УДК 517.53/57

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ШАРОВ

Р. М. Гарипов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: garipov@hydro.nsc.ru

Рассматривается динамическая система одинаковых шаров в сосуде как модель газа. Шары и стенки сосуда предполагаются абсолютно жесткими и упругими. Для трехмерного движения выводится цепочка уравнений Боголюбова в форме, которая ранее не встречалась в литературе. Показано, что причиной необратимости кинетического уравнения Больцмана является приближенное описание динамической системы. Для одномерного движения шаров вдоль отрезка прямой между стенками цепочка Боголюбова замыкается в классе мультипликативных распределений путем предельного перехода, когда число шаров стремится к бесконечности, а сумма их диаметров остается постоянной. Полученное кинетическое уравнение сильно отличается по структуре от уравнения Больцмана. Например, оно обратимо. Из него выводятся уравнения многоскоростной "гидродинамики". Устанавливается существование решения в целом по времени. Показано, что в классе произвольных распределений не существует замкнутого кинетического уравнения на 1-частичную проекцию.

Ключевые слова: эргодичность, необратимость, s-частичная проекция, кинетическое уравнение, s-мультипликативное распределение, кристаллографическая группа, гидродинамика.

1. Эргодичность и необратимость. Модель молекул как абсолютно жестких упругих шаров сыграла важную роль в кинетической теории газов. Проблема вывода кинетического уравнения обсуждалась в начале XX в. Когда Л. Больцман вывел свое знаменитое кинетическое уравнение для такой системы, оно оказалось необратимым, т. е. неинвариантным относительно изменения направления отсчета времени, хотя исходная система уравнений движения шаров и законы их столкновений обратимы [1]. Это несоответствие вызвало в свое время резкую критику. Анализируя свой вывод, Л. Больцман был вынужден добавить к рассматриваемой динамической системе дополнительную гипотезу "молекулярного хаоса". Впоследствии Н. Н. Боголюбов дал следующую математическую формулировку этой гипотезы [2].

Н. Н. Боголюбов рассмотрел уравнение Лиувилля на плотность вероятности $w(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{v}_N)$ (t — время; $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{v}_k$ — координаты центра и скорость k-го шара). На границе конфигурационного пространства точек $x = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$ — цилиндрах вида $|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| = d_1$ ($1 \leqslant i < j \leqslant N$) ($d_1$ — диаметр шаров; $|\boldsymbol{x}_k|$ — длина вектора $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^3$) и стенке сосуда функция w удовлетворяет граничным условиям, вытекающим из законов столкновения. В пространстве скоростей $v = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ границы отсутствуют.

Граничная задача на функцию w равносильна исходной динамической системе, но имеет ряд преимуществ. Во-первых, поскольку шары предполагаются одинаковыми, начальную функцию $w(0, x, v)$ можно выбрать симметричной, т. е. не меняющейся при произвольной перестановке ее переменных, соответствующей перестановке шаров. Тогда это свойство сохранится при $t > 0$. Во-вторых, можно рассмотреть s-частичные проекции, полученные интегрированием плотности вероятности по фазовому пространству $N-s$ частиц:

$$w_s(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{x}_s,\boldsymbol{v}_s)=\int w(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{x}_N,\boldsymbol{v}_N)\,d\boldsymbol{x}_{s+1}\,d\boldsymbol{v}_{s+1}\cdots d\boldsymbol{x}_N\,d\boldsymbol{v}_N$$

$$(s=1,2,\dots).$$

Эти функции, если s невелико, уже доступны физическому измерению. Например, Nw_1 имеет смысл средней плотности частиц в фазовом пространстве одной частицы. Кинетическое уравнение Больцмана пишется для 1-частичной проекции w_1.

Пусть для определенности внешние силовые поля отсутствуют. Тогда система уравнений движения шаров имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i=\boldsymbol{v}_i,\qquad \dot{\boldsymbol{v}}_i=0\qquad (i=1,\dots,N),\tag{1.1}$$

где точка сверху обозначает производную по времени. Обозначим через $\Omega'\subset\mathbb{R}^3$ сосуд, в котором находятся N одинаковых шаров, а через $\Omega\subset\Omega'$ — замкнутое подмножество, отстоящее от стенок сосуда на расстояние $d_1/2$. Стенки сосуда $\partial\Omega'$ предположим гладкой поверхностью, такой что шар диаметром d_1 может касаться ее только в одной точке. Тогда для каждой точки $\boldsymbol{x}$ границы $\partial\Omega$ области Ω имеется единственная ближайшая точка $\boldsymbol{x}'\in\partial\Omega'$ и вектор $\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})2d_1^{-1}$ является общей внешней нормалью к $\partial\Omega$ и $\partial\Omega'$ в точках $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$. Стенки сосуда, как и шары, предполагаются абсолютно жесткими и упругими. Центры шаров $\boldsymbol{x}_i$ могут находиться в любой точке из Ω. Фазовое пространство системы (1.1) равно $\Phi=Q\times\mathbb{R}^{3N}$, где

$$Q=\Omega^N\setminus\Big(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N}\{x\colon |\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|<d_1\}\Big).$$

Отражение траектории $(x(t),v(t))$ $(0\leqslant t<\infty)$ системы (1.1) от границы $\partial\Phi$ фазового пространства Φ определяется законами столкновений. В результате соударения координата $x\in\partial Q$ не меняется, а скорость $v\in\mathbb{R}^{3N}$ скачком принимает новое значение v':

$$\boldsymbol{v}_i'=\boldsymbol{v}_i-2(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n},\quad \text{если } \boldsymbol{x}_i\in\partial\Omega \text{ и } \boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}>0;\tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{v}_i'=\boldsymbol{v}_i-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e},\quad \boldsymbol{v}_j'=\boldsymbol{v}_j+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e},\quad \text{если } |\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|=d_1 \text{ и } \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}>0.\tag{1.3}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i)d_1^{-1}$; $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j$. Это парные соударения. Столкновения более высокого порядка претерпевает множество траекторий меры 0, которое отбрасывается.

