ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

А. Н. Спорыхин

(Воронеж)

Вопросам устойчивости пластически деформирующихся сред посвящены многие исследования. Решение конкретных задач проводилось в работах [1,2] и др. При этом принималось, что процесс потери устойчивости можно рассматривать в квазистатической постановке, т. е. отыскивались значения внешних нагрузок, при которых, наряду с невозмущенной формой равновесия, возможно смежное возмущенное состояние равновесия, причем переход от невозмущенного состояния к смежному предполагался происходящим без разгрузки.

Полученные таким образом результаты согласуются с общими опытными представлениями.

Ниже показывается, что использование модели упруго-вязко-пластического упрочняющегося тела приводит к процессу потери устойчивости, при котором материал пластически деформируется, что оправдывает использование касательно-модульной постановки.

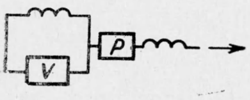
Устанавливается, что если внешние нагрузки консервативны, то для упруго-вязко-пластических тел потеря устойчивости будет происходить по типу статической неустойчивости.

Отметим, что ранее устойчивость систем в условиях ползучести рассматривалась в работах [3–8].

1. Рассмотрим упруго-вязко-пластическое тело, механическая модель которого показана на фиг. 1. Связь между напряженным и деформированным состоянием в этом теле определяем, следуя работе [9].

Тело остается упругим, пока

$$s_{ij}s_{ij} < k^2(0), \qquad s_{ij} = \sigma_{ij} - {}^1/_3\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{1.1}$$



Фиг. 1

при этом

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}{}^e\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}{}^e \tag{1.2}$$

Если $s_{ij}s_{ij} \geqslant k^2(\varkappa)$, то

$$e_{ij} = e_{ij}{}^e + e_{ij}{}^p, \qquad \varkappa = e_{ij}{}^p e_{ij}{}^p \tag{1.3}$$

Причем упругие деформации $e_{ij}{}^e$ связаны с напряжениями законом Гука (1.2). Скорости пластической деформации

$$\begin{gathered} \dot{e}_{ij}^p = 0, \quad \text{если } (s_{ij} - ce_{ij}{}^p)(s_{ij} - ce_{ij}{}^p) < k^2(\varkappa) \\ \dot{e}_{ij}^p = \psi(s_{ij} - ce_{ij}{}^p - \eta\dot{e}_{ij}^p), \quad \text{если } (s_{ij} - ce_{ij}{}^p - \eta\dot{e}_{ij}^p)(s_{ij} - ce_{ij}{}^p - \eta\dot{e}_{ij}^p) = k^2(\varkappa) \end{gathered} \tag{1.4}$$

Полные деформации связаны с перемещениями формулами Коши

$$e_{ij} = {}^1/_2(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.5}$$

К соотношениям (1.1) — (1.5) следует присоединить уравнения равновесия [10]

$$[\sigma_{jk}(\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} + X_i = 0 \tag{1.6}$$

Пусть на части поверхности S_F упруго-пластического тела заданы поверхностные усилия p_i, а на части поверхности S_V заданы перемещения u_i, причем величины p_i и u_i с ростом времени стремятся или принимают значения p_i° и u_i°, не зависящие от времени.

Пусть решение системы уравнений (1.1) — (1.6) при этих граничных условиях есть $\sigma_{ij}^{\circ}(x_k, t)$, $e_{ij}^{\circ}(x_k, t)$, $e_{ij}^{p\circ}(x_k, t)$, $u_i^{\circ}(x_k, t)$. Будем предполагать, что с ростом времени эти решения стремятся к $\sigma_{ij}^{\circ}(x_k)$, $e_{ij}^{\circ}(x_k)$, $e_{ij}^{p\circ}(x_k)$, $u_i^{\circ}(x_k)$.

В дальнейшем исследуется устойчивость этого процесса по отношению к малым возмущениям граничных условий, массовых сил, отклонений конфигурации тела от заданных геометрических размеров.

