Участвующие в формуле (18) параметры G, Δ, ν, ε заимствованы из работы [1] и означают соответственно следующее: G — модуль сдвига материала подшипника, Δ — эксцентриситет подшипника, ν — коэффициент Пуассона материала подшипника. ε — относительная толщина полимерного подшипника.

Полученная формула (18) контактной температуры удобна для использования в инженерных расчетах.

Поступила 19 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Бабешко В. А., Белоконь А. В., Ворович И. И., Устинов Ю. А. Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины. Изв. АН СССР, МТТ., 1966, № 1.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во «Наука», 1964.
3. Бабешко В. А. Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 30, № 1.
4. Симоненко И. Б. О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки. Изв. Вузов, Математика, 1959, № 2.

ОБ ОЦЕНКАХ ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОФАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ

***В. М. Левин** (Петрозаводск)*

Рассматривается смесь, состоящая из n однородных фаз, обладающих известными свойствами. Геометрия фазовых областей произвольна, смесь в целом считается однородной в статистическом смысле, но в общем случае анизотропной. На фазовой границе предполагаются идеальные условия теплового контакта (температура и тепловой поток непрерывны). Вариационным методом устанавливаются верхние и нижние границы для эффективных коэффициентов теплопроводности смеси при заданных концентрациях и коэффициентах теплопроводности отдельных фаз.

1. Рассмотрим некоторый объем V смеси, ограниченный поверхностью S. Так как теплопроводность фаз различна, то при установившемся тепловом потоке поля градиента температур $\boldsymbol{\tau}$ и векторы потока тепла $\mathbf{f}$ будут микроскопически неоднородны при любой заданной на S температуре. Тензор макроскопических или эффективных коэффициентов теплопроводности K смеси определим следующим образом:

$$-\langle \mathbf{f} \rangle = K \langle \boldsymbol{\tau} \rangle, \tag{1.1}$$

где угловые скобки означают усреднение по объему. Далее будем считать, что объем, по которому берутся средние, является «характерным макроскопическим объемом» [1] смеси.

Пусть в рассматриваемом объеме V многофазной среды r-я фаза с тензором коэффициентов теплопроводности K_r занимает объем V_r. Пусть далее на S задана температура $\theta(S)$ так, что

$$\theta(S) = \tau_i^\circ x_i \tag{1.2}$$

Здесь x_i — декартовы координаты поверхности S, а τ_i° от координат не зависит. В этом случае $\tau^\circ = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle$ в объеме V смеси. Обозначим через $\boldsymbol{\tau}^*$ градиент, который следует из непрерывного поля температур, удовлетворяющего граничным условиям на S, а через $\mathbf{f}^*$ — вектор потока тепла, удовлетворяющий уравнению $\operatorname{div} \mathbf{f}^* = 0$. Для краевой задачи с граничным условием (1.2) имеют место неравенства

$$\Sigma \int_{V_r} \mathbf{f}^* (2 \langle \boldsymbol{\tau} \rangle - R_r \mathbf{f}^*)\, dV_r \leqslant 2 \langle \Phi \rangle V \leqslant \Sigma \int_{V_r} \boldsymbol{\tau}^* K_r \boldsymbol{\tau}^*\, dV_r \tag{1.3}$$

Эти неравенства вытекают из существования потенциалов

$$\Phi = {}^1\!/_2\, \boldsymbol{\tau} K \boldsymbol{\tau}, \qquad \Psi = {}^1\!/_2\, \mathbf{f} R \mathbf{f} \qquad (-f_i = \partial \Phi / \partial \tau_i, \quad -\tau_i = \partial \Psi / \partial t_i, \quad R = K^{-1})$$

и положительной определенности матриц коэффициентов K и R. В неравенствах (1.3) знак Σ означает суммирование по всем r от 1 до n,

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \Phi\, dV = {}^1\!/_2 \langle \boldsymbol{\tau} \rangle K \langle \boldsymbol{\tau} \rangle, \qquad R_r = K_r^{-1} \tag{1.4}$$

2. Как и в теории упругости [2], поставленную задачу определения среднего градиента температурного поля в смеси можно сформулировать в виде задачи для некоторого «сравнительного» материала L_0 с произвольно выбранными свойствами. При этом удобно ввести «поляризованный» вектор потока тепла $\mathbf{q}$ по формуле

$$-\mathbf{f} = K_0\boldsymbol{\tau} - \mathbf{q} \tag{2.1}$$

Здесь K_0 — тензор коэффициентов теплопроводности материала L_0. Так как $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$, то поле температур в материале L_0 будет таким же, как и в смеси, если в L_0 всюду в объеме V действуют источники тепла интенсивностью $\operatorname{div}\mathbf{q}$, причем $\mathbf{q}$ определяется соотношением

$$-\mathbf{q} = (K - K_0)\boldsymbol{\tau} \tag{2.2}$$

В частности, на любой поверхности разрыва в смеси должен быть введен соответствующий слой источников тепла, интенсивность которого на единицу площади определяется величиной скачка локального «источника» $\mathbf{q}$.

