УДК 532.591+517.958

ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В УЗКОМ КАНАЛЕ

А. А. Чесноков

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Рассматриваются квазилинейные интегродифференциальные уравнения, описывающие в эйлерово-лагранжевой системе координат завихренные течения идеальной несжимаемой жидкости в узком искривленном канале. Получены необходимые и достаточные условия гиперболичности системы уравнений движения для течений с монотонным по глубине профилем скорости. Вычислены скорости распространения характеристик и характеристическая форма системы. Приведено точное частное решение, на котором система интегродифференциальных уравнений с ростом времени меняет тип. Для линеаризованных уравнений дано решение задачи Коши. Построен пример начальных данных, для которых задача Коши некорректна.

1. Вывод уравнений движения. Решение краевой задачи

$$\begin{gathered} u_T + uu_X + vu_Y + p_X = 0, \qquad \varepsilon^2(v_T + uv_X + vv_Y) + p_Y = -1, \\ u_X + v_Y = 0, \qquad -\infty < X < \infty, \qquad 0 \leqslant Y \leqslant h(X), \\ v(T,X,0) = 0, \qquad u(T,X,h)h_X = v(T,X,h) \end{gathered} \tag{1.1}$$

описывает плоскопараллельные движения слоя идеальной несжимаемой жидкости, ограниченного твердой стенкой $Y = h(X)$ и ровным дном в поле силы тяжести. Переменные $\bar{u} = (gH_0)^{1/2}u$, $\bar{v} = (gH_0)^{1/2}H_0L_0^{-1}v$, $\bar{p} = \rho g H_0 p$, $\bar{T} = L_0(gH_0)^{-1/2}T$, $\bar{X} = L_0X$, $\bar{Y} = H_0Y$ — размерные компоненты вектора скорости, давление, время и декартовы координаты; u, v, p, T, X, Y — соответствующие им безразмерные величины. Параметры H_0, L_0 определяют характерный вертикальный и горизонтальный масштаб, ρ — плотность, g — ускорение свободного падения. В приближении узкого канала параметр $\varepsilon = H_0L_0^{-1}$ считается малым, и членами порядка ε^2 в уравнениях (1.1) пренебрегают, что позволяет представить давление в виде $p(T,X,Y) = h(X) - Y + p^*(T,X)$, где p^* — безразмерное давление на верхней границе канала. Интегрирование уравнения неразрывности дает соотношение

$$v = -\int_0^Y u_X\,dY.$$

После преобразований возникает задача для нахождения u, p^*:

$$u_T + uu_X + vu_Y + h_X + p^*_X = 0, \qquad \Bigl(\int_0^h u\,dY\Bigr)_X = 0 \tag{1.2}$$

(функции p и v определены выше). В этой модели отсутствие завихренности эквивалентно условию $u_Y = 0$. Рассмотрим вихревые течения с монотонным по глубине профилем скорости ($u_Y > 0$).

Перейдем к эйлерово-лагранжевым координатам x, λ [1]

$$T = t, \qquad X = x, \qquad Y = \Phi(t,x,\lambda) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \tag{1.3}$$

где функция $\Phi(t,x,\lambda)$ — решение задачи Коши

$$\Phi_t + u(t,x,\Phi)\Phi_x = v(t,x,\Phi), \qquad \Phi(0,x,\lambda) = \lambda h(x). \tag{1.4}$$

В силу (1.2) и (1.3) для определения функций $u(t,x,\lambda)$ и $H(t,x,\lambda) = \Phi_\lambda$ получим

$$u_t + uu_x - (u_{1t} + u_1 u_{1x}) = 0, \qquad H_t + (uH)_x = 0, \qquad \int_0^1 H\,d\lambda = h(x) \tag{1.5}$$

($u_1 = u(t,x,1)$, $p_x = -(u_{1t} + u_1 u_{1x})$, так как p_x не зависит от λ, эта функция может быть выражена через скорость u и ее производные при фиксированном λ, например при $\lambda = 1$). Замена переменных (1.3) обратима при условии $\Phi_\lambda \neq 0$. Считаем, что $\Phi_\lambda > 0$.