Решение для возмущенного движения будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ}(x_k, t) + \sigma_{ij}^{+}, \quad e_{ij} = e_{ij}^{\circ}(x_k, t) + e_{ij}^{+}, \quad e_{ij}^{p} = e_{ij}^{p\circ}(x_k, t) + e_{ij}^{p+}$$
$$u_i = u_i^{\circ}(x_k, t) + u_i^{+} \tag{1.7}$$

Предполагается, что об устойчивости движения можно судить по линеаризированной системе уравнений, которую получаем, предполагая компоненты с плюсом малыми и сохраняя только линейные члены разложения.

В пластической области

$$e_{ij}^{+} = e_{ij}^{e+} + e_{ij}^{p+}, \qquad \sigma_{ij}^{+} = \lambda e_{kk}^{e+}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{e+}$$
$$(s_{ij}^{\circ} - ce_{ij}^{p\circ} - \eta \dot{e}_{ij}^{p\circ})(s_{ij}^{+} - ce_{ij}^{p+} - \eta \dot{e}_{ij}^{p+}) = 2k(\varkappa_0)\,\partial k/\partial\varkappa\,|_{\varkappa=\varkappa_0}\, e_{ij}^{p\circ} e_{ij}^{p+} \tag{1.8}$$
$$\dot{e}_{ij}^{p+} = \psi^{+}(s_{ij}^{\circ} - ce_{ij}^{p\circ} - \eta \dot{e}_{ij}^{p\circ}) + \psi^{\circ}(s_{ij}^{+} - ce_{ij}^{p+} - \eta \dot{e}_{ij}^{p+})$$

Для e_{ij}^{+} получаем

$$e_{ij}^{+} = {}^1/_2\,(u_{i,j}^{+} + u_{j,i}^{+}) \tag{1.9}$$

Линеаризированные уравнения равновесия и граничные условия на S_F имеют вид [10]

$$\sigma_{ij,j}^{+} + (\sigma_{jk}^{\circ} u_{i,k}^{+})_{,j} + X_i^{+} - \rho \ddot{u}_i^{+} = 0, \qquad \sigma_{ij}^{+} n_j + \sigma_{jk}^{\circ} u_{i,k}^{+} n_j = p_i^{+} \tag{1.10}$$

Соотношения (1.10) получены для упругого тела, но в связи с тем, что соотношения (1.10) имеют геометрический смысл, не связанный со свойствами тела, можно использовать эти соотношения и для неупругих тел.

Исключая из соотношений (1.8), (1.9) величины e_{ij}^{e+}, e_{ij}^{p+}, получаем

$$\lambda \dot{u}_{k,k}^{+}\delta_{ij} + \mu(\dot{u}_{i,j}^{+} + \dot{u}_{i,k}^{+}) - \dot{\sigma}_{ij}^{+} = \psi^{\circ}[2\mu\sigma_{ij}^{+} - {}^2/_3\mu(3\lambda + 2\mu)\,u_{k,k}^{+}\delta_{ij} -$$
$$- c\lambda u_{k,k}^{+}\delta_{ij} - c\mu(u_{i,j}^{+} + u_{j,i}^{+}) + c\sigma_{ij}^{+} - \lambda\eta \dot{u}_{k,k}^{+}\delta_{ij} - \mu\eta(\dot{u}_{i,j}^{+} + \dot{u}_{j,i}^{+}) +$$
$$+ \eta\dot{\sigma}_{ij}^{+}] + k^{-2}[\lambda \dot{u}_{m,m}^{+}\delta_{kl} + \mu(\dot{u}_{k,l}^{+} + \dot{u}_{l,k}^{+}) - \dot{\sigma}_{lk}^{+}](s_{kl}^{\circ} - ce_{kl}^{p\circ} -$$
$$- \eta\dot{e}_{kl}^{p\circ})(s_{ij}^{\circ} - ce_{ij}^{p\circ} - \eta\dot{e}_{ij}^{p\circ}) \tag{1.11}$$