Пусть $\mathbf{q}^*$ — произвольное поляризованное поле, аппроксимирующее истинное. Градиент $\boldsymbol{\tau}^*$ непрерывного поля температур, удовлетворяющего условиям на S, выберем в виде градиента температур в материале L_0 с распределенными источниками тепла интенсивностью $\operatorname{div}\mathbf{q}^*$ и соответствующими слоями источников на поверхностях разрыва $\mathbf{q}^*$. Вектор потока тепла $\mathbf{f}^*$, который выбирается в виде $-\mathbf{f}^* = K_0\boldsymbol{\tau}^* - \mathbf{q}^*$, удовлетворяет уравнению $\operatorname{div}\mathbf{f}^* = 0$. Построенные таким образом поля могут быть использованы в неравенствах (1.3). Однако конечный результат будет зависеть от фактического выбора $\mathbf{q}^*$. Возьмем $\mathbf{q}^*$ в виде кусочно-однородного поля, принимающего в V_r постоянное значение, равное

$$-\mathbf{q}^* = (K_r - K_0)\langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle \tag{2.3}$$

Здесь $\langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle$ — усредненное по V_r аппроксимирующее поле $\boldsymbol{\tau}^*$. Вектор $\mathbf{f}^*$ будет иметь теперь вид

$$-\mathbf{f}^* = K_r\langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle + K_0\boldsymbol{\tau}_r' \quad \text{в } V_r \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{\tau}_r' = \boldsymbol{\tau}^* - \langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle$ — отклонение от средних значений в V_r градиента $\boldsymbol{\tau}^*$.

При помощи очевидного равенства $\int\limits_V \mathbf{f}^*(\langle\boldsymbol{\tau}\rangle - \boldsymbol{\tau})\,dV = 0$ и выражения (2.4) неравенства (1.3) приводятся к виду

$$2\langle\Phi\rangle V \leqslant \Sigma\langle\boldsymbol{\tau}\rangle K_r\langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle V_r - \Sigma\int\limits_{V_r}\boldsymbol{\tau}_r'(K_0 - K_r)\boldsymbol{\tau}_r'\,dV_r \tag{2.5}$$

$$2\langle\Phi\rangle V \geqslant \Sigma\langle\boldsymbol{\tau}\rangle K_r\langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle V_r + \Sigma\int\limits_{V_r}\boldsymbol{\tau}_r' K_0(R_0 - R_r)K_0\boldsymbol{\tau}_r'\,dV_r$$

Определим теперь двухвалентный тензор H_r, ассоциированный с приближенными полями $\langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle$, следующим образом:

$$\langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle = H_r\langle\boldsymbol{\tau}\rangle, \qquad (\Sigma c_r H_{ij}{}^r = \delta_{ij},\ c_r = V_r/V) \tag{2.6}$$

Определим далее тензор K^*, как средневзвешенный

$$K^* = \Sigma c_r K_r H_r \tag{2.7}$$

Тогда из неравенств (2.5) вытекает следующая *теорема*: если матрица $K_0 - K_r$ положительно (отрицательно) определена для всех r, то и матрица $K^* - K$ положительно (отрицательно) определена.

3. Построим аппроксимирующее поле $\boldsymbol{\tau}^*$. Градиент $\boldsymbol{\tau}^*$ будет складываться из поля $\boldsymbol{\tau}^q$, порождаемого непосредственно источниками тепла, распределенными в материале L_0, и градиента $\boldsymbol{\tau}^s$ поля температур, удовлетворяющего граничным условиям на S. Если через $Gq_{i,i}^*$ обозначить температуру в точке $\mathbf{r}$, вызванную источником в точке $\mathbf{r}'$, то $\boldsymbol{\tau}^q$ является градиентом температурного поля

$$\theta^q(\mathbf{r}) = \int\limits_\Omega G[q_k^*]\,d\Omega_k + \int\limits_V Gq_{k,l}^*\,dV$$

Здесь $d\Omega_k$ — элемент поверхностей разрыва Ω, $[q_k^*]$ — разность значений q_k^* при переходе через поверхность разрыва Ω. Преобразуя поверхностный интеграл в объемный, получаем

$$\theta^q(\mathbf{r}) = -\int\limits_V \frac{\partial G}{\partial x_k'}q_k^*\,dV$$

