ПМТФ, № 5, 1961

ОПЛАВЛЕНИЕ ТЕЛА В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ И ЛИНИИ В ДИССОЦИИРОВАННОМ ПОТОКЕ ВОЗДУХА С ИСПАРЕНИЕМ ПЛЕНКИ РАСПЛАВА

Г. А. Тирский

(*Москва*)

В зависимости от условий гиперзвукового обтекания и физических свойств материала тела разрушение обтекаемой поверхности зачастую происходит при одновременном протекании нескольких физико-химических процессов как в пограничном слое, так и на поверхности и внутри тела. В работе рассматривается решение задачи об оплавлении тупого тела в окрестности критической точки (осесимметричный случай) и критической линии (плоский случай) в диссоциированном потоке воздуха с учетом испарения пленки расплава и наличия произвольного конечного числа фронтов внутри тела, на которых может происходить поглощение тепла. Появление таких эндотермических фронтов связано с изменением кристаллической решетки или с появлением вращательного движения молекул в кристалле при достижении некоторой характерной температуры.

Металлы и кристаллические формы некоторых керамик являются типичными материалами, разрушающимися по такой схеме. При нагревании таких материалов они плавятся с образованием жидкой пленки, которая при большой вязкости расплава и больших тепловых потоках со стороны газа в значительной степени испаряется.

Решение получено с учетом произвольной зависимости теплофизических параметров тела и вязкости расплава от температуры. Расчет любого конкретного случая сводится к решению системы конечных уравнений. В более простой постановке без учета подповерхностных эффектов и диссоциации воздуха аналогичная задача решалась интегральным методом Кармана — Польгаузена в отчете [1]. Следует отметить, что в этом отчете получено ошибочное условие кипения пленки расплава (см. замечание 7.2).

§ 1. Система уравнений и краевые условия. Разрушение тела в потоке газа при образовании нескольких поверхностей фазового перехода приводит к необходимости решения соответствующих систем дифференциальных уравнений в частных производных в каждой из неизвестных областей и сопряжения этих решений на фронтах перехода. Задача о стационарном режиме плавления тела с испарением пленки расплава в окрестности критической линии или в окрестности критической точки тупого тела вращения в стационарном потоке газа сводится к решению нестационарных уравнений многокомпонентного пограничного слоя в газе ($y'_0(x, t) < y < \infty$, $t > 0$).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho x^{n-1} u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \qquad (n = 1, 2)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial c_i}{\partial t} + u \frac{\partial c_i}{\partial x} + v \frac{\partial c_i}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_i \frac{\partial c_i}{\partial y}\right) + \dot{\rho}_i \qquad (i = 1, \ldots, N) \qquad (1.1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\mu}{\sigma}\left[\frac{\partial h}{\partial y} + \sum_{k=1}^{N} (L_k - 1) L_k \frac{\partial c_k}{\partial y}\right]\right\}$$

$$p = \rho RT \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{M_k}, \qquad \sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \qquad L_i = \frac{\rho c_p D_i}{\lambda} \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

$$c_p = \sum_{k=1}^{N} c_{pk} c_k, \qquad h = \sum_{k=1}^{N} h_k c_k$$

нестационарных уравнений пограничного слоя в пленке расплава $(y_1(x, t) < y < y_0(x, t),\ t > 0)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{n-1}u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(x^{n-1}v_1) = 0 \qquad (n = 1, 2)$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\right) \tag{1.2}$$

$$\rho_1 c_1^*\left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial T_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)$$

$$\rho_1 = \text{const}, \quad c_1^* = \text{const}, \quad \lambda_1 = \text{const}, \quad \mu_1 = \mu_1^* M_1(T_1)$$

совместно с системой $P-1$ уравнений теплопроводности в твердом теле $(y_j(x, t) < y < y_{j-1}(x, t)\ j = 2, \ldots, P-1, \quad -\infty < y < y_{p-1};\ t > 0)$

$$\rho_2 c_j^* \frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_j\frac{\partial T_j}{\partial y}\right), \ \rho_2 c_j^* = \rho_2 c_j^* N_j(T_j), \ \lambda_j = \lambda_j^\circ L_j(T_j) \ (j = 2, \ldots, P) \tag{1.3}$$

Здесь $n = 1$ — плоский случай; $n = 2$ — осесимметричный случай; x, y — координаты, связанные с телом, соответственно вдоль и по нормали к первоначальной поверхности тела (абсолютная система координат); u, v — компоненты вектора скорости соответственно по осям x и y; ρ — плотность; p — давление; c_i — массовая концентрация i-й компоненты; $\dot{\rho}_i$ — массовая скорость образования i-й компоненты в единице объема; h_i — парциальная удельная энтальпия i-й компоненты; M_i — молярная масса; T_j $(j = 1, \ldots, P)$ — температура тела; μ, λ, D_i — соответственно коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии; R — универсальная газовая постоянная; c_{pi} — теплоемкость при постоянном давлении для поступальной, вращательной и колебательной энергии i-й компоненты; M_1, N_j и L_j — заданные функции температуры; P — 1-число характерных температур в теле, связанных с эндотермическими изменениями кристаллической решетки, включая температуру плавления; $y = y_j(x, t)$ —уравнения неизвестных фронтов перехода. При записи уравнений (1.1) — (1.3), кроме обычных предположений теории пограничного слоя в окрестности критической точки, сделано допущение, что все максвелловские диффузионные коэффициенты равны (для бинарной смеси это предположение выполняется точно) и эффект термодиффузии мал. Пленка расплава — однородная несжимаемая жидкость с переменным коэффициентом вязкости. Физические свойства тела — заданные функции температуры.

Система уравнений (1.1) — (1.3) должна быть решена при соответствующих краевых условиях.

1°. Предполагается, что в процессе оплавления тело повторяет свою первоначальную форму или слабо ее изменяет (этот факт подтверждается экспериментально), приходим к следующим условиям на внешней границе пограничного слоя $(y \to \infty,\ t > 0)$:

$$u = \beta x, \qquad c_i = c_{ie}, \qquad h = h_{00}, \qquad p = p_{00} - \tfrac{1}{2}\rho_{00}\beta^2 x^2 \tag{1.4}$$

2°. На фронте испарения $(y = y_0(x, t),\ t > 0)$ из законов сохранения массы, импульса и энергии при предположении, что

$$u = u_1, \ T = T_1 = T_0 \tag{1.5}$$

получаем [2]

$$\rho\,(D + u\,\mathrm{tg}\,\gamma - v) = \rho_1(D + u_1\,\mathrm{tg}\,\gamma - v_1)$$

$$\rho c_i(D + u\,\mathrm{tg}\,\gamma - v) + \rho D_i\frac{\partial c_i}{\partial y} = \rho_1 c_{if}(D + u_1\,\mathrm{tg}\,\gamma - v_1) \qquad (i = 1, \ldots, N')$$

$$\rho c_j (D + u \operatorname{tg} \gamma - v) + \rho D_j \frac{\partial c_j}{\partial y} = 0 \qquad (j = N' + 1, \ldots, N) \tag{1.6}$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}, \qquad p = p_1$$

$$\rho (D + u \operatorname{tg} \gamma - v)(h - h^{(1)}) + \rho D_i L_i^{-1} \frac{\partial h}{\partial y} + \sum_{k=1}^{N} (1 - L_k^{-1}) \rho D_k h_k \frac{\partial c_k}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}$$

$$\frac{p_*}{p_{00}} \psi\left(\frac{T_0}{T_*}\right) \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{M_k} = \sum_{k=1}^{N'} \frac{c_k}{M_k}$$