$$[2\mu\sigma_{ij}^{+} - {}^2/_3\mu(3\lambda + 2\mu)\,u_{k,k}^{+}\delta_{ij} - c\lambda u_{k,k}^{+}\delta_{ij} - c\mu(u_{i,j}^{+} + u_{j,i}^{+}) + c\sigma_{ij}^{+} -$$
$$- \lambda\eta\dot{u}_{k,k}^{+}\delta_{ij} - \mu\eta(\dot{u}_{i,j}^{+} + \dot{u}_{j,i}^{+}) + \eta\dot{\sigma}_{ij}^{+}](s_{ij}^{\circ} - ce_{ij}^{p\circ} - \eta\dot{e}_{ij}^{p\circ}) =$$
$$= k_1 e_{ij}^{p\circ}[\lambda u_{k,k}^{+}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j}^{+} + u_{j,i}^{+}) - \sigma_{ij}^{+}],\ k_1 = 2k(\varkappa_0)\,\partial k/\partial\varkappa\,|_{\varkappa=\varkappa_0} \tag{1.12}$$

Невозмущенное равновесие будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от поведения возмущений при неограниченном увеличении t.

2. Будем искать решение уравнений (1.10) — (1.12) в виде

$$u_i^{+}(x_k, t) = f_n(t)\,\varphi_{in}(x_k), \qquad \sigma_{ij}^{+}(x_k, t) = \psi_m(t)\,\sigma_{ijm}(x_k) \tag{2.1}$$

Здесь $f_n(t)$ и $\psi_m(t)$ — некоторые функции времени, $\varphi_{in}(x_k)$ — собственные векторы упругой задачи, а

$$\sigma_{ijm}(x_k) = \lambda\varphi_{nm,n}\delta_{ij} + 2\mu(\varphi_{im,j} + \varphi_{jm,i}) \tag{2.2}$$

Уравнение метода Галеркина [10] перепишем в виде

$$\int\limits_V [\sigma_{ij,j}^{+} + X_i^{+} - \rho \ddot{u}_i^{+}]\, \varphi_{im} dV - \int\limits_V \sigma_{jk}^{\circ} u_{i,k}^{+} \varphi_{im,j} dV - \iint\limits_{SF} (\sigma_{ij}^{+} n_j - p_i^{+})\, \varphi_{im}\, dS = 0$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots, \ldots) \tag{2.3}$$

Подставляя в (2.3) выражение (2.1), получаем систему уравнений

$$d^2 f_m / dt^2 + b_{mn} f_n - a_{mn} \psi_n = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, \ldots) \tag{2.4}$$

$$a_{mn} = \iint\limits_{S_F} \sigma_{ijn} n_j \varphi_{im}\, dS - \int\limits_V \sigma_{ijn,j} \varphi_{im} dV$$

$$b_{mn} = \iint\limits_{S_F} p_i^{+} (\varphi_{in})\, \varphi_{im} dS + \int\limits_V X_i^{+} (\varphi_{in})\, \varphi_{im}\, dV - \int\limits_V \sigma_{jk}^{\circ} \varphi_{in,k} \varphi_{im,j} dV \tag{2.5}$$

Подставляя (2.1) в (1.11) после умножения на σ_{ijn} и интегрирования по объему V, получаем

$$A_{mn} \frac{df_m}{dt} + B_{mn} f_m - C_{mn} \frac{d\psi_m}{dt} + D_{mn} \psi_m = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \ldots) \tag{2.6}$$

$$A_{mn} = \int\limits_V [a\lambda \varphi_{km,k} \delta_{ij} + a\mu (\varphi_{im,j} + \varphi_{jm,i}) - \tag{2.7}$$

$$- k^{-2} f_{kl}^{\circ} f_{ij}^{\circ} (\lambda \varphi_{km,k} \delta_{kl} + \mu (\varphi_{km,l} + \varphi_{lm,k}))]\, \sigma_{ijn} dV$$

$$B_{mn} = \int\limits_V [a_1 \varphi_{km,k} \delta_{ij} + a_2 (\varphi_{im,j} + \varphi_{jm,i})]\, \sigma_{ijn} dV, \qquad f_{ij}^{\circ} = (s_{ij}^{\circ} - c e_{ij}^{p\circ} - \eta \dot{e}_{ij}^{p\circ})$$

$$C_{mn} = \int\limits_V [a \sigma_{ijm} + k^{-2} \sigma_{klm} f_{kl}^{\circ} f_{ij}^{\circ}]\, \sigma_{ijn} dV, \qquad D_{mn} = \int\limits_V a_3 \sigma_{ijm} \sigma_{ijn} dV \tag{2.8}$$

$$a = 1 + 2\eta\psi^{\circ}, \; a_1 = 2\psi^{\circ} [{}^2/_3 \mu (3\lambda + 2\mu) + c\lambda], \; a_2 = 2c\mu\psi^{\circ}, \quad a_3 = 2\psi^{\circ} (2\mu - c)$$

