4. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
5. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** Об импульсе вихря, движущегося в трубе.—В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
6. **Пухначев В. В.** Лекции по динамике вязкой несжимаемой жидкости. Ч. 1. Новосибирск, изд. Новосибир. ун-та, 1969.

---

УДК 551.515.3

# ДВА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ПО КОНЦЕНТРАЦИИ ВИХРЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

*В. И. Лихоперский*

(*Москва*)

Завихренность в жидкости и газе в конечном счете разрушается вязкостью [1], но известны факты появления и длительного существования пространственных дискретных вихрей в воде, воздухе и других средах. Поэтому возникает интерес к условиям, при которых завихренность может даже возрастать при наличии вязкости. Например, при истечении жидкости из отверстия в дне вращающегося цилиндрического сосуда суммарный момент количества движения ее относительно вертикальной оси сосуда увеличивается со временем [2, 3]. Для некоторых течений существуют противоречивые мнения: в работах [4, 5] утверждается, что вихрь около плоского стока в вязкой жидкости затухает, а в [6, 7] говорится, что около стока при определенных числах Рейнольдса происходит интенсификация завихренности. В данной работе приводятся точные решения уравнений Навье—Стокса, показывающие развитие вихря в вязкой жидкости.

1. Наибольший интерес представляет случай, когда из течения вязкой жидкости с вихрем $|\Omega|$, близким к нулю, образуется течение с конечной завихренностью. Поэтому постановку задачи свяжем с вопросом об устойчивости течения вязкой жидкости, имеющей вначале $|\Omega| = 0$, по отношению к определенным возмущениям. На примере задачи с осевой симметрией в цилиндрической системе координат $(r, \theta, z)$ покажем прием объединения метода поиска точных решений уравнений Навье — Стокса с рассмотрением устойчивости течения вязкой жидкости. Основное течение, для которого компоненты вихря равны нулю, пусть имеет вид

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega_\theta = \gamma = 0,\\ &v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r},\\ &v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

где $\gamma = 2\pi r v_\theta$ — циркуляция скорости; $\Phi$ — потенциал для компонент скоростей $v_r$ и $v_z$. Выбором потенциала $\Phi$ можно получить то или иное основное течение.

Уравнения Навье — Стокса и неразрывности с осевой симметрией представим в форме

$$
(1.2)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\Omega_\theta}{\partial t}+v_r\left(\dfrac{\partial\Omega_\theta}{\partial r}-\dfrac{\Omega_\theta}{r}\right)+v_z\dfrac{\partial\Omega_\theta}{\partial z}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\gamma}{2\pi r}\right)^2+\\
\qquad +\nu\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\Omega_\theta)}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2\Omega_\theta}{\partial z^2}\right],\\
\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}+v_r\dfrac{\partial\gamma}{\partial r}+v_z\dfrac{\partial\gamma}{\partial z}=\nu\left[r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\gamma}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}\right],\\
\dfrac{\partial v_r}{\partial z}-\dfrac{\partial v_z}{\partial r}=\Omega_\theta,\quad \dfrac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\dfrac{\partial(rv_z)}{\partial z}=0.
\end{cases}
$$

Чтобы остаться в рамках уравнений Навье — Стокса, необходимо из всевозможных возмущений к основному течению (1.1) взять только перпендикулярные к нему, т. е. возмущение $\gamma$. Кроме того, потребуем, чтобы значение $\gamma$ не зависело от $z$, таким образом, расслоим первые два уравнения системы (1.2). Окончательное уравнение для возмущения $\gamma$ имеет вид

$$
(1.3)\quad \frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\gamma}{\partial r}=\nu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right).
$$

2. Задача о вращении жидкости около плоского источника получается из общей задачи, если в формулу (1.3) подставить $\Phi=(m/2\pi)\ln r$, где $m$ — обильность источника. Тогда уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$
(2.1)\quad \frac{1}{\nu}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+(\mathrm{Re}+1)\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial r}=\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2},
$$

где $\mathrm{Re}=m/(2\pi\nu)$ — число Рейнольдса.

