

## О вычислении турбулентной скорости трения в численной модели городского острова тепла в устойчиво стратифицированной атмосфере

Л.И. Курбацкая<sup>1</sup>, А.Ф. Курбацкий<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН  
630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6

<sup>2</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН  
630090, г. Новосибирск, ул. Институтская, 4/1

Поступила в редакцию 7.01.2016 г.

Анализируются параметризации турбулентной скорости трения  $u_*$  в численной модели городского острова тепла малого относительного удлинения в устойчиво стратифицированной покоящейся среде с теплофизической неоднородностью подстилающей поверхности: неустойчивая стратификация над локализованным поверхностным источником тепла и устойчивая стратификация вне его. Представлены результаты вычисления  $u_*$  по безытерационным алгоритмам Louis и Paulson для квазиустановившегося состояния циркуляции над городским островом тепла.

**Ключевые слова:** турбулентность, планетарный пограничный слой, городской остров тепла, крупномасштабная циркуляция, численное моделирование; turbulence, planetary boundary layer, urban heat island, large-scale circulation, numerical modeling.

### Введение

Циркуляция воздуха над городским островом тепла генерируется за счет энергии антропогенных источников в пределах городской черты. Такая циркуляция наиболее интенсивна в ночное время при ясном небе и слабом окружающем ветре. Фундаментальными характеристиками, отражающими структуру ночного городского острова тепла, являются распределения полей скорости и температуры, а также интенсивностей турбулентности. Вертикальный турбулентный тепловой факел от локализованного источника (острова тепла) и связанная с ним циркуляция развиваются вследствие различия температуры между островом тепла и его окружением, которое имеет более низкую температуру (рис. 1).

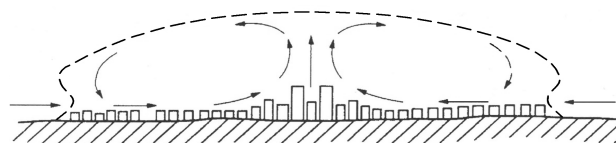


Рис. 1. Модель циркуляции над городским островом тепла в устойчиво стратифицированной атмосфере при слабом ветре

Вследствие значительного уменьшения линейного масштаба в лабораторном моделировании по

сравнению с прототипом трудно разрешить структуру течения во всем диапазоне высот — от поверхности до верхней границы факела. Характерное число Рейнольдса моделируемого течения на несколько порядков меньше, чем для прототипа. Поэтому лабораторное моделирование [1] ограничивается воспроизведением крупномасштабной циркуляции над островом тепла внутри городского пограничного слоя; процессы в вязком подслое не разрешаются. Однако при слабом ветре турбулентное движение в центре городского острова тепла доминирует за счет работы флуктуирующей силы плавучести. Механическое же воздействие городской шероховатости и сдвига ветра менее важно.

### Параметризации турбулентной скорости трения

Численная модель городского острова тепла сформулирована в [2] с учетом отмеченных выше ограничений в лабораторном моделировании. В RANS-приближении для турбулентных потоков импульса и тепла записываются аппроксимации градиентной диффузии, зависящие от трех параметров: кинетической энергии турбулентности, скорости ее спектрального расходования (диссипации) и дисперсии турбулентных температурных флуктуаций. Эти параметры определяются из решения замкнутых дифференциальных уравнений баланса.

В настоящем кратком сообщении анализируются параметры [3, 4] вычисления характерного

\* Людмила Ивановна Курбацкая; Альберт Феликсович Курбацкий (albert.kurbat@yandex.ru).

турбулентного масштаба скорости трения  $u_*$  на основе теории подобия Монина—Обухова для приземного слоя планетарного пограничного слоя [5].

Следуя лабораторному эксперименту развития турбулентного теплового факела над городским островом тепла (см. рис. 1), численная модель реализовывалась в осесимметричной постановке [2]. В начальный момент времени окружающая среда (вода в лабораторном эксперименте [1]) находится в состоянии покоя и термически устойчиво стратифицирована. Скорость трения  $u_*$  была оценена из данных лабораторных измерений. В согласии с результатами лабораторного эксперимента в [2] численно моделируется крупномасштабная проникающая конвекция над островом тепла без разрешения течения в вязком подслое.

