

## РАЗЛЕТ ПОДОГРЕВАЕМОЙ МАССЫ ГАЗА В РЕГУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ

*И. В. Немчинов*

(Москва)

Рассматривается движение заданной массы газа, в частицах которого выделяется энергия, причем интенсивность выделения энергии зависит от температуры и плотности степенным образом, а от времени — произвольным образом. Анализируется найденный ранее автором аналог решения Л. И. Седова задачи об адиабатическом разлете [1] — автомодельное решение, описывающее движение газа с подогревом в регулярном режиме [2], исследуется характер распределения параметров по частицам газа и во времени при различных показателях степени в законе тепловыделения. Обсуждается вопрос об установлении автомодельного решения, а также о его применимости к некоторым конкретным процессам газодинамического движения при наличии интенсивного подвода тепла.

§ 1. Рассмотрим задачу о неадиабатическом движении газа в случае, если интенсивность выделения энергии в частицах  $Q$  [эрг/г/сек] зависит от термодинамических параметров, характеризующих состояние газа, например, от температуры и плотности — степенным образом, а от времени — произвольным образом. Уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\partial e}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t} = Q = Q_* \left(\frac{e}{e_*}\right)^{-\alpha} \left(\frac{v}{v_*}\right)^{-\beta} \Phi\left(\frac{t}{t_*}\right) f\left(\frac{m}{m_*}\right) \quad (1.1)$$

$$\left(e = \frac{pv}{(\kappa - 1)}, \quad v = \frac{1}{\rho}\right)$$

Здесь  $e$  — энергия единицы массы газа,  $\kappa$  — постоянный показатель адиабаты,  $v$  — удельный объем,  $\rho$  — плотность вещества,  $t$  — время,  $m$  — лагранжева (массовая) координата частицы, индексом \* отмечены характерные размерные параметры в законе тепловыделения,  $f$  и  $\Phi$  — произвольные безразмерные заданные функции своих аргументов, характеризующие изменение интенсивности источника во времени и энерговыделения по частицам.

Если полная масса движущегося и подогреваемого газа фиксирована, то существует аналог решения Л. И. Седова задачи об адиабатическом разлете [1] — автомодельное решение [2], описывающее регулярный режим движения и нагрева газа.

В [2] был подробно рассмотрен случай плоского движения газа при  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ , т. е. когда интенсивность энерговыделения не зависит от термодинамических параметров.

Такой случай соответствует, например, довольно распространенному случаю поглощения электромагнитного излучения веществом, когда массовый коэффициент поглощения  $kv$  [см<sup>2</sup>/г] не зависит от состояния вещества:  $kv = k_*v_* = \text{const}$ . Тогда  $Q_*\tau = Ek_*v_*$ , где  $E$  — полная энергия электромагнитного излучения, падающего на единицу поверхности [эрг/см<sup>2</sup>], а  $\tau$  — характерное время действия источника энергии, причем  $f = \exp(-k_*v_*m)$  для случая поглощения монохроматического излучения. В качестве  $m_*$  можно выбрать величину  $(k_*v_*)^{-1}$ . Для «прозрачной» области, размеры которой  $r_0$  таковы, что  $kr_0 \ll 1$ , получим  $f = 1$ .

Вследствие прогрева коэффициент поглощения может изменяться, и, если его изменение можно описать степенным законом, то для прозрачных областей, где  $f \approx 1$ , получим

$$Q = \frac{E}{\tau} kv = \frac{E}{\tau} k_* v_* \left(\frac{v}{v_*}\right)^{-\alpha} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\beta} \Phi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Полностью ионизованная плазма с собственной частотой  $\omega_0$  при учете передачи энергии от электронов к ионам с частотой соударений  $\nu_i$  поглощает электромагнитное излучение с частотой  $\omega$ , причем, если  $\nu_i \ll \omega$  и  $\omega \gg \omega_0$ , то [3-6]

$$k = \frac{\nu_i}{c} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2, \quad \omega_0 = \left(\frac{4\pi n_e \epsilon_e^2}{m_e}\right)^{1/2}, \quad \nu_i = \frac{4 \sqrt{2\pi} \epsilon_e^4 n_e L}{3 (k_B T)^{3/2} m_e^{1/2}}$$

Здесь  $\epsilon_e$  и  $m_e$  — заряд и масса электрона,  $n_e$  — число электронов в единице объема,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура,  $L$  — кулоновский логарифм [6], который можно приближенно считать постоянным. Следовательно, в этом случае  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 3/2$ . Н. Г. Басовым и О. Н. Крохиным [3] было предложено использовать поглощение плазмы по указанному механизму монохроматического импульсного светового пучка большой мощности с целью достижения весьма высоких температур порядка  $10^7$  °К.

При сравнительно небольших изменениях температуры вблизи характерной температуры  $T_*$  зависимость скорости протекания реакций и, следовательно, зависимость тепловыделения от температуры и плотности может быть также аппроксимирована степенным законом.

В монографии К. П. Станюковича [7] уже была рассмотрена задача о движении газа, приводящего в движение поршень, с учетом тепловыделения по степенному закону от давления (так обычно аппроксимируется зависимость скорости горения порохов). При этом предполагалось, что перепад давления в движущемся газе мал, что верно лишь для достаточно тяжелого метаемого тела, т. е.  $p = p(t)$ .

При термоядерных реакциях [8, 9] закон тепловыделения имеет обычно вид

$$Q = A \left(\frac{p}{p_*}\right) \left(\frac{T}{T_*}\right)^{-2/3} e^{-\chi} \quad \left(\chi = \frac{B}{T^{1/3}}\right)$$

( $A = \text{const}$ ,  $B = \text{const}$ )

Аппроксимация степенной зависимостью приводит к выражению

$$Q = Q_* \left(\frac{p}{p_*}\right) \left(\frac{T}{T_*}\right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{-\chi_* + 2}{3}, \quad \beta = 1, \quad \chi_* = \frac{B}{T_*^{1/3}}$$

Электропроводность сильно ионизованного газа изменяется по закону [10]

$$\sigma = \sigma_0(Z) \frac{T^{3/2}}{4\epsilon_e^2 \sqrt{2\pi m_e} L}$$

где  $\sigma_0(Z)$  — безразмерный коэффициент порядка единицы, зависящий от среднего заряда плазмы  $Z$ . Если электрический ток  $j$  постоянен по сечению разряда, то Джоулево тепло, выделяющееся в нем,  $Q \sim T^{-3/2\nu}$ .