Стационарные решения уравнения (2.1) подробно разобраны в работе [6]. Существует несколько методов для получения нестационарных решений. Характерное нестационарное решение, которое больше всего вызывает противоречия,— это решение задачи о диффузии прямолинейного вихря в присутствии стока. Все методы, применяемые в большинстве работ, дают следующее решение задачи:

$$
(2.2)\quad \begin{cases}
v_\theta=\dfrac{\gamma_\infty}{2\pi r}\left[1-\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\mathrm{Re}+2}{2};\dfrac{r^2}{4\nu t}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\mathrm{Re}+2}{2}\right)}\right],\\
\Omega_z=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}=\dfrac{\gamma_\infty}{\pi r^2\Gamma\left(\dfrac{\mathrm{Re}+2}{2}\right)}e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\left(\dfrac{r^2}{4\nu t}\right)^{\frac{\mathrm{Re}+2}{2}},
\end{cases}
$$

где $\Gamma(a)$ — гамма-функция Эйлера; $\Gamma(a,z)=\int\limits_z^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ — неполная гамма-функция. Причем решение (2.2) распространяется и за $\mathrm{Re}<-2$. Как показано в [6] и как видно из второй формулы (2.2), оно является решением задачи о диффузии прямолинейного вихря в присутствии источника только в интервале $-2<\mathrm{Re}<\infty$. Интенсивность вихря в интервале $-\infty<\mathrm{Re}<-2$ растет, согласно (2.2). Причина ошибочности работ [4, 5] состоит в том, что решение в них получено при предельном переходе $r_0 \to 0$ в решении для $r_0 = \mathrm{const}$, где $r_0$ — радиус неподвижного цилиндра, окружающего особенность в нуле.

Согласно работе [8], с помощью метода промежуточных асимптотик можно продолжить решения за критическое значение параметра. Обозначим через $a$ линейный размер. Исходить будем из уравнения для вихря $\Omega_z$

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial\Omega_z}{\partial t} + (\mathrm{Re} - 1)\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_z}{\partial r} = \frac{\partial^2\Omega_z}{\partial r^2}. \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.3) будем искать в виде

$$\Omega_z = r^{\alpha}F(u), \tag{2.4}$$

где $u = r^2/(4\nu t)$. Подставляя (2.4) в (2.3), получаем

$$(2u)^2F'' + [(2\alpha - \mathrm{Re} + 2) + (2u)](2u)F' + \alpha(\alpha - \mathrm{Re})F = 0. \tag{2.5}$$

Общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$F = u^{-(2\alpha-\mathrm{Re}+2)/4}\, e^{-u/2}y(-(2\alpha - \mathrm{Re} + 2)/4,\ \mathrm{Re}/4,\ u), \tag{2.6}$$

где $y(k, m, x)$ — решение уравнения Уиттекера $4x^2y'' = (x^2 - 4kx + 4m^2 - 1)y$, т. е. приведенная форма вырожденного гипергеометрического уравнения. Чтобы выделить нужное решение из формулы (2.6), подставим начальные условия $\gamma = \gamma_\infty$ или $\Omega = 0$ при $r \neq 0$. Окончательные формулы имеют вид

$$\left\{\begin{aligned} v_\theta &= \frac{\gamma_\infty}{2\pi r}\left[1 - \frac{\Gamma\left(-\frac{\mathrm{Re}+2}{2}, \frac{r^2}{4\nu t}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\mathrm{Re}+2}{2}\right)}\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathrm{Re}+2}\right], \\ \Omega_z &= \frac{\gamma_\infty}{\pi a^2\Gamma\left(-\frac{\mathrm{Re}+2}{2}\right)}\Gamma\left(-\frac{\mathrm{Re}}{2}, \frac{r^2}{4\nu t}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathrm{Re}}. \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