Соотношение (1.12) приводится к виду

$$A_n df_n / dt + B_n f_n - C_n d\psi_n / dt - D_n \psi_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{2.9}$$

$$A_n = \int\limits_V f_{ij}^{\circ} [\lambda \eta \varphi_{kn,k} \delta_{ij} + \mu\eta (\varphi_{in,j} + \varphi_{jn,i})]\, dV$$

$$B_n = \int\limits_V \Big[f_{ij}^{\circ} \frac{2 (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \varphi_{kn,k} \delta_{ij} + \tag{2.10}$$

$$+ (c f_{ij}^{\circ} + k_1 e_{ij}^{p\circ}) (\lambda \varphi_{kn,k} \delta_{ij} + \mu (\varphi_{in,j} + \varphi_{jn,i})) \Big] dV$$

$$C_n = \eta \int\limits_V f_{ij}^{\circ} \sigma_{ijn} dV, \qquad D_n = \int\limits_V (2\mu + c + k_1) (f_{ij}^{\circ} + e_{ij}^{\circ p})\, \sigma_{ijn} dV$$

Систему линейных дифференциальных уравнений (2.4), (2.6) и (2.9) можно привести к нормальному виду

$$dz/dt = D\,(t)\, z \tag{2.11}$$

где $z = (f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots; \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m, \ldots; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m, \ldots)$ — вектор, а D — некоторый оператор.

Систему уравнений (2.4), (2.6), (2.9) можно представить в виде $A dz/dt + Bz = 0$, где A и B — бесконечные матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} A_{ij} & C_{ij} & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} B_{ij} & D_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ b_{ij} & a_{ij} & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.12}$$

Здесь A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, a_{ij}, b_{ij} $(i; j = 1, 2, 3, \ldots, \ldots)$ — бесконечные матрицы, коэффициенты которых определяются (2.5), (2.7) и (2.9), I — единичная бесконечная матрица и 0 — соответственно бесконечная нуль-матрица.

Пусть R — некоторый оператор

$$R = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ B_{ij}^{-1} & B_{ij}^{-1}A_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Предположим, что матрица B_{ij} обратима. Оператор R — матрица, обратная к матрице A, так как $AR = RA = I$. Тогда уравнение $Adz/dt + Bz = 0$ можно записать в виде

$$dz/dt + A^{-1}Bz = 0$$

Таким образом, система (2.4), (2.6), (2.9) приводится к нормальному виду (2.11), где

$$D = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ B_{ij}^{-1}C_{ij} & B_{ij}^{-1}D_{ij} & B_{ij}^{-1}A_{ij} \\ a_{ij} & b_{ij} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Рассмотрим уравнение (2.11). Предполагается, что

$$\| D\,(t, \beta) - C\,(\beta) \| \to 0 \text{ при } t \to \infty \tag{3.1}$$

Дифференциальное уравнение (2.11) перейдет в дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$dz/dt = C\,(\beta)\, z \tag{3.2}$$

Пусть спектр оператора C лежит внутри левой полуплоскости. Тогда для оператора e^{ct} имеет место оценка ([11] стр. 20)

$$\| e^{ct} \| \leqslant N e^{-\nu t} \qquad (\nu > 0) \tag{3.3}$$

Наряду с уравнениями (2.11) и (3.2), рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dz/dt = [D\,(t, \beta) + \delta I]\, z, \qquad dz/dt = [C\,(\beta) + \delta I]\, z \tag{3.4}$$