Для нескольких физических и гидродинамических задач (если соотношение параметров таково, что успевает установиться регулярный режим разлета) представляет интерес рассмотреть характер изменения параметров во времени и их распределения по частицам для различных значений  $\alpha$  и  $\beta$ .

Уравнения движения газа и неразрывности при наличии подогрева не изменяют своего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} r^{\nu-1} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = u, \quad \frac{1}{\nu} \frac{\partial r^\nu}{\partial m} = v \quad (1.2)$$

Здесь  $u$  — скорость газа,  $r$  — эйлерова координата,  $m$  — лагранжева координата,  $\nu = 1, 2, 3$  в плоском, цилиндрическом и сферическом случаях.

Задача о регулярном режиме движения газа заданной массы имеет решение в разделяющихся переменных

$$\begin{aligned} p &= P(m) p^\circ(t), & v &= V(m) v^\circ(t) \\ u &= U(m) u^\circ(t), & r &= R(m) r^\circ(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в систему уравнений в частных производных (1.1) и (1.2), получим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений, одна из которых служит для нахождения зависимости изменения параметров от времени, другая — для определения распределения параметров в регулярном режиме

$$\left(\frac{de^\circ}{dt} + p^\circ \frac{dv^\circ}{dt}\right) \left(\frac{e^\circ}{e_*}\right)^\alpha \left(\frac{v^\circ}{v_*}\right)^\beta \Phi^{-1}\left(\frac{t}{\tau}\right) = Q_* (PV)^{-(\alpha+1)} V^{-\beta} f\left(\frac{m}{m_*}\right) \quad (1.4)$$

$$\frac{du^\circ}{dt} \frac{1}{p^\circ (r^\circ)^\nu} - \frac{dP}{dm} \frac{R^{\nu-1}}{U} \quad (1.5)$$

$$\frac{dr^\circ}{dt} \frac{1}{u^\circ} - \frac{U}{R} \quad (1.6)$$

$$\frac{v^\circ}{(r^\circ)^\nu} = \frac{1}{\nu} \frac{dR^\nu}{dm} \frac{1}{V} \quad (1.7)$$

Заметим, что полученное частное точное решение уравнений одномерного движения газа с учетом подогрева является обобщением на случай неадиабатических движений газа решения задачи об адиабатическом разлете фиксированной массы газа [1], также являющегося решением в разделяющихся переменных, причем в этом случае правая часть уравнения энергии равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\ln(pv^*)] = 0, \quad \text{или} \quad PV^* f(m) = \text{const}$$

В рассматриваемом решении с подогревом из (1.5) следует

$$PV^* f\left(\frac{m}{m_*}\right) = \text{const}, \quad (\gamma - 1)(1 + \alpha) = \beta \quad (1.8)$$

Однако степень произвола в исследуемом решении несколько меньше, чем при адиабатическом разлете, когда  $f(m)$  определяет возможный произвол в начальных данных, так как в задачах с подогревом  $f(m)$  обычно фиксировано из физических соображений. Укажем, что, вообще говоря,  $\gamma \neq \kappa$ . Для  $\alpha = +3/2$  и  $\beta = +1$  (подогрев плазмы электромагнитным излучением постоянной частоты) величина  $\gamma = 7/5$  (в то время как фигурирующий в левой части уравнения (1.1) истинный показатель адиабаты газа  $\kappa = 5/3$ ).

Естественно, что нелинейность системы уравнений (1.1) и (1.2) приводит к тому, что движение описывается решением в разделяющихся переменных лишь в том единственном случае, если начальный профиль параметров соответствует решению обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных в предположении об автомодельности движения. При наличии длительного выделения энергии, когда объем, занимаемый газом, и его энергия станут существенно больше, чем их начальные значения, можно предположить, что движение будет выходить на автомодельный режим и при начальном распределении параметров, отличном от «автомодельного», т. е. автомодельный режим будет являться асимптотическим.

Интересно отметить, что нулевые начальные данные (движение, начинающееся из состояния покоя абсолютно холодного газа) также удовлетворяют разделению переменных. Действительно, при  $p^\circ(0) = 0$  и  $u^\circ(0) = 0$  произвольный профиль  $P(m)$  и  $U(m)$  удовлетворяет условию  $p(0, m) = 0$ ,  $u(0, m) = 0$ . В таком случае неавтомодельность движения может иметь место лишь вследствие того, что начальное распределение плотности отлично от автомодельного. Однако из интуитивных («физических») соображений ясно, что после того как в результате нагрева вещество значительно расширяется, несущественным является не только характер распределения плотности, но и его абсолютная величина. Как будет показано ниже, во многих случаях при длительном энерговыделении кинетическая и тепловая энергия движущегося газа пропорциональны друг другу и имеют один порядок величины.

Поэтому к концу энерговыделения скорость движения будет порядка  $\sqrt{2E/M}$ , где  $E$  — полная энергия, выделившаяся в газе, и  $M$  — его масса. Следовательно, размер области, занятый газом, будет порядка  $\tau\sqrt{2E/M}$ , где  $\tau$  — полное время выделения энергии, а средний удельный объем порядка  $(\tau\sqrt{2E/M})^3 M^{-1}$ .

Отсюда следует, что при достаточно малой массе движущегося газа  $M$ , достаточно большой выделившейся энергии  $E$  и достаточно большой длительности подвода энергии  $\tau$  средняя плотность вещества  $\rho$  будет значительно меньше начальной плотности. Ясно, что хотя «по абсолютной величине»  $\tau$  может быть достаточно малой величиной (по сравнению с «обычными» масштабами), разлет будет происходить в регулярном режиме длительного теплоподвода. Естественно, что критерием длительности подвода энергии является  $\tau \gg t_g$ , где  $t_g$  — характерное газодинамическое время разлета. Если характерный начальный размер  $r_0 = (Mv_0)^{1/3}$ , а характерная скорость разлета порядка  $\sqrt{2E/M}$ , то  $t_g\sqrt{2E/M} = r_0$ .

