется интересным изучить на простой модели, достаточно хорошо аппроксимирующей условия эксперимента.

Выбранная расчетная модель изображена на фиг. 1. Дислокация с вектором Бюргерса $\mathbf{b}$ (b_1, b_2, b_3) расположена в неограниченной анизотропной упругой полосе толщиной $2h$. Линия дислокации параллельна границам полосы. Относительно упругих свойств пластинки вводим следующее ограничение: среда обладает плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной линии дислокации. Выбор системы координат и расположение дислокации указаны на фиг. 1. Требуется отыскать напряжения и смещения в произвольной точке полосы.

Поставленная задача в одном ограниченном частном случае решена Кроупа [1]. Ограничения, введенные им, сводятся к следующему: среда изотропна, дислокация расположена точно в центре полосы и вектор Бюргерса имеет лишь одну отличную от нуля компоненту b_z (выбор системы координат в работе [1] такой же, как на фиг. 1).

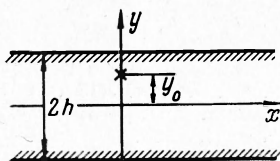
Поэтому результаты Кроупа могут быть получены из результатов данной работы как частный случай. Кроме того, частными случаями данной задачи являются задачи о полях упругих напряжений и смещений, вызываемых дислокацией, расположенной в анизотропной полуограниченной [2] и неограниченной [3] средах.

Приступая к решению, отметим, прежде всего, что задача является плоской в том смысле, что искомые поля не зависят от координаты z . Так как, кроме того, рассматриваемая среда обладает плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной линии дислокации, то, как известно [4], система напряжений и деформаций в такой среде распадается на две независимые подсистемы, первая из которых соответствует плоской деформации с отличными от нуля компонентами $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ напряжений и компонентами u_x, u_y вектора смещений, а вторая соответствует так называемой «антиплоской» деформации с отличными от нуля компонентами σ_{xz} и σ_{yz} напряжений и компонентой u_z вектора смещений.

В рассматриваемом случае плоская деформация вызывается краевыми компонентами вектора Бюргерса b_x и b_y , а антиплоская — винтовой компонентой b_z .

Поэтому решение распадается на два этапа, соответствующих краевой и винтовой дислокациям.

§ 1. Краевая дислокация в анизотропной полосе. Задача о полях напряжений и смещений, вызываемых краевой дислокацией в анизотропной полосе, является плоской задачей теории упругости анизотропного тела. Для определенности в дальнейшем будем говорить о поле напряжений и будем пользоваться результатами и обозначениями С. Г. Лехницкого [4]. Компоненты тензора напряжений в плоской задаче теории упругости анизотропного тела могут быть представлены следующим



Фиг. 1

образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -2\operatorname{Re} [\mu_1^2 f_1(z_1) + \mu_2^2 f_2(z_2)], & \sigma_{xy} &= 2\operatorname{Re} [\mu_1 f_1(z_1) + \mu_2 f_2(z_2)] \\ \sigma_{yy} &= -2\operatorname{Re} [f_1(z_1) + f_2(z_2)], & z_\alpha &= x + \mu_\alpha y, \quad (\alpha = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь μ_1 и μ_2 (наряду с $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_2$) — корни алгебраического уравнения четвертой степени, коэффициенты которого известным образом связаны с компонентами тензора упругих модулей среды.

Компоненты вектора смещений тоже выражаются известным образом через функции $f_1(z_1)$, $f_2(z_2)$ и упругие модули среды [3]. Задача состоит в определении функций $f_1(z_1)$ и $f_2(z_2)$. Для решения задачи будем искать напряжения в виде

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^\circ + \sigma_{ik}^* \quad (1.2)$$

где первое слагаемое соответствует дислокации в неограниченной среде [3], а второе учитывает наличие ограничивающих поверхностей.

Напряжения σ_{ik}^* выражаются согласно (1.1) через функции $f_\alpha^*(z_\alpha)$, регулярные в полосе $-h \leq y \leq h$.

