

УДК 621.396.96: 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЧ-ДИАГНОСТИКИ ИМПЕДАНСНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ ФАЗЕ ОТРАЖЕННОГО СИГНАЛА

М. С. Соппа

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин),
630008 Новосибирск
E-mail: soppa@ngs.ru

Рассматривается компьютерная система обработки данных электромагнитного зондирования объектов, позволяющая восстанавливать функцию распределения импеданса цилиндрической поверхности. Приведены результаты расчетов.

Ключевые слова: математическое моделирование, обратные задачи рассеяния, интегральные уравнения, восстановление фазы сигнала.

Важной проблемой науки и техники является исследование методов СВЧ-диагностики и дистанционного зондирования электромагнитными волнами различной частоты и интенсивности [1, 2]. В этом направлении активно развиваются современные подходы вычислительной математики, создается специализированное программное и аппаратное обеспечение. При математическом моделировании в данной области численно исследуются обратные задачи теории дифракции в различных постановках. Отметим подходы к решению обратных задач, в которых используются разложение в ряды [3], аналитические функции [4], точные или асимптотические решения [5], а также прямые методы минимизации невязки типа покоординатного спуска, что в условиях высокой овражности целевой функции приводит к весьма громоздким вычислительным процедурам [6].

В данной работе предлагается подход, в котором применяется модифицированное импедансное граничное условие типа условия Леонтовича [7]. В этом случае, восстанавливая импеданс по полному комплекснозначному рассеянному полю, исходную обратную задачу в дифференциальной постановке можно свести к линейному интегрооператорному уравнению, допускающему эффективную дискретизацию и регуляризацию.

Рассматривается численное решение обратных задач теории дифракции электромагнитных волн, когда фазовая функция диаграммы рассеяния считается неизвестной (известен лишь модуль отраженного поля). Следует отметить, что получение результатов наблюдений существенно упрощается, если измеряется не полная комплекснозначная величина отраженного поля, а только его модуль. Процесс измерения фазы отраженной волны весьма трудоемок и требует точной синхронизации работы приемопередающих устройств в различных точках пространства, а также очень точного определения координат этих точек. Отражающие свойства поверхности описываются импедансными граничными условиями. Используемая математическая модель включает двумерное уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in D$$

с граничным условием

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} - i\xi u_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S.$$

Здесь $u = H_z(x, y)$ — ненулевая компонента электромагнитного поля; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны; $\xi = kW/W_0$; W — импеданс поверхности, описывающий процессы, возникающие в поверхностном слое проводника при взаимодействии с ним электромагнитного поля; $W_0 = 120\pi$ — волновое сопротивление свободного пространства; u_0 — решение в случае идеально проводящей поверхности S .

Для восстановления граничной импедансной функции W необходимы также данные, полученные в результате измерения модуля рассеянного электромагнитного поля $|h_g(M)|$ (заданные значения) в конечном наборе точек дальнего поля $M \in \{M_i, i = 1, \dots, m\}$. Это значит, что искомая функция W должна доставлять минимум функционалу

$$J = \sum_{i=1}^m ||h(M_i)| - |h_g(M_i)||^2.$$

Для решения обратной задачи делается переход к интегральным уравнениям. В случае неизвестной фазы отраженного сигнала для восстановления распределения импеданса при фиксированной форме объекта получаем нелинейное интегрооператорное уравнение

$$\left| \frac{k\gamma}{2\pi W_0} \int_S \left(ig(M, P) - \frac{\partial g(M, P)}{\partial n_P} A^{-1}B \right) u_0 W dS_P + \frac{\gamma}{2\pi} \int_S \frac{\partial g(M, P)}{\partial n_P} u_0 dS_P \right| = |h_g(M)|. \quad (1)$$

Здесь $g = i\pi H_0^{(1)}/2$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца; $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля нулевого порядка первого рода; A, B — операторы решения прямой задачи:

$$A\eta = \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2\pi} \int_S \eta \frac{\partial g}{\partial n} dS, \quad B\eta = \frac{i}{2\pi} \int_S \eta g dS.$$

Введем в рассмотрение неизвестную фазовую функцию рассеянного поля $\theta(M)$. Умножив обе части уравнения на $e^{i\theta}$, получим соотношение (1), в левой и правой частях которого отсутствуют модули.

Дискретизацию задачи проведем с использованием метода граничных элементов: контур заменяется замкнутой ломаной линией, состоящей из n отрезков — панелей. На всех панелях в контрольных точках (точках коллокации) необходимо потребовать выполнения граничного условия. В пределах каждой панели значения всех искомым функций считаются постоянными. При этом несколько соседних панелей могут объединяться в сегменты, о поверхностных свойствах которых имеется априорная информация. Интегралы по панелям от функции Ханкеля и ее производных вычисляются по формуле прямоугольников с адаптивным выбором количества узлов.