Для параметров, приведенных в [3] и соответствующих подогреву плазмы световым пучком до  $T_* = 10^7$  К, когда при плотности  $\rho_0 = 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>,  $r_0 \approx 1/k_* = 10^{-2}$  см и энергия единицы массы газа  $e_* = 1.5 \cdot 10^{15}$  эрг/г и поэтому  $\sqrt{2e} = 5 \cdot 10^7$  см/сек получим, что  $t_g = 2 \cdot 10^{-10}$  сек. Следовательно, уже при «крайне малой» длительности импульса порядка  $10^{-8}$  сек можно считать, что разлет происходит в режиме медленного подогрева.

На границе движущегося газа полной массы  $M$  при разлете в вакуум давление  $p = 0$ . В точке симметрии (или у границы с жесткой стенкой в плоском случае) скорость газа  $u = 0$ . Такие граничные условия соответствуют автомодельному характеру движения

$$m\zeta(v) = M, \quad P = 0; \quad m = 0, \quad U = 0, \quad P = 1$$

где  $\zeta(v) = 2, 2\pi, 4\pi$  при  $v = 1, 2, 3$  соответственно.

Разлет газа может быть автомодельным и при наличии на его границе метаемой пластины (оболочки), т. е. когда

$$m^\circ \frac{du_0}{dt} = p_0 r_0^v \quad (1.9)$$

где индексом нуль внизу обозначены параметры газа на его краю, а  $m^\circ$  — масса оболочки. Подставляя решение в виде (1.3) в граничное условие (1.9), получим

$$m^\circ \left( \frac{dP}{dm} \right)_0 = P_0 \quad \left( P_0 = \frac{p_0}{p^\circ} \right) \quad (1.10)$$

При этом здесь и ниже под  $u^\circ$  понималась скорость газа на границе ( $u_0 = u^\circ$ ,  $U_0 = 1$ ), под  $r^\circ$  — радиус границы ( $r^\circ = r_0$ ,  $R_0 = 1$ ), а под  $p^\circ$  — давление в центре газа. Из (1.10) следует, что при увеличении массы оболочки перепад давления уменьшается.

Для  $v \neq 1$  иногда естественно ввести такую «эластичную» оболочку, например, если подогреваемый газ окружен холодным неподогреваемым газом. Введение такой тонкой оболочки ( $m^\circ \ll M$ ) удобно и для устранения возникающих в некоторых случаях бесконечных скоростей газа (например, при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ , когда  $PV = 1$ ; естественно, что возникающая особенность будет интегрируемой). Такой прием можно применить и при расчетах на ЭЦВМ неавтомодельных задач.

Ниже будет рассматриваться случай разлета в вакуум при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} P = 0, \quad U = 1, \quad R = 1, \quad m\zeta(v) = M \\ P = 1, \quad V = 1, \quad R = 0, \quad U = 0, \quad m = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

§ 2. Рассмотрим случай, когда произвольная функция, характеризующая распределение интенсивности энерговыделения по частицам газа, постоянна:  $f = 1$ . Разделим уравнение (1.5) на (1.6) и (1.7)

$$\frac{du^\circ r^\circ u^\circ}{dr^\circ p^\circ v^\circ} = - \frac{UR dP}{U^2 dR} = C \quad (2.1)$$

Здесь  $C$  — константа разделения. При  $C > 0$  давление  $P$  падает по радиусу  $R$ , и скорость газа  $u^\circ$  увеличивается с увеличением размеров области  $r^\circ$ . Из граничных условий (1.11) и правых частей уравнений (1.4) и (1.6) следует, что скорость линейно распределена по радиусу, а плотность связана с давлением политропическим законом

$$U = R, \quad PV^\gamma = 1 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) при условиях (2.2) и (1.11) интегрируется

$$P = (1 - R^2)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad PV = 1 - R^2, \quad C = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \quad (2.3)$$

Кинетическая энергия газа  $E_K$ , тепловая  $E_T$  и полная масса  $M$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} \zeta(v) \rho^\circ (u^\circ)^2 (r^\circ)^\nu J_K \\ E_T &= \frac{1}{2} \zeta(v) p^\circ (r^\circ)^\nu J_T / (\kappa - 1) \\ M &= \zeta(v) \rho^\circ (r^\circ)^\nu J_M \end{aligned} \quad (2.4)$$

где для распределения параметров (2.2) и (2.3) безразмерные интегралы  $J_K$ ,  $J_T$  и  $J_M$  имеют вид

$$\begin{aligned} J_K &= \int_0^1 R^2 (1 - R^2)^{1/(\gamma-1)} R^{\nu-1} dR \\ J_T &= \int_0^1 (1 - R^2)^{\gamma/(\gamma-1)} R^{\nu-1} dR \\ J_M &= \int_0^1 (1 - R^2)^{1/(\gamma-1)} R^{\nu-1} dR \end{aligned} \quad (2.5)$$

Проинтегрировав всю выделившуюся энергию, получим

$$\frac{d(E_T + E_K)}{dt} = J_Q M Q_* \left(\frac{e^\circ}{e_*}\right)^{-\alpha} \left(\frac{v^\circ}{v_*}\right)^{-\beta} \Phi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.6)$$

где  $J_Q$  оказывается равным  $J_T$ .

Выражения (2.5) могут быть вычислены через гамма-функцию

$$J_M = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\right)}, \quad J_K = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} + 1\right)} \quad (2.7)$$

Максимальная скорость края газа  $u^\circ$  и внутренняя энергия в центре  $e^\circ$  определяются по кинетической и тепловой энергии и полной массе газа

$$(u^\circ)^2 = \frac{2E_K J_M}{M J_K}, \quad e^\circ = \frac{p^\circ v^\circ}{(\kappa - 1)} = \frac{E_T J_M}{M J_T} \quad (2.8)$$

Согласно общему свойству гамма-функции,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , и поэтому

$$\frac{J_M}{J_K} = \frac{(\nu+2)\gamma-\nu}{\nu(\gamma-1)}, \quad \frac{J_T}{J_K} = \frac{2\gamma}{\nu(\gamma-1)} \quad (2.9)$$

Обычные предположения о возможности введения средней (постоянной) температуры и плотности газа для оценки параметров газа в регулярном режиме приводят к  $J_M = J_T = 1/\nu$ ,  $J_K = 1/(\nu + 2)$ .