Запишем уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{i=1}^N\boldsymbol{v}_i\cdot\nabla_i w=0,\tag{1.4}$$

где ∇_i — градиент по $\boldsymbol{x}_i$. Решение w уравнения (1.4) имеет постоянное значение вдоль траектории системы (1.1), поэтому естественно принять в качестве граничного условия, что оно сохраняется при отражении траектории от границы: $w(t,x,v)=w(t,x,v')$ для $(x,v)\in\partial\Phi$. Поскольку обратное отображение $v'\to v$ дается теми же формулами (1.2), (1.3), это равенство справедливо во всех точках границы фазового пространства, а не только на концах приходящих траекторий.

Решение уравнения Лиувилля, удовлетворяющее указанному граничному условию, однозначно определяется своим начальным значением, так что возникает линейный оператор S^t: $w(0,x,v)\to w(t,x,v)$, зависящий от параметра t. Легко доказать, что интеграл от w по Φ остается постоянным во времени, поэтому нормировка плотности вероятности

$\int\limits_{\Phi} w\,dx\,dv = 1$ сохраняется. Последнее свойство также влечет принятое граничное условие. Уравнению (1.4) и граничным условиям удовлетворяет функция вида

$$w = f(E),$$

где $E = (|\boldsymbol{v}_1|^2 + \ldots + |\boldsymbol{v}_N|^2)/2$ — энергия системы (если массу шара принять равной единице); f — произвольная функция одной переменной. Если $w(0, x, v) = 0$ при $E \geqslant E_0$, то $w(t, x, v) = 0$ при $E \geqslant E_0$ для любого момента времени t.

Для того чтобы получить уравнение на s-частичную проекцию w_s, надо проинтегрировать уравнение (1.4) по фазовому пространству шаров с номерами $s+1$, ..., N, т. е. по сечению $\bar{\Phi}$ фазового пространства Φ при фиксированных $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{v}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Выше s-частичная проекция w_s определена как интеграл от w по $\bar{\Phi}$. Множество $\bar{\Phi}$ имеет вид $\bar{Q} \times \mathbb{R}^{3(N-s)}$, а его граница — вид $\partial\bar{Q} \times \mathbb{R}^{3(N-s)}$, где $\bar{Q}$ — сечение конфигурационного пространства Q при фиксированных координатах $\boldsymbol{x}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Граница $\partial\bar{Q}$ сечения $\bar{Q}$ является объединением непересекающихся (за исключением множества меры 0) компонент, равных пересечениям с $\bar{Q}$ следующих поверхностей:

— стенок:

$$\bigcup_{i=s+1}^{N} \{x\colon \boldsymbol{x}_i \in \partial\Omega\};$$

— цилиндров:

$$\bigcup_{s<i<j\leqslant N} \{x\colon |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| = d_1\};$$

— сфер:

$$\bigcup_{i=1}^{s} \bigcup_{j=s+1}^{N} \{x\colon |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| = d_1\}.$$

Интеграл по $\partial\bar{Q}$ равен сумме интегралов по данным компонентам.

Производную по времени можно вывести за знак интеграла проекции w_s. Рассмотрим интеграл следующих s слагаемых. Так как от $\boldsymbol{x}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ зависят только граничные сферы, то имеем

$$\int\limits_{\bar{\Phi}} \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_i w\,d\bar{x}\,d\bar{v} = \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_i w_s - \sum_{j=s+1}^{N} \int\limits_{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| = d_1} \boldsymbol{v}_i \cdot (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) d_1^{-1}\,d\bar{x}\,d\bar{v}. \tag{1.4$'$}$$

Здесь $d\bar{x}\,d\bar{v} = d\boldsymbol{x}_{s+1}\,d\boldsymbol{v}_{s+1} \cdots d\boldsymbol{x}_N\,d\boldsymbol{v}_N$, во второй части равенства интегрирование производится по множеству

$$(\{x\colon |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| = d_1\} \cap \bar{Q}) \times \mathbb{R}^{3(N-s)},$$

$d\boldsymbol{x}_j$ обозначает дифференциал площади сферы $|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| = d_1$.

Интеграл от остальных слагаемых уравнения Лиувилля преобразуется согласно формуле Гаусса — Остроградского в поверхностный интеграл от $(\boldsymbol{v}_{s+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{s+1} + \ldots + \boldsymbol{v}_N \cdot \boldsymbol{\nu}_N) w$ по $\partial\bar{\Phi}$, где $(\boldsymbol{\nu}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{\nu}_N)$ — внешняя нормаль к $\partial\bar{Q}$.

Рассмотрим интеграл по стенке $\{x\colon \boldsymbol{x}_i \in \partial\Omega\}$ $(s < i \leqslant N)$. Так как внешняя нормаль к этой поверхности имеет одну ненулевую компоненту $\boldsymbol{\nu}_i = \boldsymbol{n}$, то интегрируется функция $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n} w$ по декартову произведению (пересечения с $\bar{Q}$) этой стенки и $\mathbb{R}^{3(N-s)}$. При фиксированном $\bar{x} = (\boldsymbol{x}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$ выполним интегрирование по $\bar{v} = (\boldsymbol{v}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$. Область интегрирования $\mathbb{R}^{3(N-s)}$ разобьем на две подобласти неравенствами $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n} > 0$ и $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n} < 0$. В подобласти $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n} > 0$ сделаем замену переменной интегрирования $\boldsymbol{v}_i \to \boldsymbol{v}'_i$ с помощью отображения (1.2). Так как

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{v}'_i \cdot \boldsymbol{n}, \qquad d\boldsymbol{v}_i = d\boldsymbol{v}'_i,$$

то в результате получим интеграл, отличающийся от интеграла по оставшейся подобласти $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n} < 0$ только знаком (и обозначением переменных интегрирования) в силу граничного условия на w. Таким образом, интегралы по стенкам равны нулю.