3°. На фронте плавления ($y = y_1(x, t)$, $t > 0$) имеем

$$u_1 = 0, \qquad T_1 = T_2 = T_1^*, \qquad \rho_1 (D_1 - v_1) = \rho_2 D_1$$

$$\rho_2 D_1 \delta_1 = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \tag{1.7}$$

4°. На эндотермических поверхностях перехода ($y = y_j(x, t)$, $t > 0$, $j = 2, \ldots, P - 1$) будем иметь

$$T_j = T_{j+1} = T_j^*, \qquad \rho_2 D_j \delta_j = \lambda_{j+1} \frac{\partial T_{j+1}}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial y} \qquad (j = 2, \ldots, P - 1) \tag{1.8}$$

5. На бесконечности внутри тела ($y \to -\infty$, $t > 0$)

$$T_P = T_{-\infty} = T_P^* \tag{1.9}$$

В условиях (1.4) — (1.9) $D, D_1, \ldots, D_{p-1}$ нормальные к соответствующим поверхностям скорости перемещения фронтов испарения, плавления и поверхностей перехода; N' — число компонент пара; $N'' = N - N'$; T_0 — неизвестная до решения задачи температура на поверхности испарения; T^*_j ($j = 1, \ldots, P - 1$) — температура плавления ($j = 1$) и характерные температуры перехода ($j \geqslant 2$); $h^{(1)}$ — энтальпия жидкой пленки при температуре испарения T_0; δ_j ($j = 1, \ldots, P - 1$) — скрытая теплота плавления ($j = 1$) и скрытые теплоты перехода ($j \geqslant 2$) единицы массы; p_{00} — давление торможения; h_{00} — энтальпия торможения; γ — угол между касательной к поверхности испарения в некоторой ее точке и касательной к контуру тела в точке с тем же значением координаты x; c_{if} — состав паров пленки при испарении в вакуум (при испарении только одной компоненты $c_{if} = 1$); последнее уравнение, соотношений (1.6) — уравнение кривой упругости пара.

Так как в дальнейшем будем разыскивать стационарный режим разрушения, то начальные условия опускаем (задача без начальных условий [3]).

§ 2. Формулировка краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение, дающее стационарный режим разрушения, должно быть решением типа равномерно распространяющейся волны. Будем поэтому искать решение уравнений (1.1) — (1.3) с условиями (1.4) — (1.9) в виде

1) для пограничного слоя смеси газов

$$u = \beta x \varphi'(\eta), \qquad v = -\frac{\rho_{00}}{\rho} \sqrt{\beta \nu_{00}} \left[l_0^{-\frac{1}{2}} n \varphi(\eta) - D^* \frac{\rho}{\rho_{00}} \right] \qquad (n = 1, 2)$$

$$h(\eta) = h_{00} g(\eta), \qquad c_i(\eta) = c_{ie} s_i(\eta) \qquad (i = 1, \ldots, N), \qquad p = p_{00} - \tfrac{1}{2} \rho_{00} \beta^2 x^2$$

$$\int_0^\eta \frac{\rho_{00}}{\rho} d\eta = \left(\frac{\beta l_0}{\nu_{00}}\right)^{1/2} (y - Dt), \qquad D^* = \frac{D}{\sqrt{\beta \nu_{00}}} \qquad \nu_{00} = \frac{\mu_{00}}{\rho_{00}} \qquad l_0 = \frac{\mu_{00} \rho_{00}}{\mu_0 \rho_0}.$$

2) для пленки расплава

$$u_1 = \beta_1 x \varphi_1'(\eta_1), \qquad v_1 = -\sqrt{\beta_1 \nu_1}\,[n\varphi_1(\eta_1) - D_1^*] \qquad (n = 1,\, 2)$$

$$p_1 = p_{00} - \frac{1}{2}\rho_1\beta_1^2 x^2, \qquad T_1 = T_1^*\,\theta_1(\eta_1), \qquad \eta_1 = \left(\frac{\beta_1}{\nu_1}\right)^{1/2}(y - Dt) \quad (2.2)$$

$$D_1^* = \frac{D}{\sqrt{\beta_1\nu_1}}, \qquad \nu_1 = \frac{\mu_1^*}{\rho_1}$$

3) для твердого тела

$$T_j = T_j^*\,\theta_j(\eta_1) \qquad (j = 2, \ldots, P) \quad (2.3)$$

Здесь величины с индексом 00 относятся к параметрам заторможенного потока, величины с индексом 0 — к параметрам на поверхности испарения, φ, φ_1, g, s_i, θ_j — искомые функции, β_1 — неизвестный пока параметр. Законы движения фронтов при стационарном режиме разрушения будут

$$y_0(x, t) = Dt, \quad y_j(x, t) = D_j t - s_j, \quad D_j = D \;(j = 1, \ldots, P-1), \quad \gamma = 0 \quad (2.4)$$

Здесь D — искомая скорость разрушения, s_j — искомое расстояние j-го фронта от фронта испарения. Подставляя выражения (2.1) — (2.4) в уравнения (1.1) — (1.3) и условия (1.4) — (1.9), получим следующую нелинейную краевую задачу:

$$(l\varphi'')' + n\varphi\varphi'' = \varphi'^2 - \rho_{00}\rho^{-1}, \qquad (lS_i^{-1}c_i')' + n\varphi c_i' + \dot{\rho}_i(\rho\beta)^{-1} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

$$\left\{l\sigma^{-1}\left[g' + \sum_{k=1}^{N}(L_k - 1)\frac{h_k}{h_{00}}c_k'\right]\right\}' + n\varphi g' = 0 \quad (2.5)$$

$$[M_1(\theta_1)\varphi_1'']' + n\varphi_1\varphi_1'' = \varphi_1'^2 - 1, \quad \theta_1'' + n\sigma_1\varphi_1\theta_1' = 0 \quad (2.6)$$

$$[L_j(\theta_j)\theta_j']' + D_1^*\sigma_j N_j(\theta_j)\theta_j' = 0 \qquad (j = 2, \ldots, P) \quad (2.7)$$

$$\varphi'(\infty) = s_i(\infty) = g(\infty) = 1 \quad (2.8)$$

$$\varphi(0) = l_0^{1/2} r_1^{-3/4} n_1^{-1/2}\varphi_1(0), \;\; \varphi'(0) = r_1^{1/2}\varphi_1'(0), \;\; \varphi''(0) = l_0^{1/2} r_1^{-1/4} n_1^{-1/2} M_1(t_1)\,\varphi_1''(0)$$

$$(c_{i0} - c_{if})\,S_{i0}\,n\varphi(0) + c_i'(0) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N')$$

$$c_{j0}\,S_{j0}\,n\varphi(0) + c_j'(0) = 0 \qquad (j = N' + 1, \ldots, N)$$

$$n\varphi(0)(h - h^{(1)}) + \frac{h_{00}}{\sigma_0}g'(0) + \sum_{k=1}^{N}(L_{k0} - 1)\frac{h_k}{\sigma_0}c_k'(0) = \frac{c_1^*\,T_1^*\,l_0^{1/2}}{\sigma_1 n_1^{1/2} r_1^{3/4}}\,\theta_1'(0) \quad (2.9)$$

$$\theta_1(0) = t_1, \qquad \beta_1 = \beta r_1^{1/2}, \qquad f(c_{i0},\, T_0) = 0$$

$$\varphi_1'(-\eta_1^*) = 0, \qquad \theta_1(-\eta_1^*) = 1, \qquad \theta_2(-\eta_1^*) = t_2 \quad (2.10)$$

$$r_2 n\varphi_1(-\eta_1^*) = D_1^*, \qquad L_2(t_2)\,\theta_2'(-\eta_1^*) - l_2\,t_2\,\theta_1'(-\eta_1^*) = D_1^*\,\Delta_1$$