Граничные условия состоят в данном случае в исчезновении компонент σ_{i2} ($i = 1, 2$) напряжений на плоскостях $y = \pm h$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^*(x, h) &= -\sigma_{22}^\circ(x, h), & \sigma_{22}^*(x, -h) &= -\sigma_{22}^\circ(x, -h) \\ \sigma_{12}^*(x, h) &= -\sigma_{12}^\circ(x, h), & \sigma_{12}^*(x, -h) &= -\sigma_{12}^\circ(x, -h) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Таким образом, приходим к следующей задаче теории функций комплексного переменного: найти две функции $f_1^*(z_1)$ и $f_2^*(z_2)$, регулярные в полосе $-h \leq y \leq h$ и удовлетворяющие (с учетом (1.1)) данным граничным условиям (1.3).

Указанная задача в общей постановке (т. е., вообще говоря, при произвольных заданных по краям полосы нагрузках) решена в работе П. П. Куфарова и В. А. Свекло [5]. Ограничения, налагаемые в [5] на указанные нагрузки, состоят в основном в представимости последних в виде интегралов Фурье. Кроме того, в работе [6], использующей метод, предложенный в [5], дано решение второй основной задачи и некоторых других задач теории упругости для анизотропной полосы.

Поскольку в интересующем нас случае фурье-образы граничных нагрузок являются элементарными функциями (см. ниже), то оказывается возможным, следуя в существенном работе [5], получить решение в развернутом виде. С этой целью рассмотрим фурье-представления функций

$$f_j^*(z_j) \quad (j = 1, 2), \quad f_j^*(z_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_j^*(k) e^{-ikz_j} dk \quad (1.4)$$

Тогда, учитывая (1.4), получим из (1.3) систему уравнений для нахождения $f_j^*(k)$ ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} f_1^*(k) e^{-ik\mu_1 h} + f_2^*(k) e^{-ik\mu_2 h} + \overline{f_1^*(-k)} e^{-ik\bar{\mu}_1 h} + \overline{f_2^*(-k)} e^{-ik\bar{\mu}_2 h} &= -P_1(k) \\ f_1^*(k) e^{ik\mu_1 h} + f_2^*(k) e^{ik\mu_2 h} + \overline{f_1^*(-k)} e^{ik\bar{\mu}_1 h} + \overline{f_2^*(-k)} e^{ik\bar{\mu}_2 h} &= -P_2(k) \\ \mu_1 f_1^*(k) e^{-ik\mu_1 h} + \mu_2 f_2^*(k) e^{-ik\mu_2 h} + \overline{\mu_1 f_1^*(-k)} e^{-ik\bar{\mu}_1 h} + \\ &+ \overline{\mu_2 f_2^*(-k)} e^{-ik\bar{\mu}_2 h} = P_3(k) \\ \mu_1 f_1^*(k) e^{ik\mu_1 h} + \mu_2 f_2^*(k) e^{ik\mu_2 h} + \overline{\mu_1 f_1^*(-k)} e^{ik\bar{\mu}_1 h} + \\ &+ \overline{\mu_2 f_2^*(-k)} e^{ik\bar{\mu}_2 h} = P_4(k) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $P_i(k)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — фурье-образы функций, стоящих в правых частях уравнений (1.3). Если учесть явный вид функций $\sigma_{i2}^\circ(x, y)$ ($i = 1, 2$) [3] и принять во внимание, что в качестве μ_1 и μ_2 выбираем такие корни характеристического уравнения, для которых $\text{Im } \mu_1 > 0$ и $\text{Im } \mu_2 > 0$, то, например, для

$$P_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{22}^\circ(x, h) e^{ikx} dx$$

получается следующее выражение:

$$P_1(k) = \begin{cases} \frac{1}{4} i \sqrt{2/\pi} [\lambda_1 e^{ik\mu_1(y_0-h)} + \lambda_2 e^{ik\mu_2(y_0-h)}], & k < 0 \\ -\frac{1}{4} i \sqrt{2/\pi} [\bar{\lambda}_1 e^{ik\bar{\mu}_1(y_0-h)} + \bar{\lambda}_2 e^{ik\bar{\mu}_2(y_0-h)}], & k > 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

где $\lambda_j = M_{jk} d_k$, а величины M_{jk} и d_k связаны с упругими модулями среды и вектором Бюргерса дислокации при помощи известных соотношений, приведенных в [3]. Выражения для остальных фурье-образов $P_j(k)$ ($j = 2, 3, 4$) аналогичны выражению (1.6).