Здесь δ настолько мало, что спектр оператора $C + \delta I$ лежит внутри левой полуплоскости, и для оператора $e^{(C+\delta I)}$ имеет место оценка типа (3.3). Тогда существует ограниченная квадратичная форма

$$W\,(z) = \int_0^\infty (e^{(C+\delta I)\,t}\, z, \qquad e^{(C+\delta I)\,t}\, z)\, dt \tag{3.5}$$

Действительно,

$$W\,(z) = \int_0^\infty \| e^{(c+\delta I)\,t} z \|^2 dt \leqslant N_1 \| z \|^2 \int_0^\infty e^{-\nu_1 t}\, dt < \infty$$

т. е.

$$| W\,(z) | \leqslant \left(N_1 \int_0^\infty e^{-\nu_1 t}\, dt \right) \| z \|^2 = N_0 \| z \|^2 \tag{3.6}$$

где N_0 и N_1 — некоторые положительные постоянные.

Полная производная такой функции $W\,(z)$, в силу системы (3.4), будет

$$\Gamma\,(z)\ [C + \delta I]\ z = -\| z \|^2 \tag{3.7}$$

А это, в силу общей теоремы Ляпунова [12,13] об устойчивости,заставляет заключить: заданная формулой (3.5) функция W будет функцией Ляпунова в смысле стационарного уравнения (3.4).

Найдем полную производную по t от функции W. В силу системы (3.4),

$$\begin{gathered} \Gamma\,(z)\, [D\,(t, \beta) + \delta I]\, z = \\ = 2 \int_0^\infty (e^{(C+\delta I)\,s} z,\ e^{(C+\delta I)\,s} D\,(t, \beta)\, z)\, ds + 2\delta \int_0^\infty (e^{(C+\delta I)\,s}\, z,\ e^{(C+\delta I)\,s}\, z)\, ds \end{gathered} \tag{3.8}$$

Так как

$$2\delta \int_0^\infty (e^{(C+\delta I)\,t} z,\ e^{(C+\delta I)\,t} z)\,dt = \|z\|^2 - 2\int_0^\infty (e^{(C+\delta I)\,t} z,\ e^{(C+\delta I)\,t}\, C(\beta)\, z)\,dt$$

то (3.8) перепишем в виде

$$\Gamma(z)\,[D(t, \beta) + \delta I]\, z = -\|z\|^2 + 2\int_0^\infty (e^{(C+\delta I)\,s} z,\ e^{(C+\delta I)\,s}\,[D(t, \beta) - C(\beta)]\, z)\,ds \tag{3.9}$$

Так как W представляет квадратичную форму с постоянными коэффициентами, то найдется отличное от нуля число $\varepsilon(\beta)$ такое, что при выполнении неравенства

$$\|D(t, \beta) - C(\beta)\| < \varepsilon$$

правая часть последнего соотношения будет представлять положительно определенную квадратичную форму переменного z.

Так как $D(t, \beta)$ стремится к пределу $C(\beta)$ при неограниченном росте t, то для любого ε, как бы мало оно ни было, найдется такое T, что при $t \geqslant T$ абсолютная величина разностей $D(t, \beta) - C(\beta)$ будет меньше ε, и, следовательно, для всех значений t, превосходящих T, производная $\Gamma(z)\,[D(t, \beta) + \delta I]\, z$ будет представлять отрицательную функцию.

Таким образом, имеет место следующая теорема. Если спектр матрицы C лежит внутри левой полуплоскости, то невозмущенное движение нестационарной системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Отсюда можно заключить: решения уравнений (2.11) при $t \to \infty$ ведут себя примерно так же, как и решения уравнений (3.2).

4. Доказанная теорема позволяет упростить исследование поведения решения системы уравнений (1.10) — (1.12).

Если в коэффициентах уравнений (1.10) — (1.12) устремить t к бесконечности, то в пределе получаем систему уравнений со стационарными коэффициентами.

Отыскивая решение предельной системы уравнений в виде (2.1) по методике, развитой в п. 2, сведем решение этой системы к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dz/dt = C(\beta)\, z \tag{4.1}$$

причем операторы $D(t, \beta)$ в равенстве (2.11) и $C(\beta)$ в равенстве (4.1) обладают свойствами (3.1). Таким образом, исследование устойчивости решения системы (1.10) — (1.12) можно производить по предельной системе уравнений при предположении, что ряды (2.1) сходятся.