Согласно (2.9), значения  $J_M/J_K$  и  $J_T/J_K$  при  $\gamma = 7/5$  равны соответственно  $10/3$  и  $7/10$ , вместо оценочных значений  $5/3$  и 1. Укажем, что полученные выражения можно использовать и для определения величин при адиабатическом разлете [1] с постоянной энтропией всех частиц, причем в этом случае  $\gamma = \kappa$ .

Заметим, что в случае цилиндрической симметрии, когда  $\nu = 2$ , получим особенно простые выражения

$$J_M = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad J_K = \frac{(\gamma - 1)^2}{2\gamma(2\gamma - 1)}, \quad J_T = \frac{\gamma - 1}{2(2\gamma - 1)}$$

§ 3. Рассмотрим изменение параметров во времени. Система уравнений (1.4)–(1.7) с учетом результатов § 1 примет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{pv}{r}, & \frac{dr}{dt} &= u, & r^\nu &= v \\ \frac{d\theta}{dt} &= \theta^{-\alpha} v^{-\beta} - (\kappa - 1) \frac{\nu u \theta}{r}, & \theta &= pv \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь в качестве характерного параметра  $\rho_* = v_*^{-1}$  выбрана начальная плотность в центре,  $r_*$  — соответствующий радиус,  $p_* v_*$  соответствует заданной характерной температуре;  $Q_*$ ,  $u_*$ ,  $t_*$  находятся из соотношений

$$u_* t_* = r_*, \quad 2\gamma u_*^2 = p_* v_* (\gamma - 1), \quad Q_* t_* (\kappa - 1) = p_* v_* \quad (3.2)$$

Все величины с индексом 0 и время  $t$  отнесены к соответствующим размерным параметрам с индексом  $*$  и для удобства в уравнениях (3.1) все индексы опущены.

Будем рассматривать нагрев первоначально холодного и неподвижного газа. Начальные значения системы уравнений имеют вид

$$u = 0, \quad \theta = 0, \quad v = 1, \quad r = 1 \quad (3.3)$$

Сначала нагрев и разгон газа происходят при мало меняющемся радиусе ( $r \approx 1$ ) и почти постоянной плотности ( $v \approx 1$ ). В этом случае безразмерная температура и скорость газа растут по степенному закону

$$\theta = [t(1 + \alpha)]^{1/(1+\alpha)}, \quad u = \frac{1}{2+\alpha} [t(1 + \alpha)]^{(2+\alpha)/(1+\alpha)} \quad (3.4)$$

Ясно, что при временах  $t$  порядка единицы движением газа нельзя пренебречь. Рассмотрим нагрев газа при больших временах с учетом движения газа. Система (3.1) имеет степенное решение

$$r = At^s, \quad \frac{dr}{dt} = u = sAt^{s-1}, \quad v^\nu = r^\nu = A^\nu t^{s\nu}, \quad \theta = Bt^n \quad (3.5)$$

Показатели степени  $s$  и  $n$  и константы  $A$  и  $B$  связаны между собой. Из системы (3.1) следует

$$B^{1+\alpha} [n + (\kappa - 1)sv] = A^{-\nu\beta}, \quad (\alpha + 1)n = 1 - s\nu\beta \quad (3.6)$$

$$2s = n + 2, \quad s(s - 1)A^2 = B \quad (3.7)$$

Комбинация этих двух условий определяет закон изменения температуры

$$n(1 + \alpha + 1/2\nu\beta) = 1 - \nu\beta \quad (3.8)$$

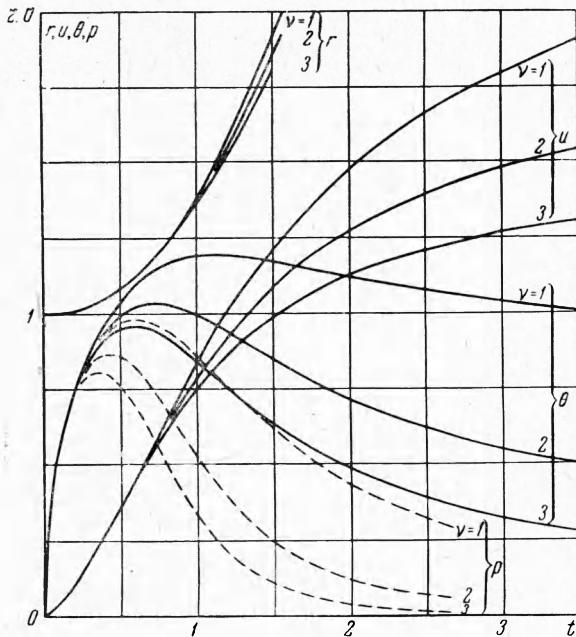
Легко видеть, что температура увеличивается лишь в случае  $\beta\nu < 1$ , что не имеет места, например, в упомянутом выше случае подогрева плазмы световым излучением постоянной частоты. Если согласно (3.7) и (3.8), получим  $s < 1$ , т. е. скорость уменьшается, что невозможно, то в таком случае при определении поведения величин при больших време-

нах  $t$  следует положить  $s = 1$ , так как кинетическая энергия стремится к постоянной величине и существенно больше тепловой (полная выделившаяся энергия ограничена). Поскольку пропорциональность кинетической и тепловой энергии (второе из условий (3.7)) не имеет места, то величина скорости (константа  $A$ ) может быть определена лишь путем численных расчетов начальной стадии нагрева. Система уравнений (3.1) легко сводится к системе двух уравнений

$$\frac{dr}{du} = \frac{ur}{\theta}, \quad \frac{d\theta}{du} = \theta^{-(\alpha+1)} r^{1-\nu\beta} - (\kappa - 1) \nu u \quad (3.9)$$