Из (1.6) и (1.5) видно, что функции $f_1^*(k)$ и $f_2^*(k)$ имеют различные аналитические выражения для $k < 0$ и $k > 0$. Обозначим эти выражения через $f_{1,2}^-(k)$ и $f_{1,2}^+(k)$ соответственно. Тогда решение системы (1.5) запишется следующим образом:

$$f_{1,2}^\pm(k) = \pm \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta_{1,2}^\pm(k)}{\Delta(k)} \quad \left(\pm \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \Delta_{1,2}^\pm(k) \right) \quad (1.7)$$

Здесь $\Delta(k)$ — определитель системы (1.5), а выражение, указанное в скобках, — определители, получающиеся из $\Delta(k)$ заменой первого или второго столбцов свободными членами уравнений (1.5).

Следовательно, согласно (1.4), найдем

$$f_{1,2}^*(z_{1,2}) = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta_{1,2}^-}{\Delta} e^{-ikz_{1,2}} dk + \frac{i}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_{1,2}^+}{\Delta} e^{-ikz_{1,2}} dk \quad (1.8)$$

Для функций, определяющих полное поле напряжений

$$f_j(z_j) = f_j^\circ(z_j) + f_j^*(z_j), \quad (j=1,2)$$

Здесь $f_j^\circ(z_j)$ соответствуют дислокации в неограниченной среде [3], после элементарных преобразований получаем следующие представления:

$$\begin{aligned} f_j(z_j) &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_j^+}{\Delta} e^{-ikz_j} dk, & y > y_0 \\ f_j(z_j) &= -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_j^-}{\Delta} e^{-ikz_j} dk, & y < y_0 \end{aligned} \quad (j=1,2) \quad (1.9)$$

Как будет показано ниже, интегралы, входящие в формулы (1.9), сходятся, и поэтому функции $f_j(z_j)$, определяемые этими формулами, существуют и дают решение поставленной задачи.

§ 2. Исследование сходимости интегралов. Некоторые частные случаи. Во всем дальнейшем исследовании определяющее значение будет иметь рассмотрение определителя $\Delta(k)$, являющегося знаменателем подынтегральных функций в формулах

¹ По дважды повторяющимся латинским индексам здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование от 1 до 2.

(1.9). Запишем этот определитель в раскрытом виде. Оказывается,

$$\Delta(k) = 4 |\mu_1 - \mu_2|^2 |\mu_1 - \bar{\mu}_2|^2 \left[\frac{\sin kh (\mu_1 - \bar{\mu}_2) \sin kh (\bar{\mu}_1 - \mu_2)}{(\mu_1 - \bar{\mu}_2)(\bar{\mu}_1 - \mu_2)} - \frac{\sin kh (\mu_1 - \mu_2) \sin kh (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)}{(\mu_1 - \mu_2)(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)} \right] \quad (2.1)$$

Если считать k изменяющимся в комплексной области, то $\Delta(k)$ является целой функцией, имеющей бесчисленное количество нулей, из которых, однако, лишь один, а именно, $k = 0$, расположен на действительной оси. Элементарные выкладки показывают, что $k = 0$ есть нуль четвертого порядка функции $\Delta(k)$.

Числители подынтегральных функций выражений (1.9) также являются целыми функциями, причем легко показать, что $k = 0$ будет для этих функций нулем первого порядка.

Таким образом, подынтегральные функции в выражениях (1.9) имеют на действительной оси лишь одну особую точку — начало координат, причем эта особая точка является полюсом третьего порядка.

Кроме того, непосредственной проверкой убеждаемся, что подынтегральная функция в верхнем интеграле формулы (1.9) экспоненциально убывает при $k \rightarrow \pm \infty$ вдоль действительной оси, если $y_0 \leq y \leq h$, а в нижнем — если $-h \leq y \leq y_0$. Следовательно, рассматриваемые интегралы сходятся на бесконечности.