Устремляя в (1.10) — (1.12) время t к бесконечности, получаем предельную систему уравнений в виде

$$\sigma_{ij,\,j}^{\ +} + (\sigma_{jk}^{\circ} u_{i,k}^{\ +})_{,j} + X_i^{+} - \rho u_i^{\cdot\cdot +} = 0$$

$$\begin{gathered}\lambda u_{m,\,m}^{\cdot\,+}\delta_{ij} + \mu\,(u_{i,\,j}^{\cdot\,+} + u_{j,\,i}^{\cdot\,+}) - \sigma_{ij}^{\cdot\,+} = k^{-2}\,[\lambda u_{n,\,n}^{\cdot\,+}\delta_{kl} + \\ + \mu\,(u_{k,\,l}^{\cdot\,+} + u_{l,\,k}^{\cdot\,+}) - \sigma_{kl}^{\cdot\,+}]\,(s_{kl}^{\circ} - c e_{kl}^{p\circ})\,(s_{ij}^{\circ} - c e_{ij}^{p\circ})\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered}\{(2\mu + c)\,\sigma_{ij}^{+} - [{}^2/_3\mu\,(3\lambda + 2\mu) + c\lambda]\, u_{k,\,k}^{\ +}\delta_{ij} - c\mu\,(u_{i,\,j}^{\ +} + u_{j,\,i}^{\ +}) - \\ - \lambda\eta u_{k,\,k}^{\cdot\,+}\delta_{ij} - \mu\eta\,(u_{i,\,j}^{\cdot\,+} + u_{j,i}^{\cdot\,+}) + \eta\sigma_{ij}^{\cdot\,+}\}\,(s_{ij}^{\circ} - c e_{ij}^{p\circ}) = \\ = k_1 e_{ij}^{p\circ}[\lambda u_{k,\,k}^{\ +}\delta_{ij} + \mu\,(u_{i,\,j}^{\ +} + u_{j,\,i}^{\ +}) - \sigma_{ij}^{+}]\end{gathered}$$

с краевыми условиями на поверхности S_F

$$\sigma_{ij}^{+} n_j + \sigma_{jk}^{\circ} u_{i,\,k}^{\ +} n_j = p_i^{+} \tag{4.3}$$

При исследовании краевой задачи (4.3) для уравнений (4.2) используем методику, изложенную в [10].

Решение этих уравнений будем искать в виде

$$u_j^+(x_k,\ t) = U_j(x_k)\, e^{i\omega t}, \qquad \sigma_{jk}^+(x_l,\ t) = \sigma_{jk}(x_l)\, e^{i\omega t} \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.2), получаем

$$\sigma_{ij,\,j} + (\sigma_{jk}^\circ U_{i,\,k})_{,\,j} + X_i(U_k;\ \omega) + \rho\omega^2 U_i = 0, \quad \sigma_{ij}n_j + \sigma_{jk}^\circ U_{i,\,k} n_j = p_i(U_k;\ \omega)$$

$$\begin{aligned}\lambda U_{m,\,m}\delta_{ij} + \mu(U_{j,i} + U_{j,i}) - \sigma_{ij} = k^{-2}[\lambda U_{n,\,n}\delta_{ki} &+ \\ + \mu(U_{k,\,l} + U_{l,\,k}) - \sigma_{kl}]&(s_{kl}^\circ - ce_{kl}^{p\circ})(s_{ij}^\circ - ce_{ij}^{p\circ})\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\Big\{(2\mu + c + s\eta)\sigma_{ij} - \left[\frac{(3\lambda - 2\mu)}{3\mu} + c\lambda + s\lambda\eta\right] U_{k,k}\delta_{ij} &- \\ - (c\mu + s\mu\eta)(U_{i,\,j} + U_{j,\,i})\Big\}(s_{ij}^\circ - ce_{ij}^{p\circ}) &= \\ = k_1 e_{ij}^{p\circ}[\lambda U_{k,\,k}\delta_{ij} + \mu(U_{i,\,j} + U_{j,\,i}) - \sigma_{ij}], \quad s = i\omega&\end{aligned} \tag{4.6}$$