$$\theta_j(-\eta_1^*) = 1 \quad (j = 2, \ldots, P-1), \quad \theta_{j+1}(-\eta_j^*) = t_{j+1} \;(j = 1, \ldots, P-1) \quad (2.11)$$

$$L_{j+1}(t_{j+1})\,\theta'_{j+1}(-\eta_j^*) - l_{j+1}\,t_{j+1}\,L_j(1)\,\theta_j'(-\eta_j^*) = D_1^*\,\Delta_j \quad (j = 2, \ldots, P-1)$$

$$\theta_P(-\infty) = 1 \quad (2.12)$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения:

$$l = \frac{\mu\rho}{\mu_0\rho_0}, \quad S_i = \frac{\mu}{\rho D_i}, \quad n_1 = \frac{\nu_{00}}{\nu_1}, \quad r_1 = \frac{\rho_{00}}{\rho_1}, \quad r_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad t_1 = \frac{T_0}{T_1^*}$$

$$\sigma_1 = \frac{\mu_1^* c_1^*}{\lambda_1}, \quad \sigma_j = \frac{\nu_1}{\chi_j} = \frac{\mu_1^*}{\rho_1 \lambda_j^\circ} \rho_2 c_i^*, \quad t_j = \frac{T^*_{j-1}}{T_j^*}, \quad l_j = \frac{\lambda^\circ_{j-1}}{\lambda_j^\circ}$$

$$(j = 2, \ldots, P) \tag{2.13}$$

$$\Delta_j = \frac{\rho_2 \nu_1 \delta_j}{\lambda^\circ_{j+1} T^*_{j+1}}, \quad \eta_j^* = s_j \sqrt{\frac{\beta_1}{\nu_1}} = s_j r_1^{1/4} \sqrt{\frac{\beta}{\nu_1}} \qquad (j = 1, \ldots, P-1)$$

Последнее уравнение условий (2.9) — краткая запись кривой упругости пара.

Таким образом, задача свелась к решению системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений $2N + 2P + 8$ порядка с $N + P + 1$ неизвестными параметрами c_{i0} $(i = 1, \ldots, N)$, η_i^* $(i = 1, \ldots, P-1)$, t_1, D_1^*. Соотношения (2.8) — (2.12) дают $3N + 3P + 9$ условий. Следовательно, можно ожидать, что решение задачи определится однозначно.

§ 3. Решение системы уравнения для твердой фазы. Система (2.7) для твердой фазы может быть проинтегрирована в квадратурах. Действительно, интегрируя один раз уравнения (2.7), получим

$$\frac{d\theta_j}{d\eta_1} = -D_1^* \sigma_j \frac{Q_j(\theta_j) - A_j}{L_j(\theta_j)}, \qquad Q_j(\theta_j) = \int N_j(\theta_j)\, d\theta_j \qquad (j = 2 \ldots, P) \tag{3.1}$$

где A_j — постоянные интегрирования. Условие (2.12) дает

$$A_P = Q_P(1) \tag{3.2}$$

Подставляя значения производных из (3.1) в условия теплового баланса (2.11), получим вместе с (3.2) систему $P - 1$ линейных уравнений для неизвестных $A_2, \ldots, A_P$

$$l_{j+1} t_{j+1} \sigma_j [Q_j(t_j) - A_j] = \Delta_j + l_{j+1} t_{j+1} \sigma_j [Q_j(t_j) - Q_j(1)] + \\ + \sigma_{j+1} [Q_{j+1}(t_{j+1}) - A_{j+1}] \qquad (j = 2, \ldots, P-1)$$

Последовательное определение неизвестных из этой системы, начиная с последнего уравнения, дает

$$\sigma_m [Q_m(t_m) - A_m] \prod_{k=m+1}^{P} l_k t_k = \sum_{i=m}^{P-2} \Delta_i \sum_{k=i+2}^{P} l_k t_k + \Delta_{P-1} + \\ + \sum_{i=m}^{P-1} \sigma_i [Q_i(t_i) - Q_i(1)] \prod_{k=i+1}^{P} l_k t_k + \sigma_P [Q_P(t_P) - Q_P(1)] \qquad (m = 2, \ldots, P-1)$$

или, подставляя значения постоянных σ, l, t и Δ, получим окончательное выражение для постоянных A_m в виде

$$c_m^* T_m^* [Q_m(t_m) - A_m] = \sum_{i=m}^{P-1} \{\delta_i + c_i^* T_i^* [Q_i(t_i) - Q_i(1)]\} + \\ + c_P^* T_P^* [Q_P(t_P) - Q_P(1)] \qquad (m = 2, \ldots, P-1)$$

Вторичное интегрирование системы (3.1) с учетом первой системы условий (2.11) дает

$$\int_1^{\theta_m} \frac{L_m(t)\, dt}{Q_m(t) - A_m} = -D_1^* \sigma_m (\eta_1 + \eta_m^*) \qquad (m = 2, \ldots, P-1),$$

$$\int_{t_P}^{Q_P} \frac{L_P(t)\, dt}{Q_P(t) - Q_P(1)} = -D_1^* \sigma_P (\eta_1 + \eta_{P-1}^*) \tag{3.3}$$

Удовлетворяя второй системе условий (2.11), получим систему трансцендентных уравнений

$$\int_1^{t_m} \frac{L_m(t)\,dt}{Q_m(t)-A_m} = -D_1^*\sigma_m\Delta\eta_m^* \quad (m=2,\ldots,P-1) \tag{3.4}$$

для определения $P-2$ неизвестных

$$\Delta\eta_m^* = \eta_m^* - \eta_{m-1}^* = r_1^{1/4}\sqrt{\frac{\beta}{\nu_1}}\,(s_m - s_{m-1})\;(m=2,\ldots,P-1) \tag{3.5}$$

которые определяют безразмерное расстояние между фронтами перехода.

Из (3.4) следует, что расстояние между фронтами обратно пропорционально скорости разрушения, т. е. с увеличением скорости разрушения поверхности перехода сближаются между собой. Формулы (3.3) и система (3.4) определяют распределение температуры в теле и положение фронтов пока с точностью до неизвестных постоянных D_1^* и η_1^*.

§ 4. Решение для жидкой пленки. Отметим сначала частное точное решение первого уравнения системы (2.6)

$$\varphi_1 = \alpha_1 + \varepsilon_1\eta_1 + \frac{\varepsilon_1}{2\eta_1^*}\eta_1^2 \tag{4.1}$$

$$\varphi_1(0) = \alpha_1, \qquad \varphi_1'(0) = \varepsilon_1, \qquad \varphi_1'(-\eta_1^*) = 0 \tag{4.2}$$