Вблизи точки $k = 0$ эти интегралы расходятся как в обычном смысле, так и, вообще говоря, в смысле главного значения по Коши. Установим теперь, в каком смысле можно понимать сходимость указанных интегралов в окрестности нуля. Для определенности будем говорить об одном из этих интегралов. Ряд Лорана подынтегральной функции в (1.9) в окрестности нуля имеет вид

$$\frac{\gamma_1}{k^3} + \frac{\gamma_2}{k^2} + \frac{\gamma_3}{k} + \dots, \quad \gamma_1 \neq 0.$$

Если теперь интегрировать нашу функцию вдоль действительной оси с выброшенным интервалом $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, причем связать δ с ε таким образом, чтобы

$$\delta = \varepsilon \left(1 + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \varepsilon \right)^{-1}$$

а затем устремить ε (а тем самым и δ) к нулю, то тем самым, как нетрудно убедиться, сходимость исследуемого интеграла в нуле будет обеспечена. Заметим, кстати, что при указанной связи δ и ε являются эквивалентными бесконечно малыми. Таким образом, сходимость рассматриваемых интегралов в определенном выше смысле можно считать установленной.

Перейдем теперь к рассмотрению возможностей вычисления интегралов (1.9) в элементарных функциях.

Анализ поля напряжений дислокации в том случае, когда определяющие это поле функции $f_j(z_j)$ даны в интегральном виде (1.9), представляется крайне затруднительным. В связи с этим, пожалуй, основной интерес приобретает вопрос о возможности выражения интегралов (1.9) в явном виде через элементарные функции.

Для вычисления интегралов естественно прибегнуть к процедуре контурного интегрирования в комплексной области, но для этого прежде всего необходимо установить распределение нулей функции $\Delta(k)$ при комплексных k , так как эти нули являются полюсами подынтегральной функции. Поскольку $\Delta(k)$ имеет бесчисленное множество нулей, то при вычислении интеграла получим ряд, каждый член которого соответствует вычету подынтегральной функции в соответствующем нуле знаменателя.

Однако в общем случае, т. е. при произвольных μ_1 и μ_2 , невозможно даже установить распределение нулей $\Delta(k)$, не говоря уже о суммировании соответствующего ряда. Поэтому естественно попытаться выяснить, при каких соотношениях между параметрами μ_1 и μ_2 интегралы (1.9) вычисляются в явном виде.

Известно [1,7], что в изотропном случае, сравнительно просто получаемом из (1.9) и (1.1) предельным переходом при $\mu_1 \rightarrow i$, $\mu_2 \rightarrow i$, соответствующие выражениям (1.9) интегралы не берутся в элементарных функциях. В связи с этим весьма любопытным является тот факт, что можно указать такие соотношения между μ_1 и μ_2 , т. е. такие случаи анизотропии, когда указанное вычисление интегралов возможно.

Это происходит в случае, если $\Delta(k)$ становится периодической функцией с чисто мнимым периодом, что, в свою очередь, возможно тогда, когда параметры μ_1 и μ_2 являются чисто мнимыми: $\mu_1 = is_1$, $\mu_2 = is_2$ и, кроме того, отношение $(s_1 + s_2) / (s_1 - s_2)$ является рациональным числом. В этих случаях легко подобрать контур интегрирования стандартного типа таким образом, чтобы вычисление интеграла сводилось к вычислению вычетов в конечном числе полюсов подынтегральной функции.

Проиллюстрируем приведенные рассуждения на наиболее, пожалуй, простом примере, когда

$$(s_1 + s_2)/(s_1 - s_2) = 2 \quad (2.2)$$

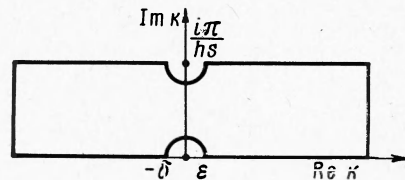
В этом случае из (2.1) имеем

$$\Delta(k) = -16(s_1 - s_2)^2 \operatorname{sh}^4 kh (s_1 - s_2) \quad (2.3)$$

Что касается числителей подынтегральных функций, то они, как оказывается в результате раскрытия соответствующих определителей, имеют вид

$$\operatorname{sh} kh (s_1 - s_2) [\alpha_1 e^{\beta_1 k} + \dots + \alpha_n e^{\beta_n k}]$$