В случае  $\beta = 1$  при  $\nu = 1$  (когда, согласно (3.7), должно быть  $n = 0$ ,  $\theta \rightarrow \text{const}$ ) оба уравнения (3.9) интегрируются независимо друг от друга, и при больших значениях поведение решения находится из условий квазиизотермичности, т. е. путем приравнивания правой части (3.9) нулю

$$\begin{aligned} \theta^{-(\alpha+1)} &= (\kappa - 1) \nu u \\ \frac{d\theta}{du} &= -\frac{\theta}{(1 + \alpha) u} \quad (3.10) \\ (u \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0) \end{aligned}$$



Фиг. 1

На фиг. 1 показаны зависимости  $\theta$ ,  $r$ ,  $u$  и  $p$  от  $t$  для трех случаев  $\nu = 1, 2, 3$  при  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 3/2$  и  $\kappa = 5/3$  при начальных данных (3.3), полученные путем численных расчетов системы (3.1), (3.2). Безразмерная температура  $\theta$  имеет максимум, равный 1.20, 1.04 и 0.967 в моменты  $t$ , равные 1.13, 0.724 и 0.587 соответственно при  $\nu = 1, 2$  и  $3$ , в то время как к моменту  $t = 20$  значения  $u$  равны 2.75, 1.92 и 1.49, значения  $r$  равны 46.5, 34.7 и 28.2, а значения  $\theta$  составляют 0.813, 0.194 и 0.055. Наличие

максимума температуры отличает результаты настоящей работы от работы [3].

Таким образом, исследование регулярного режима разлета позволяет выявить качественные особенности движения с подогревом.

Если устанавливается режим разлета, в котором кинетическая энергия пропорциональна тепловой, то, используя соотношения (3.7) между кинетической и тепловой энергией, получим

$$\frac{E_K}{E_T} = \frac{J_K (u^*)^2 (\kappa - 1)}{2J_T p^* v^*} = \frac{J_K s^2 A^2 u_*^2 (\kappa - 1)}{2J_T B p_* v_*} \quad (3.11)$$

Используя (3.2) и (2.9), приходим к простому соотношению

$$\frac{E_K}{E_T} = \frac{\nu s (\kappa - 1)}{2(s - 1)} \quad (3.12)$$

Например, в плоском случае при  $\kappa = 5/3$ , когда газ подогревается электромагнитным излучением при постоянном коэффициенте поглощения,

т. е.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $s = 3/2$ , кинетическая энергия составляет  $1/2$ , а в сферическом случае  $-3/4$  от полной. Таким образом, хотя температура продолжает возрастать ( $n = 1$ ), значительная часть энергии затрачивается на движение газа.

Следует отметить, что после выключения источника энергии движение описывается автомодельным решением [1] об адиабатическом движении в регулярном режиме без изменения распределения параметров по частицам газа, которое возникло в период движения с подогревом. На таком «застывании» распределения плотности и скорости может быть основано измерение величины выделившейся энергии на больших расстояниях, даже если неизвестна масса вещества, в которой выделилась эта энергия. Действительно, по величине механического импульса  $I$  скоростного напора  $1/2\rho u^2$  и времени его максимума  $t_m$  можно определить  $E$  и  $M$

$$t_m = \frac{\lambda r}{\sqrt{2E/M}}, I = \frac{\eta}{8\pi r^2} \sqrt{2EM} \quad \left( I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho u^2 dt, r = \text{const} \right)$$

Используя полученное выше распределение параметров (2.2), (2.3), находим, что коэффициент  $\lambda$  не зависит от  $\gamma$  и равен  $\sqrt{v/(v+2)}$ , а  $\eta$  слабо зависит от  $\gamma$  и вообще от характера распределения плотности. При изменении  $\gamma$  от  $15/13$  до  $\gamma = \infty$ , что соответствует равномерному распределению плотности, величина  $\eta$  изменяется при  $v = 3$  от 0.934 до 0.968, причем при  $\gamma = 7/5$  она равна 0.945, а при оболочкообразном распределении плотности  $\eta = 1$ . Максимум  $\rho u^2$  является довольно резким, что легко видно из формулы, описывающей его изменение во времени, если вся энергия перешла в кинетическую и  $u^\circ \rightarrow u_\infty^\circ$

$$\frac{\rho u^2}{2} = \frac{E}{\zeta(v) r^\nu J_k} \left( 1 - \frac{r^2}{u_\infty^2 t^2} \right)^{1/(\gamma-1)} \left( \frac{r}{u_\infty t} \right)^{2+v}$$

Величина  $u_\infty$  определяется по  $E$  и  $M$  из соотношений (2.7), (2.8). Другим способом измерения  $\sqrt{EM}$  может быть измерение механического импульса отдачи, возникающего в результате разлета. Следует, однако, иметь в виду, что в случае, когда нагреваемый разлетающийся газ не граничит непосредственно с жесткой стенкой, где производится «измерение» давления, измеренная величина механического импульса может быть больше, чем если бы не было прослойки холодного газа. Однако эффекты «короткого удара» [11] уменьшаются при увеличении длительности подогрева. В предельном случае весьма «медленного» подогрева холодный газ почти неподвижен, и в него не вносится дополнительная энергия, следовательно, увеличение импульса пренебрежимо мало.

§ 4. Движение газа уменьшает его температуру, поэтому для задач, где существенна величина достигнутой в результате подогрева температуры, следует рассмотреть начальную стадию прогрева газа.

Рассмотрим задачу о прогреве в плоском случае неподвижного газа постоянной плотности  $\rho_0$  излучением. Уравнения энергии и закон тепловыделения имеют вид

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial m} = -\frac{k}{\rho} q, \quad k = k_* \left( \frac{e}{e_*} \right)^{-\alpha} \left( \frac{v_0}{v_*} \right)^{-\beta} = k_0 \left( \frac{e}{e_*} \right)^{-\alpha}$$

$$e(\kappa - 1) = p v_0, \quad \rho_0 x = m$$

Здесь  $q$  — поток лучистой энергии, равный заданному  $q_0$  на краю вещества (в точке  $m = 0$ ).