Для дальнейшего преобразования уравнений движения используем соотношение

$$\int_0^1 uH\,d\lambda = Q(t), \tag{1.6}$$

которое означает, что расход жидкости в канале $Q(t)$ в каждый момент времени не зависит от сечения. Пусть расход $Q(t)$ задан, а u_λ и $\theta = H/u_\lambda$ (величина, обратно пропорциональная завихренности) — искомые функции. Тогда от уравнений (1.5) можно перейти к системе

$$u_{\lambda t} + uu_{\lambda x} + u_\lambda u_x = 0, \qquad \theta_t + u\theta_x = 0, \tag{1.7}$$

где функции u и u_x, согласно (1.6), выражаются формулами

$$u = u_1 - \int_\lambda^1 u_\nu\,d\nu, \qquad u_1 = \Big(\int_0^1 u_\lambda\theta\,d\lambda\Big)^{-1}\Big[Q(t) + \int_0^1 u_\lambda\Big(\int_0^\lambda u_\nu\theta\,d\nu\Big)d\lambda\Big],$$

$$\begin{aligned} u_x = -\int_\lambda^1 u_{\nu x}\,d\nu + \Big(\int_0^1 u_\lambda\theta\,d\lambda\Big)^{-1}\Big[&-u_1\Big(\int_0^1 u_{\lambda x}\theta\,d\lambda + \int_0^1 u_\lambda\theta_x\,d\lambda\Big) + \\ &+ \int_0^1 u_{\lambda x}\Big(\int_0^\lambda u_\nu\theta\,d\nu\Big)d\lambda + \int_0^1 u_\lambda\Big(\int_0^\lambda u_{\nu x}\theta\,d\nu\Big)d\lambda + \int_0^1 u_\lambda\Big(\int_0^\lambda u_\nu\theta_x\,d\nu\Big)d\lambda\Big]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Если функции u_λ и θ определены, то известны $H = \theta u_\lambda$, верхняя граница канала $h = \int_0^1 u_\lambda\theta\,d\lambda$ и в силу (1.8) u. Соотношение $h_t = 0$, выражающее тот факт, что верхняя граница фиксирована, является следствием уравнений, поскольку

$$h_t = \int_0^1 (\theta_t u_\lambda + \theta u_{\lambda t})\,d\lambda = -\int_0^1 (uu_\lambda\theta_x + uu_{\lambda x}\theta + u_\lambda u_x\theta)\,d\lambda = -[Q(t)]_x = 0.$$

Формулы $p_x = h_x + p_x^* = -(u_{1t} + u_1 u_{1x})$, $\Phi_\lambda = H$, $\Phi(t,x,0) = 0$ и (1.4) позволяют найти давление (с точностью до произвольной функции от t), Φ и вертикальную компоненту скорости. Таким образом, система уравнений (1.1) в приближении узкого канала сведена к задаче (1.7), к которой в отличие от уравнений (1.5) применимы методы исследования гиперболичности [2].

Замечание 1. Полученные результаты верны и для трехмерных осесимметричных течений. В этом случае система уравнений движения в отсутствие поля внешних сил в длинноволновом приближении имеет вид

$$u_t + uu_x + wu_r + p_x = 0, \qquad p_r = 0,$$

$$u_x + w_r + r^{-1}w = 0, \qquad (uR_x - w)\Big|_{r=R} = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant R(x)).$$

Заменой переменных $y = r^2/2$, $v = rw$, $h(x) = R^2(x)/2$ данная система сводится к уравнениям, аналогичным (1.1) при $\varepsilon = 0$.

2. Условия гиперболичности уравнений движения. Формулируются необходимые и достаточные условия гиперболичности системы (1.7). Анализ характеристических свойств системы (1.7) основан на обобщении понятия гиперболичности для систем уравнений с операторными коэффициентами, предложенного в [2] и примененного в [3] при исследовании задачи со свободной границей.

Система (1.7) допускает запись

$$\mathbf{U}_t + A\mathbf{U}_x = 0, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{U} = (u_\lambda(t,x,\lambda), \theta(t,x,\lambda))^{\mathrm{T}}$; A — матрица с операторными коэффициентами, возникающая при подстановке выражений (1.8) в уравнения (1.7) и действующая на вектор-функцию $\mathbf{f}$ по правилу

$$A\mathbf{f} = \Big(uf_1 - u_\lambda \int\limits_\lambda^1 f_1\,d\nu + u_\lambda h^{-1}\Big[-u_1\Big(\int\limits_0^1 f_1\theta\,d\lambda + \int\limits_0^1 u_\lambda f_2\,d\lambda\Big) + \int\limits_0^1 f_1\Big(\int\limits_0^\lambda u_\nu\theta\,d\nu\Big)\,d\lambda +$$
$$+ \int\limits_0^1 u_\lambda\Big(\int\limits_0^\lambda f_1\theta\,d\nu\Big)\,d\lambda + \int\limits_0^1 u_\lambda\Big(\int\limits_0^\lambda u_\nu f_2\,d\nu\Big)\,d\lambda\Big],\ uf_2\Big)^{\mathrm{T}}.$$