которое существует в осесимметричном случае при $M_1(\theta_1) \equiv 1$, если параметры α_1, ε_1 и η_1^* связаны одним условием

$$2\alpha_1\frac{\varepsilon_1}{\eta_1^*} = \varepsilon_1^2 - 1 \tag{4.3}$$

Линейный профиль скорости, который дает решение (4.1), существует, следовательно, только при определенной связи (4.3), наложенной на определяющие параметры задачи. Это решение для случая оплавления без испарения ($\alpha_1 = 0$) изучено в работе [4]. В общем случае уравнение для функции $\varphi_1(\eta_1)$ с граничными условиями (4.2) при $M_1(\theta_1) \equiv 1$ было проинтегрировано численно для $\alpha_1 = 0,\ -0.005,\ -0.01$ и ε_1 в отрезке $[0,\ 1]$ вплоть до $\eta_1^* = 2$. Кроме того, эта же краевая задача при произвольной функции $M_1(\theta_1)$ была решена интегральным методом Кармана — Польгаузена. Если искать функцию $\varphi_1(\eta_1)$ в виде многочлена третьей степени, то этот метод дает

$$a_1(\eta_1^*,\ \varepsilon_1,\ \alpha_1) \equiv \varphi'_1(0) = \frac{\varepsilon_1}{\eta_1^*} + \frac{b}{2}\eta_1^*$$

$$\varphi_1(-\eta_1^*,\ \varepsilon_1,\ \alpha_1) = \alpha_1 - \eta^*_1\left(\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{b}{12}\eta_1^{*2}\right)$$

$$\int_0^{-\eta_1^*} \varphi_1(\eta_1)\,d\eta_1 = -\alpha_1\eta_1^* + \frac{\eta_1^{*2}}{3}\left(\varepsilon_1 - \frac{b}{8}\eta_1^{*2}\right) \tag{4.4}$$

$$\omega_1(-\eta_1^*,\ \varepsilon_1,\ \alpha_1) \equiv \int_0^{-\eta_1^*} \exp\left(-n\sigma_1\int_0^{\eta_1}\varphi_1(\eta_1)\,d\eta_1\right)d\eta_1 =$$

$$= -\eta_1^*\left[1 + \frac{n\sigma_1\alpha_1}{2}\eta_1^* - \frac{n\sigma_1\varepsilon_1}{8}\eta_1^{*2} + \frac{n^2\sigma_1^2\alpha_1^2}{6}\eta_1^{*2} - \frac{n^2\sigma_1^2\alpha_1\varepsilon_1}{8}\eta_1^{*3} + \right.$$

$$\left. + \frac{n^3\sigma_1^3\alpha_1^3}{24}\eta_1^{*3} + O(\eta_1^{*4})\right]$$

где параметр b определяется из выражения

$$b = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\tau\gamma}}{2\tau}, \quad \tau = \frac{\eta_1^{*4}}{120}, \qquad \beta = \frac{1 + M_0}{2(1+n)} + \frac{\varepsilon_1 \eta_1^{*2}}{12} \tag{4.5}$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon_1^2}{3} - \frac{1}{1+n} + \frac{(1 - M_0)\varepsilon_1}{(1+n)\eta_1^{*2}} - \frac{n\alpha_1\varepsilon_1}{(1+n)\eta_1^*}, \qquad M_0 = M_1(t_1)$$

или приближенно (при $\eta_1^* < 1$) $b = \gamma / \beta$.

При $M_1(\theta_1) \equiv 1$ $(n = 2)$ и $b = 0$ из (4.4) — (4.5) следует точное решение (4.1). Сравнение приближенного решения (4.4) — (4.5) при $M_1(\theta_1) \equiv 1$ с численным решением краевой задачи (2.6), (4.2) показывает, что функция $\varphi_1(-\eta_1^*, \varepsilon_1, 0)$ совпадает с численным решением до трех знаков при $0 \leqslant \eta_1^* \leqslant 1.6$ и при $\eta_1^* = 2$ расхождение не превышает 0.5% для всех значений ε_1 [4]. Функция $a_1(\eta_1^*, \varepsilon_1, \alpha_1) = \varepsilon_1 / \eta_1^* + 0.5b\eta_1^*$ отличается от численного решения менее чем на 1.5% при $\eta_1^* = 1$ для всех значений ε_1 [4]. При $\alpha_1 < 0$ отклонение приближенного решения (4.4) — (4.5) от численного еще меньше ввиду выравнивания профиля скорости с ростом $|\alpha_1|$. Заметим, что погрешность в вычислении функции $\varphi_1(\eta_1)$, практически не отражается на точности вычисления функции $\theta_1(\eta_1)$, так как при вычислении последней функции $\varphi_1(\eta_1)$ интегрируется [4]. Поэтому при $\eta_1^* < 1$ с высокой точностью можно пользоваться решением (4.4) — (4.5).

§ 5. Решение уравнений пограничного слоя. Решение системы уравнений (2.5), где l, $\rho_{00}\rho^{-1}$, S_i, $\dot{\rho}_i(\rho\beta)^{-1}$, σ, L_i, h_i — заданные функции от g и c_i с граничными условиями

$$\varphi'(\infty) = 1, \quad g(\infty) = 1, \quad c_i(\infty) = c_{ie}, \quad \varphi(0) = \alpha, \quad \varphi'(0) = \varepsilon$$
$$g(0) = g_0, \quad c_i(0) = c_{i0} \tag{5.1}$$

с точностью до величин порядка ε^2 будет

$$\varphi = \varphi^{(0)}(\eta; G, C_i, \alpha) + \frac{\varepsilon}{a(g_0, c_{i0}, \alpha)} \varphi^{(0)\prime}(\eta; g_0, c_{i0}, \alpha) + O(\varepsilon^2)$$
$$g = g^{(0)}(\eta; G, C_i, \alpha) + \frac{\varepsilon}{a(g_0, c_{i0}, \alpha)} g^{(0)\prime}(\eta; g_0, c_{i0}, \alpha) + O(\varepsilon^2) \tag{5.2}$$
$$c_i = c_i^{(0)}(\eta; G, C_i, \alpha) + \frac{\varepsilon}{a(g_0, c_{i0}, \alpha)} c_i^{(0)\prime}(\eta; g_0, c_{i0}, \alpha) + O(\varepsilon^2)$$

где $(\varphi^{(0)}, g^{(0)}, c_i^{(0)})$ — решение системы (2.5) с граничными условиями

$$\varphi'(\infty) = 1, \quad g(\infty) = 1, \quad c_i(\infty) = c_{ie}, \quad \varphi(0) = \alpha, \quad \varphi'(0) = 0$$
$$g(0) = G, \quad c_i(0) = C_i \tag{5.3}$$

Причем вспомогательные параметры G и C_i $(i = 1, \ldots, N)$ определяются из уравнений

$$G = g_0 - \frac{\varepsilon}{a^{(0)}(g_0, c_{i0}, \alpha)} b^{(0)}(g_0, c_{i0}, \alpha) + O(\varepsilon^2)$$
$$C_i = c_{i0} - \frac{\varepsilon}{a^{(0)}(g_0, c_{i0}, \alpha)} d_i^{(0)}(g_0, c_{i0}, \alpha) + O(\varepsilon^2) \tag{5.4}$$

$$a^{(0)} = \varphi^{(0)\prime\prime}(0; g_0\, c_{i0}, \alpha), \qquad b^{(0)} = g^{(0)\prime}(0; g_0, c_{i0}, \alpha), \qquad d_i^{(0)} = c_i^{(0)\prime}(0, g_0, c_{i0}, \alpha) \tag{5.5}$$

Справедливость этой теоремы устанавливается непосредственной проверкой. Так как $\varepsilon = r_1^{1/2}\varphi_2'(0)$, где $r_1^{1/2} \approx 10^{-2}$ для всех кристаллических тел и $\varphi_1'(0) \leqslant 1$, то формулы (5.2) дают решение с точностью до 0.01% (см. работу [4], где для случая постоянных параметров в пограничном слое приводится численное решение при $\varepsilon \neq 0$).