Из решения (2.7) видно, что интенсивность вихря убывает не до нулевого значения, как в случае $\mathrm{Re} > -2$ (см. (2.2)), а до стационарного вихревого решения [6]

$$\left\{\begin{aligned} \gamma(r) &= \gamma_\infty\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{\mathrm{Re}+2}\right], \\ \Omega_z &= -\frac{\mathrm{Re}+2}{2\pi a^2}\gamma_\infty\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathrm{Re}}. \end{aligned}\right.$$

Если решать уравнение (2.1) с начальным условием $v_\theta = \gamma_\infty/(2\pi r)$ при $\mathrm{Re} < -2$ не с внутренним ограниченным цилиндром, а с особенностью в нуле методом преобразования Лапласа, то получим решение (2.7). Тем же методом можно показать, что асимптотикой любой нестационарной задачи является стационарное вихревое решение при $\mathrm{Re} < -2$. Из последнего факта можно было бы сделать заключение о механизме интенсификации завихренности на основе неустойчивости течения вязкой жидкости, если бы не одно серьезное возражение: в нуле имеется особенность, которая, как указывается в некоторых работах, может породить неустойчивость. Поэтому обратимся к задаче, где особенность отсутствует.

3. Модель, используемая для описания вихревых движений в атмосфере (торнадо, смерчи), получается из общей постановки задачи п. 1, если за основной поток взять симметричный потенциал $\Phi = a(r^2/2 - z^2)$, описывающий течение в критической точке, и подставить в уравнение (1.3):

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + ar\frac{\partial\gamma}{\partial r} = \nu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right). \tag{3.1}$$

Имеем следующие граничные условия:
на бесконечности

$$v_\theta = \gamma/2\pi r|_{r\to\infty} = 0; \tag{3.2}$$

на оси

$$v_\theta|_{r=0} = 0. \tag{3.3}$$

Стационарное решение уравнения (3.1) с граничными условиями (3.2), (3.3) зависит от $a$; если $a \geqslant 0$, т. е. поток натекает на плоскость, то

$$\gamma = 0; \tag{3.4}$$

если $a < 0$, т. е. имеется восходящее течение, то

$$\gamma = \gamma_\infty\left(1 - e^{ar^2/2\nu}\right). \tag{3.5}$$

Возникновение стационарных вихревых решений при определенных значениях параметров в подобных ситуациях является характерным фактором [6]. Решение (3.5) найдено впервые в работе [9] и используется многими авторами, например, для построения приближенных моделей торнадо или как пример существования стационарных вихревых движений в вязкой жидкости.

Нестационарные вихревые решения уравнения (3.1) не найдены, вероятно, по следующим причинам. У уравнения (3.1) отсутствует автомодельное решение. Преобразование Лапласа приводит к уравнению, которое может быть решено численно. Методы промежуточных асимптотик не дают желаемого результата. Применим к уравнению (3.1) групповой анализ [10]. Инфинитезимальный оператор, допускаемый (3.1), с помощью которого получим характерное для этого уравнения решение, имеет вид

$$X_\alpha = \frac{1}{a}e^{2at}\frac{\partial}{\partial t} + re^{2at}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{3.6}$$

Оператору (3.6) соответствует однопараметрическая непрерывная группа преобразований

$$\begin{cases} t' = -\dfrac{1}{2a}\ln\left(e^{-2at} - 2\alpha\right), \\ r' = r\left(\dfrac{1}{1 - 2\alpha e^{2at}}\right). \end{cases} \tag{3.7}$$