Предположим, что параметры m и n связаны соотношением $m = 2n$. Введем дополнительно переменные $\text{Re } h_g$ и $\text{Im } h_g$. Тогда искомыми являются $3n$ комплекснозначных параметра: вектор \mathbf{W} , компонентами которого являются функции распределения импеданса на поверхности объекта W_i ($i = \overline{1, n}$), и вектор $\mathbf{h}_g = (\mathbf{h}_{g1}, \mathbf{h}_{g2})$, компонентами которого являются значения измеренного рассеянного поля, разделенные на две группы: h_{g1i} ($i = \overline{1, n}$) и h_{g2i} ($i = \overline{n+1, 2n}$).

Дискретизация интегрооператорного уравнения (1), умноженного на $e^{i\theta}$, приводит к системе $2n$ комплексных линейных уравнений

$$C_1 \mathbf{W} = \mathbf{h}_{g1} + \mathbf{f}_1, \quad C_2 \mathbf{W} = \mathbf{h}_{g2} + \mathbf{f}_2,$$

где C_1, C_2 — квадратные матрицы порядка n . Из первой группы уравнений выразим вектор поверхностного импеданса и подставим во вторую группу уравнений:

$$C_2 C_1^{-1} \mathbf{h}_{g1} = \mathbf{h}_{g2} + \mathbf{f}_2 - C_1^{-1} \mathbf{f}_1.$$

Данную систему уравнений с комплексными коэффициентами представим как вещественную:

$$A_1 \mathbf{h}_1 + A_2 \mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_3.$$

Здесь

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\operatorname{Im} C_2 C_1^{-1} & -E \\ \operatorname{Re} C_2 C_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} C_2 C_1^{-1} & 0 \\ \operatorname{Im} C_2 C_1^{-1} & -E \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}_1 = (\operatorname{Im} \mathbf{h}_{g1}, \operatorname{Re} \mathbf{h}_{g2}), \quad \mathbf{h}_2 = (\operatorname{Re} \mathbf{h}_{g1}, \operatorname{Im} \mathbf{h}_{g2}), \quad \mathbf{f}_3 = (\operatorname{Re} (\mathbf{f}_2 - C_1^{-1} \mathbf{f}_1), \operatorname{Im} (\mathbf{f}_2 - C_1^{-1} \mathbf{f}_1)).$$

Отсюда найдем \mathbf{h}_1 :

$$\mathbf{h}_1 = -A_1^{-1} A_2 \mathbf{h}_2 + A_1^{-1} \mathbf{f}_3. \quad (2)$$

Мнимые и вещественные части значений рассеянного поля связаны соотношениями

$$\operatorname{Im} h_{g1i} = \mu_i \sqrt{|h_{gi}|^2 - (\operatorname{Re} h_{g1i})^2}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\operatorname{Re} h_{g2i} = \mu_i \sqrt{|h_{gi}|^2 - (\operatorname{Im} h_{g2i})^2}, \quad i = \overline{n+1, 2n}$$

(μ_i — неизвестные заранее знаки мнимых и вещественных частей). Подставляя в эти соотношения представление (2), получим систему нелинейных уравнений специального вида для вектора $\mathbf{v} = \mathbf{h}_2 = (\operatorname{Re} \mathbf{h}_{g1}, \operatorname{Im} \mathbf{h}_{g2})$:

$$G \mathbf{v} + \mathbf{b} = \mathbf{f}. \quad (3)$$

Здесь $f_i = \mu_i \sqrt{|h_{gi}|^2 - v_i^2}$, $i = \overline{1, m}$. Квадратная матрица $G = -A_1^{-1} A_2$ порядка m и вектор $\mathbf{b} = A_1^{-1} \mathbf{f}_3$ имеют известные компоненты. Вследствие нелинейности система (3) может иметь неединственное решение. Для обеспечения единственности и физической интерпретации решения используется априорная информация о нем, определяющая выбор параметров μ_i , $i = \overline{1, m}$. Кроме того, дополнительная регуляризация обеспечивается отысканием решения в компактном множестве $\mathbf{v} \in \{|v_i| \leq |h_{gi}|, i = \overline{1, m}\}$. Матрица G обладает важным свойством: для построения обратной к ней матрицы достаточно поменять знаки у элементов, составляющих ее диагональные блоки. Действительно, обозначив квадратные блоки, из которых состоит матрица G , через $R = \operatorname{Re} C_2 C_1^{-1}$, $I = \operatorname{Im} C_2 C_1^{-1}$, получим

$$G = \begin{pmatrix} -R^{-1}I & R^{-1} \\ R + IR^{-1}I & -IR^{-1} \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1}I & R^{-1} \\ R + IR^{-1}I & IR^{-1} \end{pmatrix}.$$