Далее, внешняя нормаль к цилиндру $\{x\colon |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| = d_1\}$ $(s < i < j \leqslant N)$ имеет только две ненулевые компоненты: $\boldsymbol{\nu}_i = -(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)d_1^{-1}/\sqrt{2}$ и $\boldsymbol{\nu}_j = -\boldsymbol{\nu}_i$. Поэтому интегрируется функция

$$(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \cdot ((\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i)d_1^{-1}/\sqrt{2}\,)w.$$

Область интегрирования $\mathbb{R}^{3(N-s)}$ по $\bar{v}$ вновь разобьем на две подобласти неравенством

$$(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \cdot (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i) > 0$$

и противоположным ему. В интеграле по первой подобласти сделаем замену переменных интегрирования (1.3). В силу равенств

$$(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \cdot (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i) = -(\boldsymbol{v}'_i - \boldsymbol{v}'_j) \cdot (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i), \qquad d\boldsymbol{v}_i d\boldsymbol{v}_j = d\boldsymbol{v}'_i d\boldsymbol{v}'_j$$

и граничного условия $w(t,x,v) = w(t,x,v')$ он взаимно уничтожится с интегралом во второй подобласти. Итак, интегралы по цилиндрам также равны нулю.

Остаются интегралы по сферам. Нормаль к сфере $\{x\colon |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| = d_1\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s < j \leqslant N)$ имеет только одну ненулевую компоненту $\boldsymbol{\nu}_j = (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)d_1^{-1}$, поэтому интегрируется функция $\boldsymbol{v}_j \cdot (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)d_1^{-1}w$. Просуммировав эти интегралы по j и сложив с интегралом (1.4′), заметим, что выражение под знаком суммы не зависит от значения индекса j из-за симметричности плотности вероятности w и множества $\bar{Q}$. Поэтому можно положить $j = s+1$, а сумму по j заменить множителем $N - s$. Окончательно получим

$$\frac{\partial w_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_i w_s = J_{s+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, N), \tag{1.5}$$

где $w_N = w$; $J_{N+1} = 0$; при $s < N$ имеем

$$J_{s+1} = (N-s)\sum_{i=1}^{s} \int (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{s+1}) \cdot (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{s+1}) \times$$
$$\times\, d_1^{-1} w_{s+1}(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{s+1}, \boldsymbol{v}_{s+1})\, d\boldsymbol{x}_{s+1}\, d\boldsymbol{v}_{s+1}. \tag{1.6}$$

Здесь интегрирование по $\boldsymbol{x}_{s+1}$ производится по частям сфер $|\boldsymbol{x}_{s+1} - \boldsymbol{x}_i| = d_1$ $(i = 1, \ldots, s)$, лежащим в Ω и вне друг друга ($d\boldsymbol{x}_{s+1}$ — дифференциал площади сферы), а интегрирование по $\boldsymbol{v}_{s+1}$ — по пространству $\mathbb{R}^3$. Функция w_s имеет область определения и удовлетворяет граничным условиям как плотность вероятности динамической системы из s шаров. Действительно, для проекции w_s сохраняют смысл условия $\boldsymbol{x}_i \in \Omega$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ и неравенства $|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| \geqslant d_1$ $(1 \leqslant i < j \leqslant s)$. Столкновениям с участием j-го шара $(j > s)$ соответствует подмножество $\Psi \subset \bar{\Phi}$ меры 0, поэтому

$$w_s(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{v}_s) = \int\limits_{\bar{\Phi}\setminus\Psi} w(t,x,v)\, d\bar{x}\, d\bar{v}.$$

Положив в правой части этого равенства $w(t,x,v) = w(t,x,v')$, получим граничное условие на w_s, соответствующее соударениям (1.2), (1.3), в которых участвуют только шары с номерами $1,\ldots,s$. Утверждение доказано. Цепочка граничных задач (1.5), (1.6) Боголюбова равносильна исходной динамической системе (1.1)–(1.3) и поэтому обратима, т. е. инвариантна относительно замены переменных $t \to -t$, $v \to -v$.

Обычно цепочку уравнений Боголюбова выводят для случая парного потенциального взаимодействия частиц. Столкновительный интеграл в форме (1.6) ранее в литературе не встречался.

Рассмотрим подробнее столкновительный интеграл J_2. Сделаем в нем замену переменной интегрирования $\boldsymbol{x}_2 \to \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)d_1^{-1}$, $|\boldsymbol{e}| = 1$, $d\boldsymbol{x}_2 = d_1^2 d\boldsymbol{e}$. Область интегрирования $\mathbb{R}^3$ по $\boldsymbol{v}_2$ разобьем на две подобласти неравенством $(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{e} > 0$ и противоположным ему. Во второй подобласти сделаем замену переменной интегрирования $\boldsymbol{e} \to -\boldsymbol{e}$ и согласно граничному условию положим

$$w_2(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{e}d_1,\boldsymbol{v}_2) = w_2(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{e}d_1,\boldsymbol{v}_2'),$$

где $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) \to (\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2')$ — отображение (1.3). Чтобы получить кинетическое уравнение Больцмана, надо предположить равенство

$$\begin{aligned} w_2(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{e}d_1,\boldsymbol{v}_2') - w_2(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{e}d_1,\boldsymbol{v}_2) \simeq \\ \simeq w_1(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1')w_1(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_2') - w_1(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1)w_1(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_2) \\ \text{при} \quad (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{e} > 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Следовательно, это и есть гипотеза “молекулярного хаоса”. Тогда уравнение (1.5) при $s = 1$ примет классический вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1\cdot\nabla_1 w_1 = (N-1)d_1^2 \int\limits_{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{e}>0} (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{e} \times \\ \times \left(w_1(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1')w_1(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_2') - w_1(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1)w_1(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_2)\right) d\boldsymbol{e}\, d\boldsymbol{v}_2. \end{aligned} \tag{1.8}$$

В уравнении (1.8) замена $t \to -t$, $\boldsymbol{v}_1 \to -\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \to -\boldsymbol{v}_2$ уже недопустима, так как при этом меняется область интегрирования или, если заменить одновременно $\boldsymbol{e} \to -\boldsymbol{e}$, левая и правая части уравнения приобретают разные множители ∓ 1. Таким образом, уравнение (1.8) необратимо. Необратимость возникла вследствие гипотезы “молекулярного хаоса” (1.7).