Пусть фазы, составляющие смесь, изотропны, т. е. $K_{ij}^r = k_r\delta_{ij}$. Если материал L_0 выбран однородным и изотропным, то

$$G = \frac{1}{4\pi k_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Для этого случая

$$\tau_i^* = \frac{\partial\theta^q}{\partial x_i} + \tau_i^s = \frac{1}{k_0}\Sigma q_k^r\varphi,_{ki}^r + \tau_i^s \tag{3.1}$$

Здесь через q_k^r обозначено постоянное значение, которое принимает вектор q_k^* в V_r,

$$\varphi^r(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_r}\frac{dV_r}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad (\nabla^2\varphi^r = \delta_{rm} \text{ внутри } V_m) \tag{3.2}$$

Градиент $\boldsymbol{\tau}^s$ однороден в силу специальных граничных условий (1.2) и подлежит определению в дальнейшем.

4. Пусть смесь статистически изотропна, т. е. $K_{ij} = k\delta_{ij}$. В этом случае среднее значение $\langle\varphi,_{ij}^r\rangle_m$ величины $\varphi,_{ij}^r$ по объему V_m должно быть изотропным двухвалентным тензором, который с учетом (3.2) имеет вид

$$\langle\varphi^r,_{ij}\rangle_m = {}^1/_3\delta_{rm}\delta_{ij} \tag{4.1}$$

Усредняя выражение (3.1) по объему каждой фазы V_r, учитывая (4.1) и (2.3), получаем n уравнений для определения $\langle\tau_r^*\rangle$:

$$\langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle = \frac{1}{3k_0}\mathbf{q}^r + \boldsymbol{\tau}^s = \frac{1}{3k_0}(k_r - k_0)\langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle + \boldsymbol{\tau}^s \tag{4.2}$$

Решая (4.2) относительно $\langle\tau_r^*\rangle$, находим

$$\langle\boldsymbol{\tau}_r^*\rangle = a_r\boldsymbol{\tau}^s, \qquad a_r = \frac{3k_0}{k_r + 2k_0} \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в соотношение $\langle\tau\rangle = \Sigma\, c_r\langle\tau_r^*\rangle$, определяем $\boldsymbol{\tau}^s$:

$$\boldsymbol{\tau}^s = (\Sigma c_r a_r)^{-1}\langle\boldsymbol{\tau}\rangle \tag{4.4}$$

Из (4.3), (4.4) и (2.6) найдем H_r, после чего из (2.7) получим окончательно

$$k^* = \Sigma c_r k_r a_r(\Sigma c_r a_r)^{-1} \tag{4.5}$$

Границы для k находятся следующим образом. Пусть самый большой и самый малый из фазовых коэффициентов теплопроводности k_r будут k_α и k_β. Тогда в соответствии с теоремой п. 2 лучшую верхнюю границу получим, положив $k_0 = k_\alpha$, и лучшую нижнюю, положив $k_0 = k_\beta$. Границы для k могут быть представлены в виде

$$[\Sigma c_r(2k_\beta + k_r)^{-1}]^{-1} - 2k_\beta \leqslant k \leqslant [\Sigma c_r(2k_\alpha + k_r)^{-1}]^{-1} - 2k_\alpha \tag{4.6}$$

Для частного случая двухфазной смеси при $k_1 > k_2$ будем иметь

$$k_2\frac{3c_1k_1 + c_2(k_1 + 2k_2)}{3c_1k_2 + c_2(k_1 + 2k_2)} \leqslant k \leqslant k_1\frac{3c_2k_2 + c_1(k_2 + 2k_1)}{3c_2k_1 + c_1(k_2 + 2k_1)} \tag{4.7}$$

При $c_1 \ll 1$ обе границы (4.7) совпадают с выражением для макроскопического коэффициента теплопроводности среды со сферическими включениями, полученными в [3] (§ 4 гл. XVI) в предположении, что включения никак не взаимодействуют друг с другом. Используя концепцию «сферического композитного элемента» [4], нетрудно убедиться, что каждая из границ (4.7) является точным выражением для макроскопического коэффициента теплопроводности среды со сферическими включениями, диаметры которых колеблются от некоторых конечных до исчезающе малых. Этим, в частности, доказывается тот факт, что границы (4.6) являются лучшими из всех возможных при данной информации о структуре смеси.