Из соотношений (4.6) можно получить

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x_l) = \lambda U_{k,\,k}\delta_{ij} + \mu(U_{i,\,j} + U_{j,\,i}) &+ \\ + \frac{2\mu^2[{}^2/_3 U_{k,\,k}\delta_{lm} - (U_{l,\,m} + U_{m,\,l})](s_{lm}^\circ - ce_{lm}^{p\circ})}{k^2[2\mu + c + s\eta + k_1 k^{-2} e_{lm}^{p\circ}(s_{lm}^\circ - ce_{lm}^{p\circ})]}&(s_{ij}^\circ - ce_{ij}^{p\circ})\end{aligned} \tag{4.7}$$

Соотношения (4.7) можно трактовать как зависимость между напряженным и деформированным состояниями в анизотропном упругом теле с комплексным модулем упругости.

Повторяя рассуждения, проведенные в [10], можно показать, что если внешние силы обладают потенциалом, то потеря устойчивости может происходить лишь по типу статической неустойчивости, так как при этом соответствующая задача будет самосопряженной.

5. В качестве примера исследуем устойчивость процесса деформирования прямоугольной бесконечной полосы, сжимаемой равномерным давлением p, приложенным к двум противоположным сторонам (фиг. 2).

Исследуется случай плоской деформации, т. е. потеря устойчивости происходит в плоскости x_1ox_2. Пренебрегая для простоты сжимаемостью и полагая $k = \text{const}$, запишем соотношение (4.7) в виде

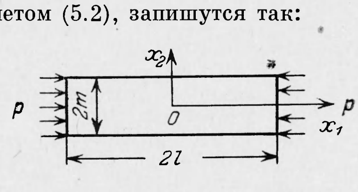
$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \mu(U_{i,\,j} + U_{j,\,i}) - \frac{2\sqrt{2}\mu^2}{k(2\mu + c)}(U_{2,2} - U_{1,1})(s_{ij}^\circ - ce_{ij}^{p\circ}), \quad \sigma = {}^1/_3\sigma_{kk} \tag{5.1}$$

Напряженное состояние полосы до потери устойчивости определяется соотношениями

$$\sigma_{11}^\circ = -p,\ \sigma_{22}^\circ = 0, \qquad \sigma_{12}^\circ = 0, \qquad e_{11}^{p\circ} = -e_{22}^{p\circ} = (k\sqrt{2} - p)/2c, \qquad e_{12}^{p\circ} = 0 \tag{5.2}$$

Уравнения равновесия, определяемые (4.5) с учетом (5.2), запишутся так:

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} - pU_{1,11} &= 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} - pU_{2,22} &= 0\end{aligned} \tag{5.3}$$



Фиг. 2

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{22} = 0, \ \sigma_{12} = 0 \ \text{при} \ x_1 = \pm l, \ x_2 = +m \tag{5.4}$$

Используя уравнения равновесия (5.3), связь между напряжениями и деформациями (5.1), а также условие несжимаемости, получим исходную систему уравнений

$$\begin{aligned}(2\gamma_0 + p_0 - 1)\ U_{1,112} - U_{1,222} - (1 + p_0)\ U_{2,111} + (1 - 2\gamma_0)\ U_{2,122} = 0 \\ U_{1,1} + U_{2,2} = 0, \quad p/\mu = p_0, \quad c/\mu = c_0, \quad 8/(2 + c_0) = \gamma_0\end{aligned} \tag{5.5}$$

Решение уравнений (5.5) следует искать в виде

$$U_1 = f_1(x_2)\sin\alpha x_1, \qquad U_2 = f_2(x_2)\cos\alpha x_1 \tag{5.6}$$

После подстановки (5.6) в (5.5) можно получить уравнение для функции $f_2(x_2)$

$$d^4 f_2/dx_2^4 - \alpha^2 (2 - p_0 - \gamma_0)\, d^2 f_2/dx_2^2 + \alpha^4 (1 - p_0) f_2 = 0 \qquad (5.7)$$

Уравнение (5.7) легко интегрируется, функция $f_2(x_2)$, определяемая из (5.7), представляется суммой четных и нечетных функций.