Получим еще необходимое для дальнейшего выражение $c_i'(0)/g'(0)$. Если

$$\left|\sum_{k=1}^{N}(L_k-1)\frac{h_k}{h_{00}}c_k'\right| \ll 1 \tag{5.6}$$

то второй член в уравнении притока тепла (2.5) можно опустить (далее выясняется, в каких случаях неравенство (5.6) выполняется). Тогда при $\dot{\rho}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$ асимптотическое интегрирование уравнений диффузии и притока тепла с переменными коэффициентами l, $\rho_{00}\rho^{-1}$, S_i, σ с учетом граничных условий (5.1) дает [5]

$$\frac{c_i'(0)}{g'(0)} = \frac{c_{ie}-c_{i0}}{1-g_0}\,\frac{S_{i0}}{\sigma}\,\frac{\omega(\infty;\sigma,\alpha)}{\omega(\infty;S,\alpha)} \approx \frac{c_{ie}-c_{i0}}{1-g_0}\left(\frac{S_{i0}}{\sigma_0}\right)^{1/3}\left(\frac{\alpha e_2^{(S)}+\varepsilon e_1^{(S)}+{}^1/_2\, a}{\alpha e_2^{(\sigma)}+\varepsilon e_1^{(\sigma)}+{}^1/_2\, a}\right)^{1/3} \tag{5.7}$$

где

$$\omega(\infty,\sigma,\alpha) = \int_0^\infty \sigma l^{-1}\exp\left(-n\int_0^\eta \sigma l^{-1}\varphi(\eta)\,d\eta\right)d\eta, \qquad a = \varphi''(0)$$

$$\sigma l^{-1} = \sigma_0(1+e_1^{(\sigma)}\eta+e_2^{(\sigma)}\eta^2+\ldots) \qquad S_i l^{-1} = S_{i0}\,(1+e_1^{(S_i)}\eta+e_2^{(S_i)}\eta^2+\ldots)$$

$$\varepsilon \approx 10^{-2}, \quad \alpha \approx 10^{-1}, \qquad a \approx 1, \qquad e_i^{(\sigma)} \approx e_i^{(S_i)} \qquad (i = 1,\ 2)$$

Здесь последнее равенство вытекает из слабой зависимости чисел σ и S_i от состава, поэтому третий множитель в (5.7) в степени $^1/_3$ близок к единице. Тогда приближенно

$$\frac{c_i'(0)}{g'(0)} = \frac{c_{ie}-c_{i0}}{1-g_0}\,L_0^{-1/3} \tag{5.8}$$

При $-0.3 < \alpha < 0$ и $0 < g_0 < 1$ формула (5.8) дает ошибку [5] не больше 2—3%. При $|\alpha| \approx 1$ можно пользоваться более точной формулой, полученной в работе [5] при $l \equiv 1$, $\rho_{00}\rho^{-1} = g$

$$\frac{c_i'(0)}{g'(0)} = \frac{c_{ie}-c_{i0}}{1-g_0}\,L_0^{-1/3} I$$

$$I = 1 + 0.506\left(\frac{6}{a^{(0)}n}\right)^{1/3}\left[\frac{g_0}{6a^{(0)}}\left(\frac{1}{\sigma_0^{1/3}}-\frac{1}{S_{i0}^{\ 1/3}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha n}{6}\left(\frac{1}{\sigma_0^{1/3}}-\frac{1}{S_{i0}^{\ 1/3}}\right)-\alpha n\left(\sigma_0^{2/3}-S_{i0}^{\ 2/3}\right)\right] \qquad (-\alpha \approx 1)$$

Заметим, что большие значения $|\alpha|$ соответствуют низкоэнтальпитным материалам [5]. Поэтому уточнение формулы (5.8) при больших $|\alpha|$ и переменных свойствах опускаем.

Фактически решение для нулевого приближения $(\varphi^{(0)}, g^{(0)}, c_i^{(0)})$ будет зависеть от конкретных физико-химических процессов, происходящих в пограничном слое. Изучим поэтому некоторые наиболее типичные случаи разрушения.

§ 6. Разрушение при низких температурах торможения. В этом случае диссоциацией воздуха можно пренебречь и рассматривать пограничный слой как бинарную смесь пара и воздуха с концентрациями c и $1-c$ при этом $S_i = S$, $L_i = L$ — слабые функции концентрации [5], если молекулярные веса компонент не сильно отличаются одна от другой. Поэтому будем считать S и L постоянными. При $c_{p_1} \approx c_{p_2}$ или числе L, близком к единице,

$$(L-1)\frac{h_1-h_2}{h_{00}} \leqslant 1 .$$

В этом случае сумму в третьем уравнении системы (2.5) можно опустить.

$$\frac{\rho_{00}}{\rho} = \frac{h}{h_{00}}\frac{c_{p_{00}}}{c_p}\frac{M_{00}}{M} \approx g \qquad (6.1)$$

Приближение (6.1) влияет главным образом на определение $\varphi''(0)$ и очень слабо на значение производной $g'(0)$, определяющей скорость разрушения. Точность в определении $\varphi''(0)$ влияет в первую очередь на точность определения толщины пленки расплава [4]. При этих предположениях аппроксимация численного решения системы (2.5) при граничных условиях (5.3), полученного для плоского случая ($n=1$) в работе [6] и для осесимметричного ($n=2$) в работе [5] при $\alpha \neq 0$ дает

при $n = 1$

$$a^{(0)} = \varphi^{(0)''}(0) = 1.233\,[1-0.50\,(1-G)] + 0.62\,\alpha + 0.12\,\alpha^2$$

$$l \equiv 1, \qquad 0.7 \leqslant \sigma \leqslant 1$$

$$a^{(0)} = \varphi^{(0)''}(0) = 1.21\,l_0^{0.6} + 0.62\,\alpha + 0.12\,\alpha^2, \qquad l \not\equiv 1$$

$$0.2 < G < 0.8, \qquad 0.7 \leqslant \sigma \leqslant 1$$

$$b^{(0)} = g^{(0)'}(0) = (1-G)\,(0.496\,l_0^{0.44} + 0.47\,\alpha + 0.10\,\alpha^2), \qquad \sigma = 0.7$$

$$b^{(0)} = g^{(0)'}(0) = (1-G)\,(0.570\,l_0^{0.44} + 0.66\,\alpha + 0.20\,\alpha^2), \qquad \sigma = 1 \qquad (6.2)$$

при $n = 2$

$$a^{(0)} = \varphi^{(0)''}(0) = 1.312\,[1-0.376\,(1-G)] + 1.207\,\alpha + 0.386\,\alpha^2$$

$$l \equiv 1, \qquad -\alpha < 0.8, \qquad G > 0.2, \qquad 0.7 \leqslant \sigma \leqslant 1$$

$$a^{(0)} = \varphi^{(0)''}(0) = 1.02\,l_0^{0.6} + 1.207\,\alpha + 0.386\,\alpha^2, \qquad l \not\equiv 1$$

$$0.2 < G < 0.8, \qquad 0.7 \leqslant \sigma \leqslant 1$$

$$b^{(0)} = g^{(0)'}(0) = (1-G)\,(0.665\,l_0^{0.4} + 0.938\,\alpha + 0.328\,\alpha^2), \qquad \sigma = 0.7 \qquad (6.3)$$

$$b^{(0)} = g^{(0)'}(0) = (1-G)\,[0.765\,l_0^{0.4} + 1.358\,\alpha + 0.688\,\alpha^2), \qquad \sigma = 1$$