Характеристика системы (2.1) определяется дифференциальным уравнением $x'(t) = k(t,x)$, где k — собственное значение оператора A^* (скорость распространения характеристики). Решение уравнения

$$(\mathbf{F}, (A - kI)\boldsymbol{\varphi}) = 0 \tag{2.2}$$

относительно векторного функционала $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$, действующего на произвольную бесконечно дифференцируемую вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^{\mathrm{T}}$ переменной λ (зависимость от t, x как от параметров), ищется в классе локально интегрируемых либо обобщенных функций. Выражение $(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi})$ обозначает результат действия функционала $\mathbf{F}$ на пробную вектор-функцию. Считаем функции u_λ, θ бесконечно дифференцируемыми по λ. Действие функционала $\mathbf{F}$ на уравнение (2.1) дает соотношение на характеристике:

$$(\mathbf{F}, \mathbf{U}_t + k\mathbf{U}_x) = 0. \tag{2.3}$$

Система (2.1) гиперболична, если все собственные числа k вещественны и совокупность соотношений на характеристиках (2.3) эквивалентна уравнениям (2.1).

С учетом уравнения (2.2) и независимости пробных функций φ_1, φ_2 получаются равенства

$$\Big(F_1, (u-k)\varphi_1 - u_\lambda \int\limits_0^1 \varphi_1\,d\nu + u_\lambda h^{-1}\Big[-u_1 \int\limits_0^1 \varphi_1\theta\,d\nu \int\limits_0^1 \varphi_1\Big(\int\limits_0^\lambda u_\nu\theta\,d\nu\Big)\,d\lambda +$$
$$+ \int\limits_0^1 u_\lambda\Big(\int\limits_0^\lambda \varphi_1\theta\,d\nu\Big)\,d\lambda\Big]\Big) = 0; \tag{2.4}$$

$$(F_2, (u-k)\varphi_2) + h^{-1}\Big[-u_1 \int\limits_0^1 u_\lambda\varphi_2\,d\lambda + \int\limits_0^1 u_\lambda\Big(\int\limits_0^\lambda u_\nu\varphi_2\,d\nu\Big)\,d\lambda\Big](F_1, u_\lambda) = 0. \tag{2.5}$$

Рассмотрим множество чисел k, принадлежащих комплексной плоскости за исключением отрезка $[u_0, u_1]$. С использованием функции $\psi(\lambda) = -\int\limits_{\lambda}^{1} \varphi_1(\nu)\,d\nu$ уравнение (2.4) принимает вид

$$\Bigl(F_1, \Bigl[\Bigl(u(\lambda) - k\Bigr)\Bigl(\psi(\lambda) + h^{-1}\Bigl(u_0\theta_0\psi_0 + \int\limits_0^1 u\theta_\nu\psi\,d\nu\Bigr)\Bigr)\Bigr]_\lambda\Bigr) = 0. \tag{2.4$'$}$$

Здесь и далее индексы 0 и 1 означают, что функции берутся при $\lambda = 0$ и 1. Представим функционал F_1 как композицию V и W, где $(V, \varphi) = -\int\limits_{\lambda}^{1} \varphi(\nu)\,d\nu$. Тогда для определения W получим уравнение

$$(W, (u(\lambda) - k)\psi(\lambda)) + h^{-1}\Bigl(u_0\theta_0\psi_0 + \int\limits_0^1 \psi u\theta_\nu\,d\nu\Bigr)(W, (u(\lambda) - u_1)) = 0, \tag{2.6}$$

из которого находим $(W, \varphi) = \int\limits_0^1 \theta(\lambda)[u(\lambda)\varphi(\lambda)(u(\lambda) - k)^{-1}]_\lambda\,d\lambda$. Следовательно, функционал F_1 действует по правилу

$$(F_1, \varphi) = \int\limits_0^1 \theta(\lambda)\Bigl[u(\lambda)(u(\lambda) - k)^{-1}\int\limits_{\lambda}^{1} \varphi(\nu)\,d\nu\Bigr]_\lambda\,d\lambda. \tag{2.7}$$

Полагая в (2.6) $\psi = (u(\lambda) - u_1)(u(\lambda) - k)^{-1}$, после некоторых преобразований получим характеристическое уравнение

$$k(k - u_1)\int\limits_0^1 \theta(\lambda)u_\lambda(u(\lambda) - k)^{-2}\,d\lambda = 0, \tag{2.8}$$