Ограничиваясь рассмотрением бокового выпучивания пластины, получим

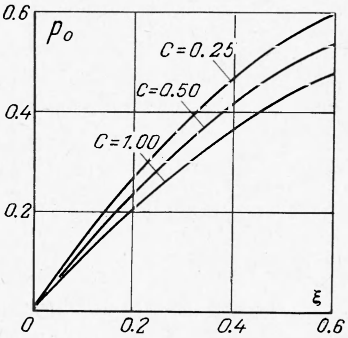
$$f_2(x_2) = A_1 \operatorname{ch} w_1 x_2 + A_2 \operatorname{ch} w_2 x_2 \qquad (5.8)$$

Здесь A_i — произвольные постоянные

$$w_1 = \{(^1/_2\alpha^2)\,\{(2 - \gamma_0 - p_0) + [(p_0 + \gamma_0)^2 - 4\gamma_0]^{1/2}\}\}^{1/2}$$

$$w_2 = \{(^1/_2\alpha^2)\,\{(2 - \gamma_0 - p_0) - [(p_0 + \gamma_0)^2 - 4\gamma_0]^{1/2}\}\}^{1/2}$$

После определения $f_1(x_2)$ и $f_2(x_2)$ найдем U_1 и U_2. Пользуясь соотношениями (5.1) и уравнениями равновесия (5.3), получим компоненты напряжения возмущенного состояния, подстановка которых в граничные условия на свободной поверхности (5.4) приводит к рассмотрению системы алгебраических линейных однородных уравнений относительно постоянных интегрирования.



Фиг. 3

В случае потери устойчивости эта система имеет нетривиальное решение, т. е. ее определитель равен нулю. Отсюда для определения критического давления получим уравнение (5.9)

$$\frac{w_2(\alpha^2 - w_2^2)\,[w_1^2 - \alpha^2(1 - p_0)]}{w_1(\alpha^2 - w_1^2)\,[w_2^2 - \alpha^2(1 - p_0)]} = \operatorname{th}(m w_2) \operatorname{cth}(m w_1)$$

Аналогичным образом можно получить (лишь изменятся индексы корней у тригонометрических множителей) уравнение для определения критической нагрузки, если положить, что при сжатии будем иметь случай двухстороннего выпучивания или же при растяжении образование шейки.

Краевые условия будут удовлетворены, если $\alpha = n\pi/l$ (n — число полуволн). Для тонких полос формула (5.9) может быть упрощена, так как можно использовать разложение тригонометрического множителя в степенной ряд, ограничиваясь, ввиду малости толщины в сравнении с длиной, вторым порядком

$$p_0^3 - [(1/\alpha^2 m^2) - \gamma_0]\, p_0^2 + \gamma_0 (2 + \alpha^2 m^2 \gamma_0)\, p_0 - (\alpha m \gamma_0)^2 = 0 \qquad (5.10)$$

На фиг. 3 дан график зависимости критического значения P_0 в зависимости от $(\alpha m)^2 = \xi$ для уравнения (5.10).

Поступила 5 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 8.
2. Ивлев Д. Д., Легеня И. Д. Устойчивость толстых пластин в общем случае деформационной теории. Тр. Всесоюзн. конф. по устойчивости конструкций. Стройиздат, 1965.
3. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута. ПММ, 1943, т. 7, вып. 2.
4. Ильюшин А. А. Деформация вязко-пластического тела. Уч. зап. Моск. ун-та, 1940, вып. 39.
5. Ржаницын А. Р. Процессы деформирования конструкции из упруго-вязких элементов. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
6. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в состоянии ползучести. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
7. Иванов Г. В. Об устойчивости равновесия при неупругих деформациях. ПМТФ, 1961, вып. 3, № 1.
8. Куршин Л. М. Об устойчивости стержней и пластин в условиях ползучести. Докл. АН СССР, 1961, том 140, № 3.
9. Ивлев Д. Д. К теории сложных сред. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 1.
10. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, 1961.
11. Крейн М. Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Изд. АН УССР, 1964.
12. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
13. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, 1962.