С помощью преобразования (3.7) из решения (3.5) построим нестационарное решение

$$\begin{cases} \gamma(r, t) = \gamma_\infty\left[1 - e^{\frac{a}{2\nu}r^2(1-2\alpha e^{2at})^{-1}}\right], \\ \Omega_z(r, t) = -\dfrac{a\gamma_\infty}{\nu}\left(1 - 2\alpha e^{2at}\right)^{-1}e^{\frac{a}{2\nu}r^2(1-2\alpha e^{2at})^{-1}} \end{cases} \tag{3.8}$$

Решение (3.8) может быть использовано для решения разных задач. Если основной поток нисходящий $a > 0$, то следует, что $\exp(2at) \geqslant 1$ и $1-2\alpha \leqslant 0$. При $\alpha > 1/2$, т. е. при различных начальных данных $\gamma(r, 0)$, выражения (3.7), (3.8) стремятся к нулю, когда время $t$ стремится к бесконечности, т. е. к стационарному решению (3.4). Особый случай, когда $\alpha = 0{,}5$, является решением задачи о диффузии прямолинейной вихревой нити в присутствии нисходящего потока над плоскостью $z = 0$. При восходящем основном течении $a < 0$ $\exp(2at) \leqslant 1$ и $1 - 2\alpha \geqslant 0$, выражение (3.8) стремится к стационарному решению (3.5), отличному от нуля. Особый случай, получающийся при $\alpha = 0{,}5$, представляет диффузия вихревой нити, когда основной поток восходящий. Диффундирование вихревой нити происходит не до нулевого значения завихренности, а до стационарного решения (3.5). С помощью выбора параметра $\alpha$ можно начальные данные $\gamma(r, 0)$ взять такими, что

$$0 < |v_\theta(r, 0)| < \varepsilon \text{ и } 0 < |\Omega_z(r, 0)| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ — любое наперед заданное малое число. Для этого значение $\alpha$ должно удовлетворять условию

$$|(\gamma_\infty - a)/[\nu(1 - 2\alpha)]| < \varepsilon^2.$$

В последнем случае завихренность начнет концентрироваться около оси вращения до стационарного решения (3.5).

Так как уравнения (1.3), (3.1) линейны, последний факт можно рассмотреть с позиций теории гидродинамической устойчивости. Этот результат говорит, что течение вязкой жидкости с $|\Omega| = 0$ при определенных значениях параметров может стать неустойчивым к вихревым возмущениям. Объяснение локализации и концентрации завихренности в вязкой жидкости можно обосновать механизмом взаимодействия вязких и инерционных сил, при котором при некоторых значениях параметров потока равновесие между ними устанавливается на вихревом течении.

*Поступила 18 X 1976*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М., Физматгиз, 1963.
2. **Фейнман Р. Ф. и др.** Фейнмановские лекции по физике. Вып. 7. Физика сплошных сред. М., «Мир», 1966.
3. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
4. **Гостинцев Ю. А.** Нестационарное плоское вращение вязкой жидкости при наличии стационарного течения от источника.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1969, № 6, с. 106—114.
5. **Дикий Г. П., Сопленков К. И.** О диффузии вихря в присутствии источника (стока).—В кн.:Вопросы газотермодинамики энергоустановок.Харьков,Харьков.авиац. ин-т, 1974, с. 128—135.
6. **Лихоперский В. И.** К теории образования вихря в вязкой несжимаемой жидкости (точное решение уравнений Навье — Стокса).— В кн.: Научные работы аспирантов МГУ. № 2. М., изд. Ин-та механики, 1974.
7. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
8. **Баренблатт Г. И.** Автомодельные решения как промежуточные асимптотики.— «Усп. мат. наук», 1974, т. 29, № 6, с. 204—205.
9. **Burgers J. M.** A mathematical model illustrating the theory of turbulence.— In: Advances in Applied Mechanics. Vol. 1. N. Y. a. o., Acad. Press., 1948, p. 197—199.
10. **Овсянников Л. В., Ибрагимов Н. Х.** Групповой анализ дифференциальных уравнений механики.— В кн.: Общая механика. Т. 2. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1975, с. 5—52.