Парадокс необратимости кинетического уравнения Больцмана был разрешен П. С. и Т. А. Эренфестами, которые поняли, что 1-частичная проекция w_1 не характеризует однозначно состояние динамической системы, или полную функцию w [3]. Поэтому функция w_1 эволюционирует к более вероятному значению из-за неконтролируемых изменений динамической системы. Отсюда следует также, что детерминированная эволюция w_1 возможна только в каком-то узком классе распределений w. Н. Н. Боголюбов выводит кинетическое уравнение на w_1 в классе распределений w, обладающих свойством: каждая s-частичная проекция w_s однозначно определяется 1-частичной проекцией w_1. Но он не приводит ни одного примера распределения w, как принадлежащего, так и не принадлежащего этому классу [2].

Я. Г. Синаем и Н. И. Черновым доказана эргодичность динамической системы (1.1)–(1.3) (см. [4]). Физический смысл эргодичности заключается в следующем: какое бы ни было начальное состояние системы с энергией E_0, система пребывает одинаковое среднее время в каждой окрестности на поверхности постоянной энергии $E = E_0$, если эти окрестности имеют одинаковую площадь. Математическая формулировка следующая: для любого начального распределения w_0 найдется функция одной переменной f, такая что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t (S^\tau w_0)\, d\tau = f\Big(\frac{|\boldsymbol{v}_1|^2}{2} + \ldots + \frac{|\boldsymbol{v}_N|^2}{2}\Big). \tag{1.9}$$

Это утверждение доказывается в подходящем функциональном пространстве. Влечет ли эргодичность гипотезу "молекулярного хаоса" или необратимость? Нет. Если в левой части равенства (1.9) устремить $t \to -\infty$, то получим ту же функцию в правой части. Таким образом, эргодичность не выделяет из двух направлений отсчета времени одно как преимущественное.

2. Пример необратимости. Как показано в п. **1**, причиной возникновения необратимости кинетического уравнения Больцмана является приближение (1.7), т. е. неточное, неполное описание динамической системы. Полное же описание лишено смысла, так как недоступно экспериментальной проверке. Эта точка зрения на природу физической необратимости согласуется с работой [3]. Наиболее точно ее иллюстрирует следующий простой пример.

В гильбертовом пространстве L_2 квадратично интегрируемых периодических функций с периодом 1 определим унитарный оператор U формулой

$$(Uf)(x) = \exp(2\pi ix)f(x).$$

Рассмотрим полугруппу операторов $\{U^n\}$ с дискретным параметром $n = 0, 1, 2, \ldots$ в качестве аналога однопараметрической полугруппы $\{S^t\}$ (см. п. **1**). Для любых функций $f, g \in L_2$ имеем

$$(U^n f, g) = \int\limits_0^1 \exp(2\pi inx)f(x)g(x)^*\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.1}$$

где $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ — скалярное произведение в L_2; знак "$*$" обозначает комплексное сопряжение. Так как функция $f(x)g(x)^*$ абсолютно интегрируема, то это утверждение вытекает из теоремы Римана. Можно ли утверждать по этой причине, что "динамическая система" $\{U^n\}$ необратима? Нет, потому что, устремляя $n \to -\infty$, получим в пределе тот же нуль.

Предположим, что известно лишь осредненное значение функции $f \in L_2$

$$\bar f(x) = (Pf)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (2\pi\chi)^{-1/2} \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2\chi}\Big) f(y)\,dy,$$

где $\chi > 0$ — малая, но фиксированная константа. Любой измерительный прибор производит подобное осреднение. Оператор осреднения P является непрерывным и взаимно однозначным, но обратный оператор P^{-1} неограничен и не всюду определен. Имеем отображение

$$\bar f = Pf \to PUf = (PUP^{-1})Pf = (PUP^{-1})\bar f.$$

Отсюда следует, что эволюция осредненных значений $\overline{U^n f}$ определяется оператором $U' = PUP^{-1}$ и, таким образом, возникает новая полугруппа $\{U'^n\}$.

Для того чтобы найти область определения оператора U', функцию $f \in L_2$ разложим в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(2\pi ikx).$$

Тогда функции Uf и Pf имеют k-е коэффициенты Фурье c_{k-1} и $b^{-k^2}c_k$ соответственно, где $b = \exp(8\pi^2\chi) > 1$. Отсюда по формуле Парсеваля получим условие того, что $U'^n f \in L_2$:

$$\|U'^n f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b^{-2nk-n^2} c_k|^2 < \infty. \tag{2.2}$$

Следовательно, полугруппа $\{U'^n\}$ определена только на функциях $f \in L_2$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют неравенству (2.2) для любого целого положительного числа n, т. е. убывают при $k \to -\infty$ быстрее любой экспоненты, например как b^{-k^2}. Подмножество таких функций обозначим D_+. Эта полугруппа необратима, так как обратный оператор U'^{-1} даже не определен на всем подмножестве $D_+ \subset L_2$. Таким образом, получили пример необратимой системы $\{U'^n\}$ исходя из обратимой $\{U^n\}$. Необратимость внесли оператор осреднения P и подмножество функций $D_+ \subset L_2$. Очевидна аналогия оператора P с проекцией $w \to w_1$, а множества D_+ — с классом распределений w Боголюбова.

Можно рассмотреть также подмножество функций $D_- \subset L_2$, коэффициенты Фурье которых убывают быстрее экспоненты при $k \to \infty$. Тогда неравенство (2.2) будет выполнено для любого $n \leqslant 0$. Следовательно, на подмножестве D_- определена необратимая полугруппа, которая эволюционирует в “прошлое” $n \to -\infty$. Итак, преимущественное направление отсчета “времени” n определяется выбором подмножества D_+ или D_-. На подмножестве $D_+ \cap D_-$ полугруппа $\{U'^n\}$ обратима в том смысле, что оба направления отсчета n равноправны.

3. Одномерное движение. Замена координат $x \to y$. В одномерном случае координаты центров и скорости шаров обозначим $x = (x_1, \dots, x_N)$ и $v = (v_1, \dots, v_N)$ соответственно. Шары пронумеруем слева направо, так что имеют место неравенства

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 - d_1 \leqslant \ldots \leqslant x_N - (N-1)d_1 \leqslant 1. \tag{3.1}$$

Этот симплекс обозначим D_x, а фазовое пространство $D_x \times \mathbb{R}^N$ — через Φ_x. Таким образом, центры шаров не выходят за пределы отрезка $[0, a]$ $(a = 1 + (N-1)d_1)$, который в данном случае играет роль множества Ω. Законы соударений сильно упрощаются. Шары отражаются от концов отрезка $[0, a]$, меняя свою скорость на противоположную, а при столкновении друг с другом обмениваются скоростями. В уравнении Лиувилля (1.4) $\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_i$ заменяется на $v_i \partial/\partial x_i$.