Здесь α_j и β_j не зависят от k . Находим, таким образом, что расчет сводится к вычислению интегралов вида



Фиг. 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta k} dk}{\operatorname{sh}^3 kh (s_1 - s_2)}$$

которое, в свою очередь, производится при помощи контурного интегрирования вдоль контура стандартного вида, изображенного на фиг. 2.

При вычислении оказывается, как и следовало ожидать, что оба интеграла (1.9) представляют функции, являющиеся аналитическим продолжением друг друга.

Приведем результат вычисления определяющих функций $f_j(z_j)$ для случая (2.2)

$$\begin{aligned} f_1(z_1) = & \frac{1}{32(hs)^3} \left\{ \lambda_1 \left[\left(-ix + \frac{3}{2}s(y - y_0) \right)^2 - 4h^2 s^2 \right] \operatorname{cth} \frac{\pi}{2hs} \left(x + \frac{3}{2}is(y - y_0) \right) + \right. \\ & + \lambda_2 \left[\left(-ix + \frac{1}{2}s(3y - y_0) \right)^2 - h^2 s^2 \right] \operatorname{cth} \frac{\pi}{2hs} \left(x + \frac{1}{2}is(3y - y_0) + ihs \right) - \\ & - \bar{\lambda}_1 \left[\left(-ix + \frac{3}{2}s(y + y_0) \right)^2 - h^2 s^2 \right] \operatorname{cth} \frac{\pi}{2hs} \left(x + \frac{3}{2}is(y + y_0) + ihs \right) - \\ & \left. - \bar{\lambda}_2 \left[\left(-ix + \frac{1}{2}s(3y + y_0) \right)^2 \right] \operatorname{cth} \frac{\pi}{2hs} \left(x + \frac{1}{2}is(3y + y_0) \right) \right\} \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(z_2) = & \frac{1}{32(hs)^3} \left\{ 3\lambda_1 \left[\left(-ix + \frac{1}{2}s(y - 3y_0) \right)^2 - h^2 s^2 \right] \operatorname{cth} \frac{\pi}{2hs} \left(x + \frac{1}{2}is(y - 3y_0) + ihs \right) + \right. \\ & + \lambda_2 \left[3 \left(-ix + \frac{1}{2}s(y - y_0) \right)^2 + 4h^2 s^2 \right] \operatorname{cth} \frac{\pi}{2hs} \left(x + \frac{1}{2}is(y - y_0) \right) - \\ & - 3\bar{\lambda}_1 \left[\left(-ix + \frac{1}{2}s(y + 3y_0) \right)^2 \right] \operatorname{cth} \frac{\pi}{2hs} \left(x + \frac{1}{2}is(y + 3y_0) \right) - \\ & \left. - \bar{\lambda}_2 \left[3 \left(-ix + \frac{1}{2}s(y + y_0) \right)^2 + 5h^2 s^2 \right] \operatorname{cth} \frac{\pi}{2hs} \left(x + \frac{1}{2}is(y + y_0) + ihs \right) \right\} \end{aligned}$$

$$s = s_1 - s_2$$

Непосредственно проверяется, что поле напряжений, определяемое при помощи (2.4) и (1.1), действительно удовлетворяет всем необходимым условиям, т. е. имеет нужную особенность в точке $(0, y_0)$, и, кроме того, компоненты σ_{xy} и σ_{yy} исчезают, если $y = \pm h$. Формулы (2.4) совместно с (1.1) позволяют полностью проанализировать поле напряжений краевой дислокации и характер взаимодействия между краевыми дислокациями в анизотропной полосе, если, конечно, выполнено условие (2.2). Легко, например, установить, что при $x \rightarrow \pm \infty$ напряжения убывают, вообще говоря, как