Формулы (6.2), (6.3) получены при предположении, что вязкость вычислялась по формуле Сюзерленда для однородной жидкости. Для $s = S^\circ / T_{00} = 0.2$, 0.0625, 0.02, $G \geqslant 0.5$ (S° — постоянная Сюзерленда) и $s = 0.2$, $G \geqslant 0.2$ отклонение интерполяционных формул (6.2), (6.3) от численных результатов не превосходит 3—4%. При $-\alpha \approx 1$ и $G \approx 0.1$ ошибка может достигать 10%. Однако этот случай практически недостижим. Заметим, что значение $g^{(0)'}(0)$, вычисленное для случая равновесной диссоциации при $L=1$ и $\alpha = 0$, в работе [7], совпадает с формулой (6.3). Это обстоятельство указывает на тот факт, что характер изменения функции l поперек пограничного слоя слабо влияет на $g^{(0)\prime}(0)$ и $g^{(0)\prime}(0)$ определяется практически значением функции l на внешней границе пограничного слоя. Но тогда можно пользоваться формулами (6.2), (6.3) и для бинарного пограничного слоя, вычисляя l_0 для бинарной смеси по формулам, приведенным в работе [5]. Условия сохранения массы, импульса и энергии на фронте испарения (2.9) и на фронте плавления (2.10) с использованием результатов § 3—5 дают систему пяти трансцендентных уравнений для определения пяти неизвестных параметров c_0, $t_1(g_0)$, α, η_1^*, ε:

$$n\alpha = -\frac{c_0}{1-c_0}\frac{I}{S_0 L_0^{1/3}}\frac{b}{1-g_0}$$

$$a^{(0)}(G, C, \alpha) - \varepsilon\left[n\alpha + \left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0 + \frac{\rho_{00}}{\rho_0 a^{(0)}(g_0, c_0, \alpha)}\right] = l_0^{1/2} r_1^{-1/4} n_1^{-1/2} M_1(t_1)\, a_1(\varepsilon, \alpha, \eta_1^*)$$

$$-\frac{D_1^*}{r_2} = -n\varphi_1(-\eta_1^*, \varepsilon, \alpha) = \frac{n_1^{1/2} r_1^{3/4}}{l_0^{1/2}\sigma_0}\frac{h_{00}}{\Delta} bE \exp\left(-n\sigma_1\int_0^{-\eta_1^*}\varphi_1(\eta_1)\,d\eta_1\right) \tag{6.4}$$

$$t_1 = 1 - \frac{\sigma_1 n_1^{1/2} r_1^{3/4}}{\sigma_0 l_0^{1/2}}\frac{h_{00}}{c_1^* T_1^*}\omega_1(-\eta_1^*, \sigma_1)\, bE, \quad f(c_0, T_0) = 0$$

где

$$b = b^{(0)}(G, C, \alpha) - \frac{\varepsilon\, b^{(0)}(g_0, c_0, \alpha)}{a^{(0)}(g_0, c_0, \alpha)}\left[\sigma_0 n\alpha + \left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0\right], \quad c_e = 0$$

$$E = 1 - \left[(L_0^{2/3} - L_0^{-1/3})\frac{h_{10}-h_{20}}{h_{00}-h_0} c_0 I\right] - \frac{c_0}{1-c_0}\frac{\delta_0(T_0) + (1-c_0)(h_{20}-h_{10})}{h_{00}-h_0} L_0^{2/3} I \tag{6.5}$$

$$\delta_0(T_0) = h_{10} - h^{(1)}, \qquad \alpha = \varphi(0), \qquad \varepsilon = \varphi(0)$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{P-1}\delta_k + \sum_{k=2}^{P} c_k^* T_k^* \left[Q_k(t_k) - Q_k(1)\right]$$

а параметры G и C определяются из формул (5.4). В выражении для E учитывается член в квадратных скобках, что в некоторой степени компенсирует приближение (5.6), т. е. эффект диффузионных теплоемкостей учитывается в краевых условиях и опускается в уравнении притока тепла. Множитель справа в третьем уравнении системы (6.4)

$$\exp\left(-n\sigma_1\int_0^{-\eta_1^*}\varphi_1(\eta_1)\,d\eta_1\right) = \frac{\theta_1'(-\eta_1^*)}{\theta_1'(0)} = \frac{\lambda_1\,\partial T_1/\partial y\,|_{y=Dt-s_1}}{\lambda_1\,\partial T_1/\partial y\,|_{y=Dt}} < 1$$

дает защитный эффект пленки расплава, выражающийся в уносе тепла текущей пленкой расплава.

Скорость разрушения уменьшается с ростом числа Прандтля жидкой фазы примерно по экспоненциальному закону $D_1 = exp(-k\sigma_1)$, при этом k медленно меняющаяся функция остальных параметров. Так как $n_1^{1/2}\, r_1^{3/4} \approx 10^{-2} \div 10^{-1}$, то при $\sigma_1 < 1$, как следует из предпоследнего уравнения системы (6.4), температура на внешней стороне пленки расплава близка к температуре плавления. При $\sigma_1 \gg 1$ температура испарения может значительно превысить температуру плавления и в этом случае защитный эффект пленки расплава значительно повышается.

Система (6.4) легко решается методом последовательных приближений. Действительно, из четвертого уравнения следует $t_1 \approx 1$. Тогда из уравнения кривой упругости пара находим c_0 и затем из первого уравнения при $\varepsilon = 0$ определяем α. Из второго и третьего уравнений находим ε и η_1^*. Затем процесс повторяется в том же порядке. Процесс последовательных приближений может быть также начат с одного из предельных случаев (только плавление или только сублимация), рассмотренных ниже. После решения системы (6.4) скорость разрушения определится из третьего уравнения, распределение температуры и положение фронтов перехода в твердой фазе определяется после этого из (3.3) — (3.4).

В предельном случае чистого плавления поверхность пленки является контактной поверхностью разрыва и это дает: $\varphi(0) = \varphi_1(0) = 0$.

Для оставшихся неизвестных трех параметров ε, η_1^*, t_1 получим вместо (6.4) систему трех уравнений

$$a^{(0)}(G) - \varepsilon\left[\left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0 + \frac{\rho_{c0}}{\rho_0 a^{(0)}(g_0)}\right] = l_0^{1/2} r_1^{-1/4} n_1^{-1/2} M_1(t_1)\, a_1(\varepsilon, \eta_1^*)$$

$$-\frac{D_1^*}{r_2} = -n\varphi_1(-\eta_1^*, \varepsilon) = \frac{n_1^{1/2} r_1^{3/4}}{l_0^{1/2}\sigma_0}\frac{h_{00}}{\Delta}\left[b^{(0)}(G) - \frac{\varepsilon b^{(0)}(g_0)}{a^{(0)}(g_0)}\left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0\right]\times$$

$$\times \exp\left(-n\sigma_1\int\limits_0^{-\eta_1^*}\varphi_1(\eta_1)\,d\eta_1\right) \qquad (6.6)$$

$$t_1 = 1 - \frac{\sigma_1 n_1^{1/2} r_1^{1/4}}{\sigma_0 l_0^{1/2}}\frac{h_{00}}{c_1^* T_1}\,\omega_1(-\eta_1^*, \sigma_1)\left[b^{(0)}(G) - \frac{\varepsilon b^{(0)}(g_0)}{a^{(0)}(g_0)}\left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0\right]$$

Если пренебречь теплом, уносимым пленкой ($\sigma_1 < 1$) и положить $\varepsilon = 0$, то из второго уравнения системы (6.6) получим приближение формулы для массовой скорости оплавления в виде

$$-\rho_2 D = \dot m = 0.570\sqrt{\beta\mu_0\rho_0}\,\frac{l_0^{0.44}}{\sigma_0^{0.6}}\frac{h_{00}-h_0}{\Lambda} \qquad (n=1)$$

$$-\rho_2 D = \dot m = 0.765\sqrt{\beta\mu_0\rho_0}\,\frac{l_0^{0.4}}{\sigma_0^{0.6}}\frac{h_{00}-h_0}{\Delta} \qquad (n=2) \qquad (6.7)$$

где значения параметров с индексом 0 должны вычисляться при температуре плавления. Эти формулы дают завышение для скорости оплавления, не превосходящее 5%, при $\sigma_1 < 1$. Ошибка уменьшается при $\sigma_1 \to 0$; при $\sigma_1 > 1$ необходимо решение полной системы (6.6). При $l \equiv 1$ вместо (6.7) получены [4] более точные асимптотические формулы, справедливые при $\sigma > 0.4$.