Если изменение коэффициента поглощения от параметров имеет степенной вид, то, как показано в [12], область нагретого неравновесным излучением первоначально холодного ( $e = 0$ ) газа ограничена, в отличие от случая  $k = \text{const}$ , и распределение параметров в «языке прогрева» носит такой же характер, как и в «тепловых волнах» [11], возникающих при нагреве вещества в режиме лучистой (нелинейной) теплопроводности. Решение этой автомодельной задачи имеет вид [12]

$$e = e_* \left( 1 - \frac{\xi \alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} \left( \frac{t}{t_*} \right)^{1/(\alpha+1)}, \quad q = q_0 \left( 1 - \frac{\xi \alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha}, \quad \xi = k_0 \left( \frac{t_*}{t} \right)^{\alpha/(\alpha+1)}$$

$$t_* k_0 q_0 = e_* \rho_0,$$

Таким образом, распределение температуры вблизи точки  $m = 0$  носит характер плато.



Повышение температуры и пропорциональное ему (при неизменной плотности вещества  $\rho_0$ ) повышение давления газа приводят к разлету газа в сторону вакуума. Считая температуру в области неподвижного газа изменяющейся лишь со временем, получим, что граница волны разрежения движется по степенному закону. Для общности будем считать, что интенсивность источника также меняется по степенному закону. В этом случае уравнения энергии можно записать в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t} = G t^s (pv)^{-\alpha} v^{-\beta} \quad (4.1)$$

где  $G$  — очевидная комбинация размерных параметров.

Интересно отметить, что в регулярном режиме разлета с подогревом по такому закону температура может возрастать, если подобрать достаточно большую величину  $\delta$ , так как вместо соотношения (3.8) будет иметь место

$$n(1 + \alpha + 1/2\nu\beta) = 1 - \nu\beta + \delta, \quad s = 1 + 1/2n$$

В области неподвижного газа  $v = v_0$ , поэтому в этой области

$$\begin{aligned} p^\vee &= F t^{1+\alpha}, & v^\vee &= v_0, & (a^\vee)^2 &= \kappa p^\vee V^\vee \\ x^\vee &= \int_0^t a^\vee dt = \sqrt{\kappa F v_0} \frac{2(1+\alpha)}{3+\delta+2\alpha} t^{\frac{3+\delta+2\alpha}{2(1+\alpha)}} \\ F^{1+\alpha} (1+\delta) &= (1+\alpha) G v_0^{-(\beta+1+\alpha)} (\kappa-1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Такая задача является автомодельной [2]. Введем новые переменные

$$p = p^\vee p^\times, \quad u = a^\vee u^\times, \quad v = v^\vee v^\times, \quad x^\vee \mu = t v_0, \quad x = x^\vee x^\times \quad (4.3)$$

Систему уравнений (4.1) и (1.2) (при  $\nu = 1$ ) можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для  $p^\times, u^\times, v^\times$  от  $\mu$  (индексы над величинами в дальнейшем опустим)

$$\begin{aligned} \mu \frac{d[\ln(pv^\times)]}{d\mu} &= -2C(p^{-(\alpha+1)}v^{-(\beta+\alpha+1)} - 1) \\ C u - \mu \frac{du}{d\mu} + \frac{1}{\kappa} \frac{dp}{d\mu} &= 0, \quad \mu \frac{dv}{d\mu} + \frac{du}{d\mu} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$x - \mu v = u, \quad C(3 + \delta + 2\alpha) = 1 + \delta \quad (4.5)$$

Случай  $C = 0$  соответствует обычной волне разрежения по мгновенно нагретому газу. Граничные условия системы (4.4) имеют вид

$$\mu = 1, \quad p = 1, \quad v = 1, \quad u = 0, \quad x = 1; \quad \mu = 0, \quad p = 0 \quad (4.6)$$

При  $\beta + \alpha + 1 = \kappa(\alpha + 1)$ , т. е.  $\gamma = \kappa$ , уравнение энергии системы (4.4) имеет точное решение  $pv^\times = 1$ , однако распределение параметров по  $\mu$  не совпадает со случаем адиабатической волны разрежения, бегущей по области с неизменными параметрами.

Интересно отметить, что для  $\alpha = 3/2$  и  $\beta = 1$  при  $\kappa = 7/5$  изменение параметров является «адиабатическим» ( $\gamma = \kappa$ ). Случай  $\alpha = 0, \beta = 0$  рассматривался ранее автором и независимо более подробно в [13]. В этом случае, как было показано автором и А. А. Милутиным и независимо Л. П. Феоктистовым [13], температура газа на краю отличается от температуры газа в неподвижной области в  $2C / (2C + \kappa - 1)$  раз, т. е. при  $\delta = 0$ , что соответствует  $C = 1/3$  и  $\kappa = 5/3$  всего лишь в 2 раза. Это ускоряет выход на регулярный режим разлета, в котором температура всех точек одинакова.

При политропической зависимости  $pv^\kappa = 1$  уравнение импульсов и неразрывности системы (4.4) (второе и третье уравнения) могут быть заменой переменных сведены к одному уравнению, не содержащему  $\mu$

$$v\mu^{2/(1+\kappa)} = z, \quad u\mu^{(1-\kappa)/(1+\kappa)} = y$$

$$\frac{z}{y} \frac{dy}{dz} = \left[ \left( C - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right) z^{\kappa+1} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right] \left[ \frac{2}{\kappa+1} (z^{\kappa+1} - 1) - C y z^\kappa \right]^{-1} \quad (4.7)$$