$$\operatorname{const} \left(\frac{x}{hs} \right)^2 \exp \frac{-|px|}{hs}$$

В качестве характерного примера приведем результаты расчета силы взаимодействия двух дислокаций с одинаковыми векторами Бюргера $(0, b, 0)$, расположенных на расстоянии x в срединной плоскости полосы. Согласно Эшелби [8], сила взаимодействия между двумя дислокациями определяется полем напряжений, созданным одной из них в точке, где находится другая

$$F_i = \varepsilon_{ikl} \tau_k \sigma_{lm} b_m \quad (2.5)$$

Здесь $\mathbf{F}$ — сила, ε_{ikl} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга, $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к линии дислокации, $\mathbf{b}$ — вектор Бюргерса. По дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В рассматриваемом случае единственная отличная от нуля компонента силы взаимодействия F_x имеет вид

$$F_x = -\frac{bd}{2(hs)^3} (2x^2 - h^2 s^2) \operatorname{csch} \frac{\pi x}{hs} \quad (2.6)$$

где d — величина, известным образом связанная с вектором Бюргерса и упругими постоянными [3]. Поскольку параметр s по порядку величины есть единица, то формула (2.6) показывает, что на расстоянии $x \sim h$ сила взаимодействия между дислокациями указанного типа меняет знак, в то время как в неограниченной и полугограниченной средах одноименные дислокации отталкиваются при любом расстоянии между ними. Можно было бы привести довольно много интересных примеров применения формул (2.4), например, расчет силы взаимодействия между дислокациями других типов, силы «изображения» и т. д., однако это выходит за рамки настоящей работы.

В заключение укажем, что, хотя формулы (2.4) получены при искусственном предположении (2.2) относительно упругих констант материала, однако можно надеяться, что вследствие устойчивости решений уравнений теории упругости относительно изменений упругих постоянных качественные выводы, полученные на основании формул (2.4), будут оставаться в силе для материалов с иными упругими постоянными. Это заключение, по меньшей мере, справедливо для материалов, у которых отношение $(s_1 + s_2) / (s_1 - s_2)$ близко к 2.

§ 3. Винтовая дислокация в анизотропной полосе. Как было указано, винтовая дислокация вызывает в нашей пластинке антиплоскую деформацию, которая характеризуется смещением u_z и компонентами напряжений σ_{xz} и σ_{yz} . Для их нахождения удобно ввести функцию ψ , следующим образом связанную с компонентами напряжений [9]:

$$\sigma_{iz} = \varepsilon_{zik} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

где ε_{ike} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга. Тогда в среде, содержащей винтовую дислокацию с вектором Бюргерса $\mathbf{b}$ в точке $\mathbf{r}_0$, функция ψ должна удовлетворять уравнению

$$\lambda_{ik} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} = b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (\lambda_{ik} = \lambda_{i3k3}) \quad (3.2)$$

где λ_{ikem} — тензор упругих модулей среды.

Граничные условия состоят в исчезновении компоненты σ_{yz} напряжений на плоскостях $y = \pm h$. Это условие можно заменить условием обращения функции ψ в нуль на границе области.

Для решения задачи совершим линейное преобразование координат согласно соотношениям

$$x_i' = \beta_{ik} x_k \quad (i = 1, 2) \quad (3.3)$$

причем потребуем, чтобы при этом левая часть уравнения (3.2) преобразовалась в оператор Лапласа и чтобы исходная полоса перешла в полосу такой же толщины и ориентации. Легко получить явный вид такого преобразования. А именно, оказывается, что

$$\beta_{1i} = \lambda_{i1}^{-1} \sqrt{\Delta}, \quad \beta_{2i} = \delta_{2i} \quad (\Delta = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2) \quad (3.4)$$

Здесь Δ — определитель тензора λ_{ik} .

При преобразовании, определяемом формулами (3.3), (3.4), уравнение (3.2) преобразуется так:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} = \frac{b}{\lambda_{22}} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0') \quad (3.5)$$

Граничные условия, которым должна удовлетворять функция ψ , остаются неизменными.