Однако если плотность вероятности $w(t, x, v)$ задана только в симплексе (3.1), то нельзя определить s-частичные проекции. Поэтому продолжим функцию w на множество $[0, a]^N \times \mathbb{R}^N$ по свойству симметрии. Пусть S — группа перестановок чисел $1, 2, \dots, N$. Если $\sigma \in S$, то через σ обозначим также следующие линейные отображения:

$$x \to (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)}), \quad (x, v) \to (\sigma x, \sigma v), \quad f(x, v) \to f(\sigma^{-1}x, \sigma^{-1}v).$$

Множество симплексов σD_x $(\sigma \in S)$ покрывает куб $[0, a]^N$, за исключением щелей $|x_i - x_j| < d_1$ $(1 \leqslant i < j \leqslant N)$, в которых положим $w = 0$ для любого $v \in \mathbb{R}^N$. На множестве $\sigma\Phi_x$ определим плотность вероятности равенством $w = \sigma(w|_{\Phi_x})$. Здесь $w\big|_{\Phi_x}$ — сужение функции w на множество Φ_x.

Сделаем замену координат:

$$x_i \to y_i = x_i - (i-1)d_1 \qquad (i = 1, \dots, N).$$

При этом симплекс D_x перейдет в D:

$$0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_N \leqslant 1. \tag{3.2}$$

Симплексы σD $(\sigma \in S)$ покрывают единичный куб $Q_1 = [0, 1]^N$ без щелей и перекрытий. Аналогично покрывается больший куб $Q_2 = [-1, 1]^N$ отражениями Q_1 в координатных плоскостях. Таким образом, появляется группа отражений R. Элемент $\rho \in R$ действует по формуле $\rho y = (\chi_1 y_1, \dots, \chi_N y_N)$, где $\chi_i = \pm 1$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$. Наконец, сдвигами куба Q_2 на векторы с целыми четными координатами можно замостить все пространство $\mathbb{R}^N$. Соответствующую группу трансляций обозначим T. Группы R и T коммутативны и перестановочны с каждым элементом из S и RS соответственно. Отражение $\rho \in R$ и трансляция $\tau \in T$ на вектор $\bar{\tau}$, как и перестановка, порождают линейные операторы

$$(\rho f)(y, v) = f(\rho^{-1}y, \rho^{-1}v), \qquad (\tau f)(y, v) = f(y - \bar{\tau}, v).$$

В отличие от перестановок и отражений трансляции не меняют скорость.

Пусть $w'(t, y, v) = w(t, x, v)$ — решение уравнения Лиувилля в фазовом пространстве $\Phi = D \times \mathbb{R}^N$, удовлетворяющее граничным условиям. Продолжив его с помощью группы S: $w' = \sigma(w'|_\Phi)$ на $\sigma\Phi$ ($\sigma \in S$), получим решение в множестве $\Phi_1 = Q_1 \times \mathbb{R}^N$.

Далее продолжим w' с Φ_1 на $\Phi_2 = Q_2 \times \mathbb{R}^N$ с помощью группы R. Это продолжение $w'\big|_{\Phi_2}$ инвариантно относительно группы R по построению, но оно будет инвариантным также относительно группы S в силу перестановочности R с каждым элементом из S. Затем продолжим w' с Φ_2 на $\mathbb{R}^{2N}$ с помощью группы T. В результате получится решение уравнения Лиувилля в $\mathbb{R}^{2N}$, инвариантное относительно группы TRS. Если начальное значение $w'_0(y, v)$, заданное на Φ, продолжить на $\mathbb{R}^{2N}$ указанным образом, то решение представится явной формулой

$$w'(t, y, v) = w'_0(y - vt, v). \tag{3.3}$$

В координатах y получается система как бы невзаимодействующих частиц. Поэтому каждая s-частичная проекция однозначно определяется своим начальным значением.

4. Кинетическое уравнение. Выразим 1-частичную проекцию w_1 в координатах x через симметричную плотность вероятности w' в координатах y. Имеем по определению

$$w_1(t, x_1, v_1) = \int w(t, x, v)\, dx_2\, dv_2 \, \cdots \, dx_N\, dv_N, \tag{4.1}$$

область интегрирования равна $([0, a] \times \mathbb{R})^{N-1}$. Замена переменных $x \to y$ возможна только в симплексах (3.1), (3.2), поэтому интеграл (4.1) сведем к интегралу по подмножеству множества Φ_x, используя симметрию функции w.

Обозначим через Π гиперплоскость с фиксированными x_1 и v_1. Интеграл (4.1) берется по переменным x, v, принадлежащим объединению подмножеств $\sigma\Phi_x \cap \Pi$ по всем $\sigma \in S$. Отобразим подмножество $\sigma\Phi_x \cap \Pi$ в Φ_x с помощью перестановки σ^{-1}, сделаем замену координат $x \to y$ и скоростей $v \to v' = v$ и перестановкой σ отобразим в $\sigma\Phi$. Получим интеграл от функции $w'(t, y, v') = w(t, x, v)$ по множеству

$$\bigcup_{\sigma \in S} \sigma\Phi \cap \{y_1 = x_1 - (\sigma^{-1}(1) - 1)d_1, v'_1 = v_1\} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}} \{0 \leqslant y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_{i-1}} \leqslant \eta \leqslant y_{\alpha_i}, \ldots, y_{\alpha_{N-1}} \leqslant 1\} \times \{v'_1 = v_1\}, \tag{4.2}$$

где $y_1 = \eta = x_1 - (i - 1)d_1$; $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}\} = M' = \{2, \ldots, N\}$; объединение берется по всем подмножествам $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\} \subset M'$, содержащим $i - 1$ элементов. Поясним, что здесь сначала взято объединение по всем σ, удовлетворяющим условию $\sigma(i) = 1$, а затем берется объединение по i.