Второй предельный случай чистой сублимации ($\varepsilon = \eta_1^* = 0$) будет сводиться к решению трех уравнений для трех неизвестных α, c_0 и T_0

$$n\alpha = -\frac{c_0}{1-c_0}\frac{I}{S_0 L_0^{1/3}}(pl_0^q + r\alpha + s\alpha^2)$$

$$\left[1 - (L_0^{2/3} - L_0^{-1/3})\frac{h_{10}-h_{20}}{h_{00}-h_0}c_0 I\right]\frac{h_{00}-h_0}{L_1(T_0)} = L_0^{2/3} I\,\frac{c_0}{1-c_0}, \qquad f(c_0, T_0) = 0 \qquad (6.8)$$

$$L_1(T_0) = \delta_0(T_0) + \sum_{k=2}^{P-1}\delta_k + \sum_{k=2}^{P} c_k^* T_k^*\,[Q_k(t_k) - Q_k(1)] \qquad (6.9)$$

где p, q, r, s — числа, входящие в формулы (6.2), (6.3) для $g^{(0)\prime}(0)$. Полагая в первом приближении $I = 1$, из двух последних уравнений системы (6.8) находим c_0 и T_0. Затем из первого уравнения определяем α. Повторяя этот процесс с $I \neq 1$, получим второе приближение и т. д. После решения системы (6.8) массовая скорость сублимации определится из формулы

$$-\rho_2 D = \dot m = \sqrt{\beta\mu_0\rho_0}\left[1 - (L_0^{2/3} - L_0^{-1/3})\frac{h_{10}-h_{20}}{h_{00}-h_0}c_0 I\right]\times$$

$$\times\frac{h_{00}-h_0}{L_1(T_0)\sigma_0}(pl_0^q + r\alpha + s\alpha^2) \qquad (6.10)$$

Заметим, что множитель в квадратных скобках в (6.10) близок к единице.

§ 7. Разрушение в диссоциированном потоке воздуха. При высоких температурах торможения потока пограничный слой представляет собой многокомпонентную смесь продуктов диссоциации воздуха и паров тела. В первом приближении будем считать такую смесь или как бинарную, состоящую из атомов воздуха и молекул воздуха и паров, если диаметры столкновений, постоянные сил взаимодействия и молекулярные веса молекул воздуха и паров близки, или как трехкомпонентную смесь атомов молекул воздуха и частиц тела, если максвелловские диффузионные коэффициенты компонент близки. В дальнейшем будем рассматривать второй случай, как более общий, и обозначать через индекс i пар. Предположим, что поверхность пленки расплава — идеальный катализатор для рекомбинации атомов воздуха.

Большинство практически интересных материалов (кроме пирекса) имеют полностью каталитическую поверхность по крайней мере при температуре стенки ниже предела диссоциации. Тогда, как показано на основании численных расчетов в работе [7], тепловой поток к поверхности практически не зависит от того, достигается ли равновесие в результате бесконечно большой скорости гомогенных или гетерогенных реакций, т. е. предположение бесконечно большой скорости гетерогенных реакций компенсирует предположение о замороженности гомогенных реакций.

Тогда уравнение притока тепла (2.5) можно преобразовать к виду

$$(l\sigma^{-1}g^{*1})' + n\varphi g^{*\prime} = 0, \quad g^* = \frac{h^*}{h_{00}^*}, \quad h^* = \sum_{k=1}^{N} c_k h_k^*, \quad h_i^* = \int_0^T c_{pi}\, dT \tag{7.1}$$

Так как при высоких температурах торможения теплоемкости атомов близки к теплоемкостям молекул воздуха [8,9] и паров, если молекулярный вес пара не сильно отличается от молекулярного веса молекул воздуха, то

$$\left| \sum_{k=1}^{N} (L_k^{-1} - 1) \frac{h_k^*}{h_{00}^*} c_k' \right| \ll 1, \qquad h_{00}^* = \sum_{k=1}^{N} c_{ke} h_{k00}^*$$

Левая часть условия сохранения энергии (2.9) преобразуется согласно этому замечанию к виду

$$h_{00} g'(0) + \sum_{k=1}^{N} (L_0 - 1) h_{k0} c_k'(0) - L_0 \frac{h_0 - h^{(1)}}{c_{i0} - c_{if}} c_i'(0) =$$

$$= h'(0) + L_0 \sum_{k=1}^{N} h_{k0} c_k'(0) + L_0 \left[\sum_{j \neq i}^{N} h_{j0} c_{j0} + h_{i0}(c_{i0} - 1) + \delta_0 \right] \frac{c_i'(0)}{1 - c_{i0}} =$$

$$= \frac{\sigma}{\omega(\infty, \sigma, \alpha)} \left(h_{00}^* - h_0^* + h^\circ L_0^{2/3} I - \delta_0 L_0^{2/3} I \frac{c_{i0}}{1 - c_{i0}} \right) = \frac{g^{*\prime}(0)\, \Delta h}{1 - g_0^*} E_d \tag{7.2}$$

где

$$h^\circ = \sum_{k=1}^{N} h_{k0}(c_{ke} - c_{k0}) + \left[h_{i0}(1 - c_{i0}) - \sum_{j \neq i}^{N} h_{j0} c_{j0} \right] \frac{c_{i0}}{1 - c_{i0}} =$$

$$= \sum_{k \neq i}^{N} h_{k0} \left(c_{ke} - \frac{c_{k0}}{1 - c_{i0}} \right)$$

$$E_d = 1 + (L_0^{2/3} I - 1) \frac{h^\circ}{\Delta h} - \frac{\delta_0(T_0)}{\Delta h} \frac{c_{i0}}{1 - c_{i0}} L_0^{2/3} I \tag{7.3}$$

$$\Delta h = h_{00}^* + h^\circ - h_0^*, \qquad \delta_0(T_0) = h_i - h^{(1)}, \qquad c_{ie} = 0, \qquad c_{if} = 1$$

Аналогичное упрощающее соображение о замороженности гомогенных реакций и идеальной каталитичности стенки использовалось ранее в работе [10] при изучении теплопередачи в окрестности критической точки. Однако отношение $c_i'(0)/g'(0)$ вычислялось в этой работе на основании решения уравнения Блазиуса для пластины при $\alpha = 0$ и $I \equiv 1$. Множитель I в выражении для E_d уточняет формулу для теплового потока (7.2) и делает ее практически совпадающей с численным решением работы [7] при $\alpha = 0$. Решение задачи в этом случае будет сводиться к решению системы пяти трансцендентных уравнений

$$n\alpha = -\frac{c_{i0}}{1-c_{i0}} \frac{Ig^{*\prime}(0)}{S_0 L_0^{1/3}(1-g_0^*)}$$

$$a^{(0)}(G^*, c, \alpha) - \varepsilon\left[n\alpha + \left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0 + \frac{\rho_{00}}{\rho_0 a^{(0)}(g_0^*, c_0, \alpha)}\right] =$$

$$= l_0^{1/2} r_1^{-1/4} n_1^{-1/2} M_1(t_1)\, a_1(\varepsilon, \alpha, \eta_1^*)$$

$$-\frac{D_1^*}{r_2} = -n\varphi_1(-\eta_1^*, \varepsilon, \alpha) = \frac{n_1^{1/2} r_1^{3/4}}{l_0^{1/2}\sigma_0} \frac{\Delta h}{\Delta} \frac{E_d g^{*\prime}(0)}{1-g_0^*} \qquad (7.4)$$

$$t_1 = 1 - \frac{\sigma_1 n_1^{1/2} r_1^{3/4}}{\sigma_0 l_0^{1/2}} \frac{\Delta h}{c_1^* T_1^*} \frac{E_d g^{*\prime}(0)}{1-g_0^*}\, \omega_1(-\eta_1^*, \sigma_1), \qquad f(c_0, T_0) = 0$$

$$g^{*\prime\prime}(0) = b^{(0)}(G^*, C, \alpha) - \frac{\varepsilon b^{(0)}(g_0^*, c_0, \alpha)}{a^{(0)}(g_0^*, c_0, \alpha)}\left[\sigma_0 n\alpha + \left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0\right]$$

$$G^* = g_0^* - \frac{\varepsilon b^{(0)}(g_0^*, c_0, \alpha)}{a^{(0)}(g_0^*, c_0, \alpha)}$$

для определения пяти параметров c_{i0}, t_1, α, η_1^*, ε. Эта система решается аналогично системе (6.4).