Уравнению (3.5) удовлетворяет функция напряжений для винтовой дислокации в изотропной среде, а также потенциал электростатического поля, создаваемого заряженной нитью в изотропной среде. При указанных граничных условиях это уравнение решается методом изображений, причем решение, как известно [10], имеет следующий вид:

$$\psi = \frac{b}{2\pi\lambda_{22}} \operatorname{Re} \ln \frac{\operatorname{ch} \{ \frac{1}{4}\pi h^{-1} [(x' - x_0') + i(y' - y_0' - 2h)] \}}{\operatorname{ch} \{ \frac{1}{4}\pi h^{-1} [(x' - x_0') + i(y' + y_0')] \}} \quad (3.6)$$

Для того чтобы получить решение нашей задачи, остается лишь вместо новых координат подставить старые, согласно (3.3) и (3.4). Тогда получим

$$\psi = \frac{b}{2\pi\lambda_{22}} \operatorname{Re} \ln \frac{\operatorname{ch} \{ \frac{1}{4}\pi h^{-1} [\sqrt{\Delta} \lambda_{11}^{-1} (x_i - x_{i0}) + i(y - y_0 - 2h)] \}}{\operatorname{ch} \{ \frac{1}{4}\pi h^{-1} [\sqrt{\Delta} \lambda_{11}^{-1} (x_i - x_{i0}) + i(y + y_0)] \}} \quad (3.7)$$

Формула (3.7) дает решение поставленной задачи, поскольку дифференцированием ψ , согласно (3.1), легко получаются формулы для компонент напряжений. Кроме того, из (3.7) предельным переходом при $h \rightarrow \infty$ получаем функцию напряжений для винтовой дислокации в неограниченной анизотропной среде.

Интерпретация полученного результата почти такая же, как и для изотропной полосы. А именно, результирующее поле в полосе можно считать полем, созданным в неограниченной среде как самой дислокацией, так и ее изображениями, расположенными в точках, удовлетворяющих условиям

$$\frac{1}{4}\pi h^{-1} [\sqrt{\Delta} \lambda_{11}^{-1} (x_i - x_{i0}) + i(y - y_0 - 2h)] = i(\frac{1}{2}\pi + k_1\pi) \quad (k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots) \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{4}\pi h^{-1} [\sqrt{\Delta} \lambda_{11}^{-1} (x_i - x_{i0}) + i(y + y_0)] = i(\frac{1}{2}\pi + k_2\pi) \quad (k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots)$$

Из формул следует, что отраженные дислокации все расположены на прямой

$$x + \operatorname{tg} \alpha (y - y_0) = 0 \quad (\operatorname{tg} \alpha = \lambda_{22}/\lambda_{12})$$

проходящей через след линии дислокации.

В заключение благодарю А. М. Косевича — за ценные советы и Л. А. Пастура — за постоянное внимание и помощь в работе.

Поступила 26 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. К р о у р а F. Napětí a deformace v nekonečném pásu způsobené hranovou dislokací. *Appl. mat.*, 1959, vol. 4, p. 239.
2. П а с т у р Л. А., Ф е л ь д м а н Э. П., К о с е в и ч В. М., К о с е в и ч А. М. Прямолинейная дислокация у плоскости разрыва упругих постоянных в неограниченной анизотропной среде. *Физика твердого тела*, 1962, т. 4, стр. 2585.
3. S t r o h A. N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Philos. Mag.*, 1958, vol. 3, p. 625.
4. Л е х н и ц к и й С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1959.
5. К у ф а р е в П. П., С в е к л о В. А. Определение напряжений в анизотропной полосе. *Докл. АН СССР*, 1941, т. 32, № 9.
6. Ш е п е л е н к о В. Н. Некоторые задачи теории упругости для анизотропной полосы. *Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение*, 1960, № 5.
7. С н е д д о н И. Преобразования Фурье. *Изд. иностр. лит.*, 1955.
8. Э ш е л б и Дж. Континуальная теория дислокаций. *Изд. иностр. лит.*, 1963.
9. D e W i t R. The continuum theory of stationary dislokations. *Solid state physics*, Academic Press, N. Y.—L., 1960, vol. 10.
10. М о р с Ф., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики, т. II. *Изд. иностр. лит.*, 1959.