Вычислим интеграл по множеству (4.2) от функции

$$w'(t, y, v') = w'_1(t, y_1, v'_1) w'_1(t, y_2, v'_2) \cdots w'_1(t, y_N, v'_N).$$

Так как в координатах y шары как бы не взаимодействуют, то это распределение означает хаотическое, т. е. независимое, движение шаров. Однако эта независимость не является только следствием отсутствия взаимодействия, а обеспечивается также специальным начальным "1-мультипликативным" распределением. В п. **5** будут рассмотрены более общие s-мультипликативные начальные распределения. Тогда и решение при $t > 0$ также будет s-мультипликативным, следовательно, движение шаров не будет независимым (в координатах y). В подобном случае физики ограничиваются рассмотрением 1-мультипликативных распределений, так как считается, что неучтенные малые взаимодействия хаотизируют состояние системы. Математики же стремятся охватить наиболее общий случай.

Функция w' предполагается нормированной, поэтому интеграл от w'_1 по множеству $[0,1]\times\mathbb{R}$ равен 1. Получим

$$w_1(t,x_1,v_1)=\sum_{i=1}^{N} w'_1(t,\eta,v_1)\binom{N-1}{i-1}\Big(\int_0^{\eta}\int_{\mathbb{R}} w'_1(t,y_2,v'_2)\,dy_2\,dv'_2\Big)^{i-1}\times$$
$$\times\Big(\int_{\eta}^{1}\int_{\mathbb{R}} w'_1(t,y_2,v'_2)\,dy_2\,dv'_2\Big)^{N-i}. \qquad (4.3)$$

Устремим $N\to\infty$ при постоянных $z=(i-1)/(N-1)$, $\varepsilon=(N-1)d_1$. Величина $\eta=x_1-\varepsilon z$, а следовательно, и интегралы в формуле (4.3) не зависят от N. Если первый из этих интегралов обозначить через p, то второй будет равен $1-p$ $(0<p<1)$. Тогда согласно предельной теореме теории вероятностей сумма (4.3) сходится к интегралу

$$\int_0^1 w'_1(t,\eta,v_1)\delta(z-p)\,dz=\frac{w'_1(t,\eta,v_1)}{1-dp/dz}\Big|_{z=p}$$

(см. [5]). Итак,

$$w_1(t,x_1,v_1)=w'_1(t,y_1,v_1)(1+\varepsilon\partial p(t,y_1)/\partial y_1)^{-1}, \qquad (4.4)$$

где

$$x_1=y_1+\varepsilon p(t,y_1),\qquad p(t,y_1)=\int_0^{y_1}\int_{\mathbb{R}} w'_1(t,y_2,v'_2)\,dy_2\,dv'_2.$$

Так как существует однозначное отображение $w'_1(0,y_1,v_1)\to w'_1(t,y_1,v_1)$, задаваемое формулой (3.3), то в силу равенства (4.4) имеем полугруппу

$$w_1(0,x_1,v_1)\to w_1(t,x_1,v_1).$$

Инфинитезимальный оператор этой полугруппы дает кинетическое уравнение на $w_1(t,x_1,v_1)$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}+\frac{\partial(uw_1)}{\partial x_1}=0, \qquad (4.5)$$

где

$$u=\Big(v_1-\varepsilon\int_{\mathbb{R}} v_2w_1(t,x_1,v_2)\,dv_2\Big)\Big/\Big(1-\varepsilon\int_{\mathbb{R}} w_1(t,x_1,v_2)\,dv_2\Big)$$

(выражение (4.4) надо продифференцировать по t и использовать уравнение Лиувилля на $w'_1(t,y_1,v_1)$). Из равенства (4.4) следует также граничное условие на решение кинетического уравнения: для всех $v_1\in\mathbb{R}$

$$w_1(t,x_1,v_1)=w_1(t,x_1,-v_1)\qquad \text{при } x_1=0 \text{ и } x_1=a. \qquad (4.6)$$

Кинетическое уравнение (4.5) отличается от уравнения Больцмана по структуре. Во-первых, оно обратимо: замена переменных $t\to -t$, $v_1\to -v_1$ не меняет его вида. Во-вторых, если начальное распределение однородно (т. е. не зависит от x_1):

$$w_1(0,x_1,v_1)=f(v_1)$$

и удовлетворяет граничному условию (4.6) $f(-v_1) = f(v_1)$ для любого $v_1 \in \mathbb{R}$, то оно сохраняется неизменным при $t > 0$, в то время как решение уравнения Больцмана с любым однородным начальным значением согласно H-теореме сходится с течением времени к максвелловскому распределению. В-третьих, уравнение (4.5) применимо для любой концентрации шаров ε. Кинетическое уравнение (4.5) можно отнести к типу уравнения Власова, потому что оно также имеет решение, содержащее δ-функцию. Это частное решение является аналогом уравнений гидродинамики.

Кинетическое уравнение (4.5) получено в работе [6]. Одномерная модель упругих шаров в общем случае сформулирована в [7].

5. Цепочка Боголюбова. Определение. При $N = ms$ решение уравнения Лиувилля (в координатах y), имеющее вид

$$w'(t, y, v) = \prod_{i=1}^{m} w'_s(t, y_{(i-1)s+1}, v_{(i-1)s+1}, \ldots, y_{is}, v_{is}), \tag{5.1}$$

назовем s-мультипликативным. Его s-частичную проекцию w'_s будем предполагать симметричной.

Кинетическое уравнение (4.5) выведено в классе 1-мультипликативных функций w'. На самом деле оно справедливо для более широкого множества движений.

Теорема 1. *Для любого $s \geqslant 1$ в классе s-мультипликативных функций w' (в координатах y) 1-частичная проекция w_1 (в координатах x) в пределе при $N \to \infty$ и фиксированных s и $\varepsilon = Nd_1$ удовлетворяет замкнутому кинетическому уравнению* (4.5).