определяющее дискретный спектр оператора A^*. Заметим, что уравнение (2.8), если u не обращается в нуль, имеет единственный вещественный корень $k = 0$, так как $\theta u_\lambda = H = \Phi_\lambda > 0$, $k \neq u$. Другие характеристические корни, если на рассматриваемом решении они существуют, комплексные. Подставляя $k = 0$ в (2.5), (2.7), находим функционал, отвечающий этому собственному значению,

$$(F_1^0, \varphi) = \int\limits_0^1 \theta(\lambda)\varphi(\lambda)\,d\lambda, \qquad (F_2^0, \varphi) = \int\limits_0^1 u_\lambda\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

Далее покажем, что оператор A^* имеет непрерывный характеристический спектр $k^\lambda(t, x) = u(t, x, \lambda)$, и найдем соответствующие собственные функционалы. Действуя по аналогии с предыдущим, представим F_1 композицией $W \circ V$. Зададим действие функционала V по правилу $(V, \varphi) = (u(\nu) - u(\lambda))^{-1}\int\limits_{\lambda}^{\nu} \varphi(\mu)\,d\mu$. Тогда, согласно (2.4$'$), для определения W получим уравнение $\Bigl(W, \psi(\nu) + h^{-1}\Bigl(u_0\theta_0\psi_0 + \int\limits_0^1 u\theta_\mu\psi\,d\mu\Bigr)\Bigr) = 0$, из которого следует

$(W,\varphi) = \int\limits_0^1 \theta[u\varphi]_\nu\, d\nu$. В итоге определено действие функционала $F_1^{1\lambda} = W \circ V$:

$$(F_1^{1\lambda},\varphi) = \int\limits_0^1 \theta(\nu)\Big[(u(\nu)-u(\lambda))^{-1}u(\nu)\int\limits_\lambda^\nu \varphi(\mu)\,d\mu\Big]_\nu\, d\nu.$$

Из уравнения (2.5) находим функционал $F_2^{1\lambda}$:

$$(F_2^{1\lambda},\varphi) = \int\limits_0^1 u(\nu)u_\nu\varphi(\nu)(u(\nu)-u(\lambda))^{-1}\, d\nu.$$

Очевидно, уравнения (2.4), (2.5) имеют еще одно нетривиальное решение: $(F_1^{2\lambda},\varphi) = 0$, $(F_2^{2\lambda},\varphi) = \delta(\nu-\lambda)$.

Для получения соотношений на характеристиках при $u \neq 0$ будем действовать на уравнения (1.7) функционалами $\mathbf{F}^{1\lambda}$, $\mathbf{F}^{2\lambda}$, $\mathbf{F}^0$. Действие функционала $\mathbf{F}^{1\lambda}$ на систему дает соотношение

$$\int\limits_0^1 \theta(\nu)[u(\nu)(u_t(\nu)+u(\nu)u_x(\nu)-u_t(\lambda)-u(\lambda)u_x(\lambda))(u(\nu)-u(\lambda))^{-1}]_\nu\, d\nu +$$
$$+\int\limits_0^1 u(\nu)u_\nu(\theta_t(\nu)+u(\nu)\theta_x(\nu))(u(\nu)-u(\lambda))^{-1}\, d\nu = 0,$$

которое после преобразований сводится к следующему:

$$u(\lambda)\Big[\int\limits_0^1 [u_\nu(\theta_t(\nu)+u(\lambda)\theta_x(\nu))+\theta(\nu)(u_{\nu t}+u(\lambda)u_{\nu x})](u(\nu)-u(\lambda))^{-1}\, d\nu -$$
$$-\int\limits_0^1 \theta(\nu)u_\nu[u_t(\nu)+u(\lambda)u_x(\nu)-u_t(\lambda)-u(\lambda)u_x(\lambda)](u(\nu)-u(\lambda))^{-2}\, d\nu\Big] +$$
$$+\int\limits_0^1 u_\nu(\theta_t(\nu)+u(\lambda)\theta_x(\nu))\, d\nu + \int\limits_0^1 \theta(\nu)(u_{\nu t}+u(\lambda)u_{\nu x})\, d\nu = 0.$$

С использованием функций h и $R(\lambda) = \int\limits_0^1 u_\nu\theta(\nu)(u(\nu)-u(\lambda))^{-1}\, d\nu$ система соотношений на данных характеристиках принимает вид

$$u(R_t+uR_x)+h_t+uh_x = 0, \qquad \theta_t+u\theta_x = 0, \qquad h_t = 0. \tag{2.9}$$