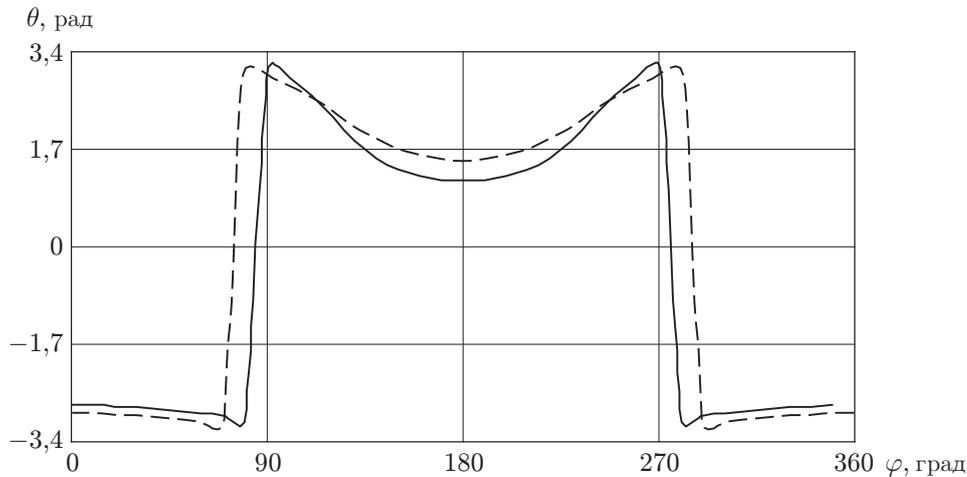
Таким образом, обращение матрицы G происходит без потери точности.

Для решения построенной нелинейной системы специального вида (3) может быть использован итерационный метод, в котором k -е приближение находится по формуле

$$\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k-1)} - \varepsilon (\mathbf{v}^{(k-1)} - G^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{b})), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Итерационный метод Ньютона, который реализуется с помощью алгоритма

$$\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k-1)} - \varepsilon (DF(\mathbf{v}^{(k-1)}))^{-1} F(\mathbf{v}^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$



Зависимость фазы отраженного сигнала от азимутального угла φ :
 сплошная линия — восстановленная фазовая функция; штриховая — фазовая функция
 рассеянной волны в случае идеально проводящего рассеивателя

где $F(\mathbf{v}^{(k-1)}) = G\mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{v}^{(k-1)})$; элементы дифференциала DF имеют явное представление:

$$DF(\mathbf{v}^{(k-1)})_{ij} = G_{ij} + \delta_{ij}\mu_i \frac{v_i^{(k-1)}}{\sqrt{|h_{gi}|^2 - (v_i^{(k-1)})^2}},$$

δ_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}$) — символ Кронекера, при значении малого параметра $\varepsilon \approx 0,001$ имеет достаточно высокую скорость сходимости. Начальное приближение должно удовлетворять естественному условию

$$v_i^{(0)} \in [-|h_{gi}|, |h_{gi}|].$$

После нахождения вещественных и мнимых частей поля в точках, где проводились измерения, и распределения поверхностного импеданса можно вычислить рассеянное поле $u^s = h$, а затем с использованием соотношения

$$\theta(M) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(u^s(M))}{\operatorname{Re}(u^s(M))}$$

определить фазовую функцию рассеянного поля в любой точке пространства.

В качестве примера рассмотрена задача о восстановлении распределения импеданса на круговом цилиндре (в случае H -волны) с диаметром поперечного сечения $d = \lambda/\pi$ (см. рисунок).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дмитриев В. И.** Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики / В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1987.
2. **Лаврентьев М. М., Жаринов С. Ю., Зеркаль С. М., Соппа М. С.** Вычислительная диагностика поверхностных характеристик протяженных цилиндрических объектов методами активной локации // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 1. С. 105–113.
3. **Чаплин А. Ф., Кондратьев А. С.** Синтез кругового импедансного цилиндра по полю в дальней зоне // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22, № 3. С. 505–511.

4. **Кюркчан А. Г.** Об обратной задаче рассеяния для уравнения Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 1. С. 48–51.
5. **Сивов А. Н., Чуприн А. Д., Шатров А. Д.** Об одном методе решения обратных задач рассеяния в электродинамике // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 1. С. 35–39.
6. **Петров Б. М., Юханов Ю. В.** Обратная задача рассеяния для импедансного цилиндра произвольного сечения // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1980. Т. 23, № 9. С. 78–81.
7. **Соппа М. С.** Численное решение задачи восстановления формы для системы импедансных поверхностей // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 5. С. 452–458.

*Поступила в редакцию 13/VII 2007 г.,
в окончательном варианте — 17/I 2008 г.*