Доказательство. Функция (5.1), вообще говоря, не вполне симметрична. Поэтому ее надо симметризовать, т. е. взять среднее от

$$\sigma w' = w'_s(t, y_{\sigma(1)}, v'_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(s)}, v'_{\sigma(s)}) \cdots w'_s(t, y_{\sigma(N-s+1)}, v'_{\sigma(N-s+1)}, \ldots, y_{\sigma(N)}, v'_{\sigma(N)})$$

по всем перестановкам $\sigma \in S$. Множество $M = \{1, \ldots, N\}$ разобьем на подмножества M_j, содержащие индексы переменных j-го множителя произведения $\sigma w'$. Пусть $1 \in M_{j_0}$, β элементов из $M_{j_0} \backslash \{1\}$ расположены слева от η (т. е. принадлежат множеству $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\}$, см. (4.2)), остальные — справа. Обозначим через l_γ количество подмножеств M_j ($j \neq j_0$), имеющих γ элементов слева от η. Так как слева от η находятся $i-1$ чисел, а справа — $N-i$, то введенные величины удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{\gamma=1}^{s} \gamma l_\gamma + \beta = i - 1, \qquad \sum_{\gamma=0}^{s-1} (s-\gamma) l_\gamma + s - 1 - \beta = N - i. \tag{5.2}$$

Интеграл от $\sigma w'$ по множеству (4.2) равен

$$w_1(t, x_1, v_1) = \sum_{i,\beta} \sum_{l_0,\ldots,l_s} w_s'^{(\beta)}(t, \eta, v_1) \binom{s-1}{\beta} \binom{m-1}{l_0 \ldots l_s} \prod_{\gamma=0}^{s} \Big(\binom{s}{\gamma} p_\gamma \Big)^{l_\gamma}, \tag{5.3}$$

где $w_s'^{(\beta)}$ получается из w'_s подстановкой $y_1 = \eta$, $v'_1 = v_1$ и интегрированием по остальным переменным y_2, ..., y_s, v'_2, ..., v'_s по множеству $[0, \eta]^\beta \times [\eta, 1]^{s-1-\beta} \times \mathbb{R}^{s-1}$; аналогично p_γ получается интегрированием w'_s по множеству $[0, \eta]^\gamma \times [\eta, 1]^{s-\gamma} \times \mathbb{R}^s$. Выражение (5.3) не зависит от выбора перестановки σ, следовательно, равно среднему по σ.

При $N \to \infty$ в равенствах (5.2) можно пренебречь числом β по сравнению с остальными слагаемыми. Следовательно, индекс i и величина η не зависят от β, поэтому сумма по β равна $w'_1(t, \eta, v_1)$. После этого можно оставить только суммирование по $l_0 \geqslant 0$, ..., $l_s \geqslant 0$,

$l_0+\ldots+l_s=m-1$, выразив i через эти индексы из первого уравнения (5.2) (где $\beta=0$). В результате этих преобразований выражение (5.3) примет вид

$$w_1(t,x_1,v_1)=\sum_{l_0+\ldots+l_s=m-1} w_1'(t,\eta,v_1)\binom{m-1}{l_0\ldots l_s}\prod_{\gamma=0}^{s} q_\gamma^{l_\gamma}, \tag{5.4}$$

где

$$q_\gamma=\binom{s}{\gamma}p_\gamma\geqslant 0, \qquad \sum_{\gamma=0}^{s} q_\gamma=1.$$

Устремим $N\to\infty$ для фиксированных s, $z_\gamma=l_\gamma/(m-1)$ $(0\leqslant\gamma\leqslant s)$ и $\varepsilon=(N-s)d$. При этих условиях сумма в правой части (5.4) сходится к интегралу

$$w_1(t,x_1,v_1)=\int\limits_{z_1+\ldots+z_s\leqslant 1} w_1'(t,\eta,v_1)\delta(z_1-q_1,\ldots,z_s-q_s)\,dz_1\cdots dz_s=$$

$$=w_1'(t,\eta,v_1)J^{-1}\big|_{z_1=q_1,\,\ldots,\,z_s=q_s}.$$

Вычислим якобиан

$$J=\frac{\partial(z_1-q_1,\ldots,z_s-q_s)}{\partial(z_1,\ldots,z_s)}=1+\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}} w_1'(t,\eta,v_2)\,dv_2.$$

В точке $z_1=q_1$, $\ldots$, $z_s=q_s$ имеет место равенство

$$\eta=x_1-\varepsilon s^{-1}\sum_{\gamma=1}^{s}\gamma q_\gamma=x_1-\varepsilon\int\limits_0^{\eta}\int\limits_{\mathbb{R}} w_1'(t,y_2,v_2)\,dy_2\,dv_2.$$

Таким образом, получили формулу (4.4), что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Для любых $s\leqslant s'$ в классе симметризованных s'-мультипликативных функций w' (в координатах y) s-частичная проекция w_s (в координатах x) в пределе при $N\to\infty$ имеет вид $\prod\limits_{i=1}^{s} w_1(t,x_i,v_i)$, где $w_1(t,x_1,v_1)$ выражается через $w_1'(t,y_1,v_1)$ по формуле* (4.4).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Различие состоит в следующем. Теперь выделенные пары переменных y_i, v_i' $(1\leqslant i\leqslant s)$ могут оказаться в разных множителях произведения $\sigma w'$ в зависимости от перестановки σ. Доля тех перестановок, для которых в каждом множителе содержится не более одной выделенной пары, стремится к 1 при $N\to\infty$. Поэтому в пределе s-частичная проекция w_s сама оказывается 1-мультипликативной.

Для того чтобы получить многомерное обобщение кинетического уравнения (4.5), надо рассмотреть несимметризованные мультипликативные решения w' уравнения Лиувилля в координатах y. В исходном фазовом пространстве Φ_x они задают многозначные решения, ветви которых определенным образом склеены на границе, так что сохраняется в силе теорема единственности для фазовых траекторий.

Теорема 3. *Для любых $s\leqslant s'$ в классе несимметризованных s'-мультипликативных функций w' (в координатах y) s-частичная проекция w_s (в координатах x) в пределе при $N\to\infty$ имеет вид*

$$w_s(t,x_1,v_1,\ldots,x_s,v_s)=w_s'(t,y_1,v_1,\ldots,y_s,v_s)\prod_{i=1}^{s}\Big(1+\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}} w_1'(t,y_i,v_{s+1})\,dv_{s+1}\Big)^{-1},$$

где

$$x_i = y_i + \varepsilon \int\limits_0^{y_i} \int\limits_{\mathbb{R}} w_1'(t, y_{s+1}, v_{s+1})\, dy_{s+1}\, dv_{s+1} \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

функция w_s' *удовлетворяет уравнению Лиувилля (в координатах* y*);* w_1' *— ее* 1*-частичная проекция.*

Согласно теореме 2 все s-частичные проекции однозначно выражаются через 1-частичную проекцию. Таким образом, для одномерного движения в классе мультипликативных распределений, в котором справедливо кинетическое уравнение, предположение Боголюбова выполняется.