В предельном случае плавления без испарения в диссоциированном потоке воздуха система (7.4) сводится к решению трех уравнений для трех неизвестных ε, η_1^*, t_1

$$a^{(0)}(G^*) - \varepsilon\left[\left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0 + \frac{\rho_{00}}{\rho_0 a^{(0)}(g_0^*)}\right] = l_0^{1/2} r_1^{-1/4} n_1^{-1/2} M_1(t_1)\, a_1(\varepsilon, \eta_1^*)$$

$$-\frac{D_1^*}{r_2} = -n\varphi_1(-\eta_1^*, \varepsilon) = \frac{n_1^{1/2} r_1^{3/4}}{l_0^{1/2}\sigma_0} \frac{h_{00}-h_0^*}{\Delta} \frac{g^{*\prime}(0)}{1-g_0^*}\left[1 + (L_0^{2/3} I - 1)\frac{h_d}{h_{00}-h_0^*}\right] \times$$

$$\times \exp\left(-n\sigma_1 \int_0^{-\eta_1^*} \varphi_1(\eta_1)\, d\eta_1\right) \qquad (7.5)$$

$$t_1 = 1 - \frac{\sigma_1 n_1^{1/2} r_1^{3/4}}{\sigma_0 l_0^{1/2}} \frac{h_{00}-h_0^*}{c_1^* T_1^*} \frac{g^{*\prime}(0)}{1-g_0^*}\left[1 + (L_0^{2/3} I - 1)\frac{h_d}{h_{00}-h_0^*}\right]\omega_1(-\eta_1^*, \sigma_2)$$

$$h_d = h^\circ = \sum_{k\neq i}^{N} h_{k0}(c_{ke} - c_{k0}) = \sum_{k=\mathrm{O},\,\mathrm{N}} c_{ke} h_k^\circ$$

$$g^{*\prime}(0) = b(G^*, C) - \frac{\varepsilon b^{(0)}(g_0^*)}{a^{(0)}(g_0^*)}\left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0$$

где h_i° — энтальпия образования i-й компоненты, O — кислород, N — азот.

При $\sigma_1 < 1$ из второго уравнения системы (7.5) получаем для массовой скорости оплавления в диссоциированном потоке воздуха следующие приближенные формулы: (7.6)

$$-\rho_2 D = \dot{m} = 0.570 \sqrt{\beta\mu_0\rho_0}\, \frac{l_0^{0.44}}{\sigma_0^{0.6}} \frac{h_{00} - h_0^*}{\Delta} \left[1 + (L^{2/3} - 1) \frac{h_d}{h_{00} - h_0^*}\right] \quad (n = 1)$$

$$-\rho_2 D = \dot{m} = 0.765 \sqrt{\beta\mu_0\rho_0}\, \frac{l_0^{0.4}}{\sigma_0^{0.6}} \frac{h_{00} - h_0^*}{\Delta} \left[1 + (L^{2/3} - 1) \frac{h_d}{h_{00} - h_0^*}\right] \quad (n = 2)$$

При $\sigma_1 > 1$ необходимо решение полной системы (7.5). В предельном случае чистой сублимации ($\varepsilon = \eta_1^* = 0$) задача сводится к решению системы следующих трех уравнений:

$$n\alpha = -\frac{c_{i0}}{1 - c_{i0}} \frac{I}{S_0 L_0^{1/3}} (p l_0^q + r\alpha + s\alpha^2)$$

$$\frac{\Delta h}{L_2(T_0)} \left[1 + (L_0^{2/3} I - 1) \frac{h^\circ}{\Delta h}\right] = I L_0^{2/3} \frac{c_{i0}}{1 - c_{i0}}, \quad f(c_{i0}, T_0) = 0 \qquad (7.7)$$

$$L_2(T_0) = \delta_0(T_0) + \sum_{k=2}^{P-1} \delta_k + \sum_{k=1}^{P} c_k^* T_k^* [Q_k(t_k) - Q_k(1)]$$

для трех неизвестных c_{i0}, T_0, α, которая решается аналогично системе (6.8). Параметры p, q, r, s — коэффициенты в формулах (6.2), (6.3) для $g^{(0)\prime}(0)$. Массовая скорость сублимации определится из выражения

$$-\rho_2 D = \dot{m} = \sqrt{\beta\mu_0\rho_0} \left[1 + (L_0^{2/3} I - 1) \frac{h^\circ}{\Delta h}\right] \frac{\Delta h}{L_2(T_0)} (p l_0^q + r\alpha + s\alpha^2) \qquad (7.8)$$

Замечания 7.1. Полученное решение можно обобщить на случай гетерогенных химических реакций между продуктами испарения и диссоциированным воздухом. Для этого условия равновесного испарения $f(c_{i0}, T_0) = 0$ необходимо заменить неравновесным условием Кнудсена — Ленгмюра [5] и в выражение для h^0 ввести теплоты возможных реакций.

7.2. Из системы (7.4) при условии неравновесного испарения легко получить условия кипения пленки расплава аналогично тому, как это сделано в работе [5]. Ошибочные условия кипения получены в работе Робертса [1]. При выводе этих условий автор исходил из предположения равновесности испарения. Но при этом предположении, как следует, например, из системы (7.7), кипение ($c_{i0} = 1$) может достигнуть только при бесконечно больших тепловых потоках со стороны газа.

7.3. Из систем (6.8) и (7.7) при малых α, пренебрегая членом $s\alpha^2$, можно получить приближенные формулы для массовой скорости уноса $\rho_2 D$ через определяющие параметры задачи.

Поступила 24 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Roberts L. Stagnation — point shieldings by melting and vaporization. 1959, NASA TR R — 10.
2. Тирский Г. А. Условия на поверхностях сильного разрыва в многокомпонентных смесях. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
3. Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., ГИТТЛ, 1953.
4. Тирский Г. А. Оплавление тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке газа. Вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. I, № 3.
5. Тирский Г. А. Сублимация тупого тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке смеси газа. Вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. I, № 5.
6. Beckwith I. Similar solutions for the compressible boundary layer on a yawed cylinder with transpiration cooling. 1958, NACA T N 4345.
7. Fay J. A. and Riddell F. R. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air. Journ. aero. sci., 1958, vol. 25, No. 2.
8. Хиршфелдер Дж. Сб. Проблема движения головной части ракет дальнего действия. ИИЛ, 1959, стр. 343—364.
9. Lighthill M. Dynamics of dissociating gas — part I, equilibrium flow. 1957. vol. 2, pt. 1, 1—32.
10. Lees L. Laminar heat transfer over blunt — nosed bodies at hypersonic flight speeds. Jet Propulsion, 1956, v. 26, No. 4.