Граничные условия для вторых моментов поля скорости и температуры кинетической энергии турбулентности  $E = (1/2)u_i u_i$ , скорости ее диссипации  $\varepsilon$  и дисперсии флуктуаций температуры  $\theta^2$ , определяемых замкнутыми уравнениями баланса (здесь не приводятся), формулируются на первом расчетном слое от поверхности ( $z = z_1$ ) с учетом условий термической устойчивости среды отдельно для областей неустойчивой стратификации (над источником тепла) и устойчивой стратификации среды (вне источника тепла).

Для неустойчивой стратификации граничные значения для  $E$ ,  $\varepsilon$  над источником тепла (протяженностью на поверхности в интервале  $0 \leq r/D \leq 0,5$  ( $r$  — радиальная координата;  $D$  — диаметр поверхностного источника тепла)) имеют вид [6]:

$$E_1 = u_*^2 \left[ \left( 7 + 0,52 \frac{z_i}{|L|} \right)^{2/3} + 0,85 \left( 1 + 3 \frac{z_1}{|L|} \right)^{2/3} \right], \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{u_*^2}{kz_1} \left[ 1 + 0,5 \left( z_i / |L| \right)^{2/3} \right]^{3/2}. \quad (2)$$

В (1), (2)  $z_i$  — высота слоя инверсии;  $L = u_*^3 c_p \rho / (k \beta g H_0)$  — масштаб Обухова,  $k \approx 0,40$  — постоянная Кармана,  $u_*$  — турбулентная скорость трения,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\beta$  — коэффициент объемного расширения среды,  $H_0$  — постоянный поток тепла от поверхностного источника [1]. Масштаб Обухова  $L = -u_*^3 / (\beta g k \cdot \overline{w\theta})$  ( $w$  — вертикальная турбулентная скорость) определяет высоту, выше которой доминирующим механизмом генерации кинетической энергии турбулентности (КЭТ) является работа флуктуирующей силы плавучести, а порождение КЭТ сдвигом скорости мало.

В стратифицированном турбулентном течении вблизи плоской поверхности безразмерный градиент скорости согласно теории подобия Монина—Обухова является универсальной функцией безразмерного параметра устойчивости  $z/L$  или градиентного числа Ричардсона  $Ri = g\beta[(\partial T/\partial z)/(\partial U/\partial z)^2]$ :

$$\Phi_m = \frac{kz}{u_*} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $\Phi_m$  есть функция безразмерных параметров  $z/L$  или  $Ri$ ;  $T$  — температура;  $U$  — средняя радиальная скорость среды.

Аналитическая аппроксимация корректирующей функции  $\Phi_m = \Phi_m(z/L)$  Businger—Dyer [7, 8] при нахождении поверхностного потока импульса  $u_*$  в численной метеорологической модели требует проведения итераций, поскольку масштаб Обухова  $L$  зависит от  $u_*$ .

В [3] для вычисления поверхностных турбулентных потоков импульса  $u_*$  и тепла  $\theta_*$  на основе теории подобия Монина—Обухова предложен безытерационный алгоритм. Вычисление турбулентного масштаба поля температуры  $\theta_*$  можно найти в [3].

В предположении справедливости логарифмического профиля скорости (3) масштаб Обухова  $L$  может быть представлен неявно зависящим от объемного числа Ричардсона

$$Ri_B = \beta g z (\Delta T / U^2). \quad (4)$$

Здесь  $\Delta T$  — разность между температурой на заданной высоте  $z$  и температурой поверхности. Тогда формально

$$u_*^2 = C_{D_0} U^2 F_m(Ri_B, z/z_0). \quad (5)$$

Форма функции  $F_m$  должна быть совместимой с логарифмическим профилем скорости  $U/u_* = (1/k) \times \ln(z/z_0)$ :  $F_m(Ri_B \rightarrow 0, z/z_0) = 1$  есть необходимое требование, и  $C_{D_0} (= u_*^2/U^2) = k^2 / [\ln(z/z_0)]^2$  представляет коэффициент трения для нейтральных условий ( $z_0$  — параметр шероховатости поверхности).