Точка  $y = 0, z = 1$ , соответствующая границе волны разрежения, где  $u = 0, \mu = 1, v = 1$ , является особой точкой уравнения (4.7). Вблизи ее поведение интегральных кривых описывается уравнением

$$Ky^{2/C} = Cy + (C-2)(z-1) \quad (4.8)$$

где  $K$  — произвольный коэффициент. Наклон общей касательной к этим кривым, входящим в узел, равный  $(-1 + 2/C)$ , меньше, чем наклон  $2/C$  линии бесконечных производных, уравнение которой имеет вид

$$C(\kappa+1)yz^\kappa = 2(z^{\kappa+1} - 1) \quad (4.9)$$

На границе разлетающегося газа с вакуумом  $\mu = 0$ , а скорость или ограничена или бесконечна, поэтому  $y \rightarrow -\infty$  (скорость  $u < 0$ ). Следовательно, вблизи  $z = 1$  увеличивается  $|y|$ , а  $z$  уменьшается. Если  $y(z)$  пересекает линию, где  $y' = \infty$ , то интегральная кривая попадает в область  $y' < 0$ , т. е.  $z$  начинает увеличиваться, и при  $y' \rightarrow -\infty$  имеет место  $z \rightarrow \infty$ . Второе из уравнений (4.5) может быть преобразовано к виду

$$Cu - \mu \frac{du}{d\mu} [1 - z^{-(\kappa+1)}] = 0 \quad (4.10)$$

Легко видеть, что при  $z \rightarrow \infty$  имеет место  $u \sim \mu^C$ , а так как при  $-1 < \alpha < \infty$  величина  $C$  лежит в диапазоне  $0 < C < 1$ , то  $u \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ , что невозможно. Следовательно,  $z \rightarrow 0$ , причем из условия непересечения линии (4.9) получим

$$C(-y)z^\kappa < \frac{2}{(\kappa-1)}$$

Поведение решения уравнения (4.7) при  $z \rightarrow 0$  можно найти из уравнения

$$\frac{z}{y} \frac{dy}{dz} = - \frac{(z-1)}{2 + (\kappa+1)Cyz^\kappa} \quad (4.11)$$

Если  $yz^\kappa \rightarrow 0$ , то  $(-y) \sim z^{-1/2(\kappa-1)}$  и, следовательно,

$$(-u) \sim v^{-1/2(\kappa-1)}, \quad \text{или} \quad (-u) \sim \mu^{(\kappa-1)/(\kappa+1)}$$

что также невозможно. Поэтому решение (4.7) имеет вид  $\kappa C y z^\kappa \rightarrow -1$  при  $z \rightarrow 0$ , а распределение параметров на краю волны разрежения определяется с точностью до одной константы  $D$  выражениями

$$u = -D + (CD\kappa\mu)^{1/\kappa}(\kappa-1)^{-1/\kappa}, \quad v^\kappa = CD\kappa\mu^{-(\kappa+1)} \quad (4.12)$$

Таким образом, скорость газа на краю оказывается конечной в отличие от случая  $pv = \text{const}$ , когда  $(-u) \sim (-\ln \mu)^{1/2}$ . Скорость движения газа пропорциональна корню из выделившейся энергии, поэтому исследование волны разрежения позволяет судить о достигнутой температуре.

Ширина «языка» температуры увеличивается по закону  $x \sim t^{3/5}$  при  $\alpha = 3/2$  и постоянном потоке тепла ( $\delta = 0$ ). Граница волны разрежения вначале отстает от «края» языка —  $x \sim t^{6/5}$ . Если при  $t = t_*$  эти величины одного порядка, то  $\sqrt{\kappa p_* v_* t_*} \approx 1/k_*$ . Используя (4.7), получим, что к моменту, когда гидродинамическое движение захватывает область порядка ширины прогретой зоны  $(\sqrt{2e_*})\rho_0 e_* \approx q_0$ , что определяет необходимую мощность  $q_0$  для достижения  $e_*$ . В согласии с оценкой [3], для  $e_* = 1.5 \cdot 10^{15}$  эрг/г требуется  $q_0 \approx 10^{14}$  дж/см<sup>2</sup> сек при  $\rho_0 \approx 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>.

Укажем, что поскольку при  $\delta \neq 0$  край языка растет согласно [12] по степенному закону с показателем  $\alpha(1+\delta)/(1+\alpha)$ , то при  $\delta=3/(2\alpha-1)$  задача о прогреве и связанном с ним движении газа является автомодельной (при  $\alpha=3/2$  и  $\delta=3/2$  показатель степени для роста края языка равен  $3/2$ ).

§ 5. Ограничения, накладываемые на применимость полученных решений вследствие нарушения одномерного характера движения, могут быть продемонстрированы следующим образом.

Рассмотрим разлет плоского слоя или цилиндра ограниченной высоты, и пусть в начальный момент, когда параметры распределены «автомодельным» образом, движение в боковом направлении отсутствует. Температура и скорость звука максимальны на линии симметрии (при  $\alpha = \beta = 0$  в регулярном режиме температура всех точек одинакова). В области, куда еще не проникла волна разрежения от торцов, и в дальнейшем параметры изменяются так же, как и в одномерном случае. Пусть установился степенной режим изменения температуры (и скорости звука)

$$T = T_m \left( \frac{t}{t_m} \right)^n, \quad a = \sqrt{\kappa p v} = a_m \left( \frac{t}{t_m} \right)^{n/2} \quad (5.1)$$

Здесь  $t_m$  — характерное время изменения температуры. При  $n > 0$  величина  $t_m$  равна характерному времени действия источника, а  $T_m$  — температура к концу подогрева. При  $n < 0$  величина  $t_m$  порядка времени, когда достигается максимальная температура  $T_m$ . При адиабатическом разлете без подогрева  $t_m$  — характерное время разлета порядка  $r_0/a_m$  и  $a_m t_m = r_0$ , где  $r_0$  — первоначальный размер в «основном» направлении. Пройденный волной разрежения путь  $x$  определяется выражением

$$x = \frac{a_m t_m}{(1 + 1/2n)} \left[ \left( \frac{t}{t_m} \right)^{1+1/2n} - 1 \right] \quad (5.2)$$

Если  $n < -2$ , то пройденный волной разрежения путь ограничен и для  $L(1 + 1/2n) > a_m t_m$  всегда центральная часть газа будет разлетаться одномерным образом. Это имеет место, например, при адиабатическом разлете, когда  $n = -v(\kappa - 1)$ , при  $\kappa > 2$ , если высота цилиндра ( $v = 2$ ) несколько больше, чем его первоначальный радиус. Однако, если  $n > -2$  (при  $v = 2$ ,  $\alpha = 3/2$  и  $\beta = 1$  показатель  $n = -2/7$ ), то разлет может стать двумерным и после достижения максимума. Для  $n = 1$ , согласно [2], изменение внутренней энергии частиц плоского слоя равно

$$e = \frac{E}{M} \frac{t}{\tau} \frac{2}{(3\kappa - 1)}, \quad a = \sqrt{\kappa(\kappa - 1)} e \quad (5.3)$$