5. Рассмотрим теперь частный вид смеси, в которой фазовые области являются прямолинейными непрерывными цилиндрами с параллельными образующими и произвольной формой поперечного сечения. Предполагается, что смесь в целом макроскопически однородна и трансверсально изотропна. Фиксируем оси координат x_i так, чтобы ось x_1 совпадала с образующими цилиндров. В этих осях связь между ($\mathbf{f}$) и ($\boldsymbol{\tau}$) будет иметь вид

$$-\langle\mathbf{f}_1\rangle = k_{11}\langle\boldsymbol{\tau}_1\rangle, \qquad -\langle\mathbf{f}_i\rangle = k_{22}\langle\boldsymbol{\tau}_i\rangle \qquad (i = 2, 3) \tag{5.1}$$

Здесь k_{11} и k_{22} — эффективные коэффициенты теплопроводности смеси в направлениях, соответственно параллельном и перпендикулярном оси x_1. Все изложенное выше остается для этого случая в силе. Установившийся поток тепла вдоль одной из осей x_2 или x_3 от x_1 не зависит, и мы имеем плоский аналог рассмотренной задачи. Потенциал φ^r будет логарифмическим

$$\varphi^r(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{S_r} \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,dS_r \tag{5.2}$$

со средним значением $\langle\varphi^r{}_{,ij}\rangle_m$ в S_m, равным

$$\langle\varphi^r_{,ij}\rangle_m = {}^1/_2\delta_{rm}\delta_{ij} \qquad (i, j = 2, 3) \tag{5.3}$$

Совершенно аналогично предыдущему получим следующие границы для k_{22}

$$\left[\sum c_r(k_\beta + k_r)^{-1}\right]^{-1} - k_\beta \leqslant k_{22} \leqslant \left[\sum c_r(k_\alpha + k_r)^{-1}\right]^{-1} - k_\alpha \tag{5.4}$$

Так как φ^r от x_1 не зависит, то $\langle\tau_1{}^r\rangle = \tau_1{}^s = \langle\tau_1\rangle$. Следовательно, границы для k_{11} совпадают

$$k_{11} = \sum c_r k_r \tag{5.5}$$

Все сказанное относительно границ в конце п. 4 справедливо и в рассматриваемом случае, если включениями являются прямолинейные круговые цилиндры, диаметры которых колеблются от некоторых конечных до исчезающе малых.

6. В заключение отметим, что предложенная Хиллом [5] «самонепротиворечивая» модель двухфазной сплошной среды может быть использована и для рассматриваемой здесь задачи. В соответствии с основным постулатом упомянутой модели поля $\boldsymbol{\tau}_r$ и $\mathbf{f}_r$ в V_r ($r = 1, 2$) отождествляются с градиентом температуры и потоком тепла в одном включении из материала r-й фазы, помещенным в неограниченную среду с искомым коэффициентом теплопроводности при соответствующих краевых условиях на бесконечности. Если включение имеет простую геометрическую форму (сфера, круговой цилиндр), то краевые задачи легко решаются [3] и поля $\boldsymbol{\tau}_r$ и $\mathbf{f}_r$ во включении получаются однородными.

Пусть двухфазная смесь макроскопически изотропна. Функциональное уравнение для определения k можно получить из предыдущего анализа, если отождествить материал L_0 с самой неоднородной средой. Коэффициент теплопроводности k тогда найдется как положительный корень квадратного уравнения

$$3c_1k(k_1 + 2k)^{-1} + 3c_2k(k_2 + 2k)^{-1} = 1 \tag{6.1}$$

Точно так же для коэффициента k_{22} смеси, рассмотренной в п. 5, получим уравнение

$$2c_1k_{22}(k_1 + k_{22})^{-1} + 2c_2k_{22}(k_2 + k_{22})^{-1} = 1 \tag{6.2}$$

Можно показать [5], что значения для k и k_{22}, найденные из (6.1) и (6.2), всегда находятся между границами (4.7) и (5.4) при $n = 2$, если $k_1 > k_2$, и, следовательно, могут служить хорошей аппроксимацией в тех случаях, когда эмпирическая интерполяция между границами почему-либо затруднена.

Поступила 18 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Hill R. Efastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. J. Mech. Phys. Solids, 1963, vol. 11, No. 5 (рус. пер: Хилл Р. Упругие свойства составных тел. Некоторые теоретические принципы. Механика, Сб. пер. и обозн. иностр., лит., 1964, № 5).
2. Walpole L. J. On bounds for the overall efastic moduli of inhomogeneous systems — I. J. Mech. Phys. Solids, 1966, vol. 14, No. 3.
3. Carslow H. S., Jaeger I. C. Conduction of heat in solids. (рус. пер: Г. С. Карслоу и Д. К. Егер. Теплопроводность твердых тел. Изд-во «Наука», 1964).
4. Hashin Z. The elastic moduly of heterogeneous materials. J. Appl. Mech., Trans. ASME, ser. E, 1962, vol. 29, 173 (рус. пер: Хашин Ц. Упругие модули неоднородных материалов. Прикладная механика, 1962, № 1).
5. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials., J. Mech. Phys. Solids, 1965, vol. 13, No. 4.