Для функции  $F_m$  в [3] получены аналитические аппроксимации:

в случае неустойчивой стратификации ( $Ri_B < 0$ )

$$F_m^{(1)} = 1 - \frac{b_1 Ri_B}{1 + c |Ri_B|^{1/2}}, \quad (6)$$

а для устойчивой стратификации ( $Ri_B > 0$ )

$$F_m^{(2)} = 1 / (1 + b_2 Ri_B)^2. \quad (7)$$

В (6), (7) коэффициенты имеют значения:  $b_1 = 2b_2 = 9,4$ ;  $c = 7,4 C_{D_0} b_1 (z/z_0)^{1/2}$ .

Таким образом, турбулентная скорость трения  $u_*$  (на слое  $z = z_1$ ) может быть вычислена по формуле (5) с  $F_m^{(1)}$  над источником тепла ( $0 < r/D \leq 0,5$ ) и с  $F_m^{(2)}$  — вне источника тепла ( $0,5 < (r/D) \leq 1,5$ ). Вне поверхностного источника тепла ( $0,5 < r/D \leq 1,5$ ) граничные значения для КЭТ и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  имеют вид [9, 10]:

$$E_1 = c_\mu^{-1/2} u_*^2, \quad (8)$$

$$\varepsilon_1 = [u_*^3 / k z_1] (1 + 4z_1/L). \quad (9)$$

Вычисления  $u_*$  по формулам (5)–(7) показаны на рис. 2 для квазиустановившегося состояния циркуляции над островом тепла, фиксируемого в лабораторном эксперименте [1]. Продольная скорость  $U(t, z, r)$  натекания среды с периферии на источник тепла (см. рис. 1) возрастает по абсолютной величине, достигая максимума при  $r/D \approx 0,25$  (рис. 3 в [2]). Такое же поведение имеет и скорость трения на рис. 2. Вне источника тепла скорость натекания с периферии мала, что определяет и малую величину скорости трения. Величина скорости трения (см. рис. 2) возрастает с увеличением параметра шероховатости  $z_0$ .

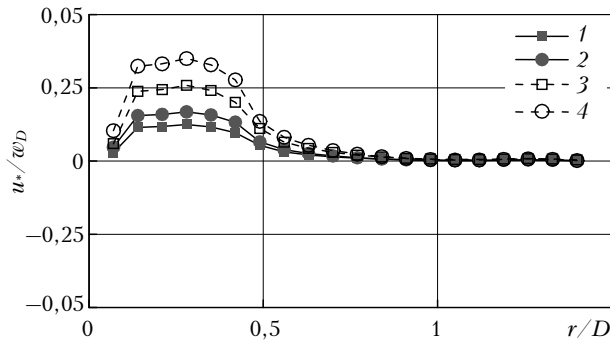


Рис. 2. Нормализованная скорость турбулентного трения на высоте  $z = z_1$  от поверхности для квазиустановившейся циркуляции над островом тепла. Символы – вычисление с параметризацией Льюиса: 1, 3 – скорость трения при нейтральной стратификации ( $Ri = 0$ ); 2, 4 – для параметра шероховатости  $z_0 = 0,001$  см [11] (поверхность нагревателя из алюминия [11]); открытыми символами (3 и 4) показаны те же результаты для параметра шероховатости  $z_0 = 0,01$  см;  $w_D$  – характерный масштаб для горизонтальной (радиальной) скорости [1]

Параметризация Paulson [4] для неустойчивой стратификации ( $Ri < 0$ ), как и параметризация Louis [3], основана на теории подобия Момина–Обухова. Безразмерный градиент скорости (3) может быть проинтегрирован в форме

$$U = \frac{u_*}{k} [\ln(z/z_0) - \psi_m], \quad (10)$$

где функция коррекции

$$\psi_m = \int_0^\zeta \frac{1 - \Phi_m(\zeta')}{\zeta'} d\zeta', \quad \zeta = z/L. \quad (11)$$

Согласно [4] функция  $\psi_m$  для неустойчивой стратификации параметризуется выражением

$$\psi_m = -4Ri / [1 - 4Ri], \quad (12)$$

и скорость турбулентного трения вычисляется (на слое  $z = z_1$ ) согласно (10) и (11) по формуле

$$u_* = \frac{kU_1}{[\ln(z_1/z_0) + 4Ri/(1 - 4Ri)]} \quad (Ri < 0). \quad (13)$$

Функция  $\Phi_m$  в (11) для условий устойчивой стратификации линейно изменяется с параметром устойчивости [7, 8]:

$$\Phi_m = 1 + 4,7(z/L). \quad (14)$$

Интегрирование (11) с учетом (14) и гипотезы  $Ri = z/L$  [4] дает

$$\psi_m = -4,7Ri \quad (Ri > 0). \quad (15)$$

Таким образом, вне источника тепла ( $0,5 < r/D \leq 1,5$ ) скорость турбулентного трения вычисляется (на слое  $z = z_1$ ) согласно (10) и (15) по формуле

$$u_* = \frac{kU_1}{[\ln(z_1/z_0) + 4,7Ri]} \quad (Ri > 0). \quad (16)$$

Параметризация Paulson, будучи основанной на теории подобия Момина–Обухова и эмпирических данных, как и параметризация Louis, приводит к тем же результатам вычисления турбулентной скорости трения  $u_*$ , показанным на рис. 2. Можно заметить, что параметризация Louis [3] широко используется в метеорологических численных моделях.

## Заключение

Для модели городского острова тепла в RANS-приближении второго порядка моделирования турбулентности [2] верифицированы безытерационные алгоритмы [3, 4] вычисления переменной вдоль поверхности скорости трения как параметра в граничных условиях для средней скорости течения, кинетической энергии турбулентности, скорости ее диссипации и дисперсии температуры. Обе параметризации, основанные на теории подобия Момина–Обухова, дают близкие результаты для распределения скорости трения вдоль поверхности.

Граничное условие для горизонтальной скорости при этом можно задать в разностном виде, используя два первых от поверхности расчетных узла вычислительной сетки. В этом случае функция коррекции устойчивости можно выразить только через число Ричардсона [4], что сохраняет безытерационность всего алгоритма задания поверхностных граничных условий.

1. Lu J., Arya P., Snyder W.H., Lawson R.E., Jr. A Laboratory Study of the Urban Heat Island in a Calm and Stably Stratified Environment. Part I and II // J. Appl. Meteorol. 1997. V. 36, N 10. P. 1377–1402.
2. Kurbatskii A.F. Computational Modeling of the Turbulent Penetrative Convection above the Urban Heat Island in a Stably Stratified Environment // J. Appl. Meteorol. 2001. V. 40, N 10. P. 1748–1761.
3. Louis J.-F. A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere // Bound.-Lay. Meteorol. 1979. V. 17, N 2. P. 187–202.
4. Paulson C.A. The Mathematical Representation of Wind Speed and Temperature Profiles in the Unstable Atmospheric Boundary Layer // J. Appl. Meteorol. 1970. V. 9. P. 857–861.

5. Монин А.С., Обухов А.М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Тр. Геофиз. ин-та АН СССР. № 24 (151). С. 163–187.
6. Panofsky Y.A., Tennekes Y., Lenschow D.Y., Wyngaard J.C. The characteristics of turbulent velocity components in the surface layer under convective conditions // Bound.-Lay. Meteorol. 1977. V. 11, N 3. P. 353–361.
7. Businger J.A., Wyngaard J.C., Izumi Y., Bradley E.F. Flux profile relationship in the atmospheric surface layer // J. Atmos. Sci. 1971. V. 28, N 2. P. 181–189.
8. Dyer A.J. A review of flux-profile relationships // Bound.-Lay. Meteorol. 1974. V. 7, N 3. P. 363–372.
9. Andre J.C., de Moor G., Laccarere F., Therry G., du Vachat R. Modeling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer // J. Atmos. Sci. 1979. V. 35, N 10. P. 1861–1885.
10. Duynkerke P.G. Application of the E-ε Turbulence Closure Model to the Neutral and Stable Atmospheric Boundary Layer // J. Atmos. Sci. 1988. V. 45, N 5. P. 865–879.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1969 г.

***L.I. Kurbatskaya, A.F. Kurbatskii. On the parametrization of the turbulent friction velocity for the mathematical heat-island model of the low-aspect-ratio in the stratified environment.***

We examine the parameterizations of a turbulent friction velocity  $u_*$  for the mathematical heat-island model of the low-aspect-ratio in the stratified environment. This study was performed to simulate the urban heat island in a calm stably stratified medium with the thermophysics inhomogeneity of the underlying surface: the unstable stratification over the localized surface heat source and the stable stratification out of it [1]. The numerical results of  $u_*$  are presented with the use of the Louis's and Paulson's non-iteration algorithms for the quasi-steady circulation over the urban heat island.