Момент смыкания волны разрежения в центре  $t^*$  для слоя длиной  $2L$  находится из выражения

$$\frac{2}{3} a^* t^* = \frac{2}{3} t^* \left( \frac{E}{M} \frac{2\kappa}{(3\kappa - 1)} \frac{t^*}{\tau} \right)^{1/2} = L \quad (5.4)$$

Следовательно, при достаточно длительном или интенсивном подогреве разлет станет двумерным (когда толщина разлетевшегося слоя станет порядка его первоначальной высоты). В момент  $t^*$  давление в центре

$$p^* = \frac{3^{1/3} (\kappa - 1)^{1/2} \kappa^{1/6}}{(3\kappa - 1)^{2/3} \kappa^{1/2} 2^{1/6}} \left( \frac{E}{\tau} \right)^{2/3} \left( \frac{M}{L} \right)^{1/2} \quad (5.5)$$

Двумерность разлета приводит к повышению прозрачности слоя массы  $M$  и продвижению «волны подогрева» в глубь вещества.

§ 6. Вопрос об установлении регулярного режима может быть решен лишь путем численных расчетов задачи с произвольными «неавтомодельными» начальными данными. Такие расчеты для случая равномерного подогрева первоначально холодного газа постоянной плотности  $\rho_0$  для интенсивности подвода, не зависящей ни от термодинамических параметров, ни от времени, были проведены по нашей просьбе А. С. Фонаревым, а также А. А. Милутиным и В. Л. Бодневой. На фиг. 2 показано изменение давления на границе с жесткой стенкой.

Давление отнесено к

$$p^{**} = \left( \frac{3E^2 (\kappa - 1)^2}{\tau^2 (3\kappa - 1)^2} \right)^{1/3}$$

а время к

$$t^{**} = \frac{M}{2} \left( \frac{3\tau(3\kappa - 1)}{\rho_0^2 E (\kappa - 1)} \right)^{1/3}$$

Кривая 1 — численный расчет на ЭЦВМ, кривая 2 — автомодельное решение задачи о разлете с подогревом [1], кривая 3 — степенной предельный закон спада давления в регулярном режиме. Как легко видеть, решение при «неавтомодельных» начальных данных «выходит» на регулярный режим.

Действительно, максимальное давление в момент подхода волны разрежения к твердой стенке, ограничивающей газ при  $\kappa = 1/5$ , равно  $1.73p^{**}$ , в то время как по автомодельному решению  $p = 1.36p^{**}$  (моменты максимума соответственно равны  $t = 1.10 t^{**}$  и  $t = 1.30 t^{**}$ ), а уже к моменту  $t = 0.93 t^{**}$ , согласно численному счёту,  $p = 0.320 p^{**}$ , а по автомодельному решению  $p = 0.396 p^{**}$  (совпадение с предельным степенным законом  $p = (2/\pi)^{1/2} p^{**} (t^{**}/t)^{1/2}$  еще лучше:  $p = 0.312 p^{**}$ ; к моменту  $t = 9.45 t^{**}$  по численному расчету и по предельному закону давление  $p = 0.260 p^{**}$ , т. е. регулярный режим разлета будет асимптотическим.

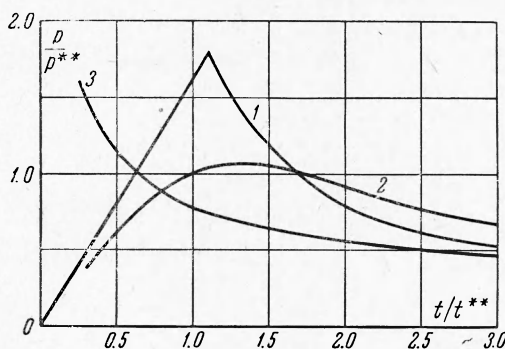
Приношу глубокую благодарность А. А. Милотину и Ю. П. Райзеру за ценные дискуссии, В. Л. Бодневой, А. Н. Зиминой и А. С. Фонареву за проведенные расчеты.

*Замечание при корректуре.* Автору стала известна работа Даусона [14], в которой повторяются приближенные оценки [3] учета расширения плазмы при ее нагреве. Отмечается, что с наступлением прозрачности величину энергосвечения нельзя считать постоянной и что движение вещества должно привести к охлаждению плазмы. В формулах работы Даусона не учитывается, что и после максимума температуры в веществе продолжает поступать энергия. Однако это, по-видимому, учтено в численных расчетах, результаты которых представлены на графиках. Хотя методы расчетов не излагаются, по-видимому, они находятся в согласии с использованным в настоящей работе автомодельным решением.

Поступила 29 V 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 3-е. Гостехиздат, 1954, стр. 242—248.
2. Немчинов И. В. Разлет плоского слоя газа при постепенном выделении энергии. ПМТФ, 1961, № 1, стр. 17—26.
3. Басов Н. Г., Крохин О. Н. Условия разогрева плазмы излучением оптического генератора. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 46, № 1, стр. 171—175.
4. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957, стр. 314—318, 333—337.
5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, 1960, стр. 26—29.
6. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. Изд. иностр. л., 1957.
7. Станюкович К. П. Неустойчивые движения сплошной среды. Гостехиздат, 1954, стр. 646—656.
8. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. Физматгиз, 1961.
9. Франк-Каменецкий Д. А. Физические процессы внутри звезд. Физматгиз, 1959, стр. 278—304, 325—337.
10. Брагинский С. И. К теории развития канала искры. Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, т. 34, № 6, стр. 1548—1557.
11. Зельдович Я. Б. и Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1963.
12. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 1, стр. 36—57.
13. Неуважьев В. Е. Истечение газа в вакуум при степенном законе энергосвечения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 5, стр. 1058—1060.
14. Dawson J. M. On the production of plasma by giant pulse lasers. The physics of fluids. July 1964, vol. 7, № 7, 981—987.



Фиг. 2