Возникает вопрос: справедливо ли кинетическое уравнение (4.5) в классе произвольных распределений? Нет. Действительно, возьмем полусумму двух 1-мультипликативных решений уравнения Лиувилля в координатах y. В пределе при $N \to \infty$ ей соответствует 1-частичная проекция w_1, являющаяся полусуммой двух решений уравнения (4.5). Так как это уравнение нелинейно, то функция w_1 ему не удовлетворяет. Функция w_1 вообще не может быть решением какого-либо замкнутого кинетического уравнения, поскольку однозначно не определяется своим начальным значением при $t = 0$.

Существует ли кинетическое уравнение в классе произвольных распределений в случае малой концентрации шаров ε? Ведь уравнение Больцмана справедливо только для разреженных газов. Чтобы ответить на этот вопрос, вычислим интеграл по множеству (4.2) от произвольной функции w' разложением в ряд по степеням d_1 при фиксированном N. Получим

$$w_1(t, x_1, v_1) = w_1'(t, x_1, v_1) - \\ - \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(w_2'(t, x_1, v_1, x_1, v_2) + \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial w_2'}{\partial y_1}(t, x_1, v_1, y_2, v_2)\, dy_2 \Big) dv_2 + O(\varepsilon^2). \qquad (5.5)$$

Отсюда следует, что в классе произвольных распределений цепочка Боголюбова не замыкается в первом порядке точности по ε. В классе симметризованных мультипликативных функций проекция w_2' (в пределе при $N \to \infty$) однозначно выражается через w_1', и в этом случае разложение (5.5) получается также из формулы (4.4).

Не приводя доказательства, отметим, что кинетическое уравнение (4.5) можно получить также на основе эвристических рассуждений, подобных применяемым в кинетической теории газов. Тогда класс мультипликативных распределений явно не выступает, а создается иллюзия, что кинетическое уравнение справедливо в классе произвольных распределений.

6. Уравнения “гидродинамики”. Аналог уравнений многоскоростной гидродинамики (плазмы) получается как частное решение кинетического уравнения (4.5) вида (индекс 1 опустим)

$$w(t, x, v) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(t, x) \delta(v - u_i(t, x)). \qquad (6.1)$$

Приравняв к нулю множители δ-функции и ее производной на носителе δ-функции, во-первых, удовлетворим кинетическому уравнению, во-вторых, получим замкнутую систему уравнений на неизвестные функции ρ_i, u_i $(i = 1, \ldots, k)$. Например, при $k = 2$ получается следующая система уравнений гидродинамики:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial\,(\rho_i u_i)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i - \varepsilon(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2)}{1 - \varepsilon(\rho_1 + \rho_2)}\, \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \qquad (i = 1, 2). \qquad (6.2)$$

Граничное условие (4.6) для кинетического уравнения влечет различные граничные условия для системы уравнений (6.2), в частности $\rho_1 = \rho_2$, $u_1 = -u_2$ при $x = 0$ и $x = a$.

Физический смысл уравнений (6.2) состоит в следующем. В окрестности каждой точки x существует два сорта шаров, движущихся со скоростями u_1 и u_2 и имеющих концентрации ρ_1 и ρ_2 соответственно. Можно было бы определить температуру и давление такого "одномерного газа" аналогично тому, как это делается для "трехмерного газа". Тогда сходство уравнений (6.2) с газовой динамикой стало бы еще более заметным. Но поскольку "одномерный газ" не существует в природе, эта механическая аналогия вряд ли представляет большой научный интерес. Системы уравнений вида (6.2) имеют ценность для теории уравнений в частных производных как наводящие примеры.

Задача (4.5), (4.6) разрешима в целом по времени. Действительно, если

$$h(0,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} w(0,x,v)\,dv < \varepsilon^{-1}, \tag{6.3}$$

то по формуле (4.4) однозначно определяется начальная функция $w'(0,y,v)$ и, следовательно, решение $w'(t,y,v)$ уравнения Лиувилля в системе координат y, определенное для всех $t \geqslant 0$, а через него выражается решение $w(t,x,v)$ кинетического уравнения (4.5). Неравенство (6.3) выполнено по смыслу 1-частичной проекции. Сумма диаметров шаров, находящихся на малом интервале длины Δx оси x, равная $d_1 N h \Delta x = \varepsilon h \Delta x$, не должна превышать Δx, так как шары абсолютно жесткие. Отсюда следует $\varepsilon h \leqslant 1$. Но столкновения более высокого порядка, чем парные, исключаются из рассмотрения, поэтому $\varepsilon h < 1$.

Однако решение уравнений гидродинамики (6.2) может перестать существовать в некоторый момент времени t из-за нарушения однозначности функций $u_i(t,x)$. При этом функция (6.1) как решение кинетического уравнения сохраняет свой смысл и продолжает существовать при всех $t \geqslant 0$.

Автор выражает благодарность Б. А. Луговцову за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Больцман Л.** Лекции по теории газов. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
2. **Боголюбов Н. Н.** Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1946.
3. **Эренфест П. С., Афанасьева-Эренфест Т. А.** О двух известных возражениях против H-теоремы Больцмана // Эренфест П. Относительность. Кванты. Статистика. М.: Наука, 1972. С. 89–97.
4. **Синай Я. Г., Чернов Н. И.** Эргодические свойства некоторых систем двумерных дисков и трехмерных шаров // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, вып. 3. С. 153–174.
5. **Боровков А. А.** Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972.
6. **Гарипов Р. М.** Одномерное движение абсолютно жестких шаров // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 6. С. 181.
7. **Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.** Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 18/V 2004 г.,
в окончательном варианте — 21/IX 2005 г.