Замечание 2. Если u обращается в нуль ($u(\lambda_*) = 0$), то функционалы $\mathbf{F}^{1\lambda_*}$, $\mathbf{F}^0$ совпадают и первое из уравнений (2.9) при $u = 0$ выполнено автоматически. В этом случае будем пользоваться собственными функционалами $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{F}^{2\lambda}$ и присоединенным $\mathbf{P}^{1\lambda} = (P_1^{1\lambda}$, $P_2^{1\lambda})$, который действует на пробную функцию φ по правилу

$$(P_1^{1\lambda},\varphi) = \int\limits_0^1 \theta(\nu)\Big[(u(\nu)-u(\lambda))^{-1}\int\limits_\lambda^\nu \varphi(\mu)\,d\mu\Big]_\nu\, d\nu,$$

$$(P_2^{1\lambda},\varphi)=\int\limits_0^1 u_\nu\varphi(\nu)(u(\nu)-u(\lambda))^{-1}\,d\nu$$

и обладает свойством $(\mathbf{P}^{1\lambda},(A-uI)\boldsymbol{\varphi})=(\mathbf{F}^0,\boldsymbol{\varphi})$. В результате действия функционалов $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{P}^{1\lambda}$, $\mathbf{F}^{2\lambda}$ на систему (1.7) получим уравнения

$$R_t+uR_x+h_x=0,\qquad \theta_t+u\theta_x=0,\qquad h_t=0, \tag{2.9$'$}$$

эквивалентные соотношениям на характеристиках (2.9) при $u\neq 0$.

Условия гиперболичности системы уравнений (1.7) формулируются в терминах комплексной функции $\chi(z)=\int\limits_0^1 \theta u_\lambda(u-z)^{-2}\,d\lambda$, а точнее, ее предельных значений

$$\chi^{\pm}(u(\lambda))=-\theta_1(u_1-u(\lambda))^{-1}+\theta_0(u_0-u(\lambda))^{-1}+\int\limits_0^1\theta_\nu(u(\nu)-u(\lambda))^{-1}\,d\nu\pm\pi i\theta_\lambda/u_\lambda$$

из верхней и нижней полуплоскостей на отрезок $[u_0,u_1]$.

Лемма 1. *Уравнение* (2.8) *на решении* u_λ, θ *не имеет комплексных корней, если выполнено условие*

$$\text{æ}=\Delta\arg\,(\chi^+/\chi^-)=0,\qquad \chi^{\pm}\neq 0 \tag{2.10}$$

(*приращение аргумента при изменении* λ *от нуля до* 1).

Доказательство. В уравнении (2.8) только интегральный сомножитель, совпадающий с $\chi(k)$, может иметь комплексные корни. Следовательно, утверждение леммы достаточно проверить для уравнения $\chi(k)=0$. Обведем интервал изменения функции u контуром типа гантели γ и очертим окружность Γ достаточно большого радиуса (такого, чтобы все корни уравнения $\chi(k)=0$ лежали в соответствующем круге) (рис. 1). В области D (пересечение внешности гантели и круга) функция $\chi(k)$ аналитична и не имеет полюсов. В силу принципа аргумента число нулей $\chi(k)$ в этой области равно приращению аргумента по контуру $\gamma\cup\Gamma$, деленному на 2π. Приращение аргумента при обходе окружности Γ против часовой стрелки равно -2π (нуль второго порядка). При обходе по часовой стрелке каждой из незамкнутых окружностей малого радиуса, ограничивающих точки u_0, u_1, аргумент получает приращение по π (полюса первого порядка), что в сумме совпадает с точностью до знака с приращением, полученным при обходе контура Γ. Поэтому число нулей функции χ в области D равно приращению аргумента на ручке гантели, деленному на 2π. Из этого следует, что условие (2.10) является необходимым и достаточным для отсутствия комплексных нулей уравнения $\chi(k)=0$. Лемма доказана.

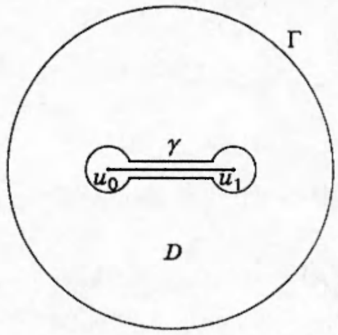

Рис. 1

Требование $\chi^{\pm}\neq 0$ исключает нейтральный случай, поэтому при выполнении (2.10) комплексные характеристические корни отсутствуют не только на данном решении, но и на его достаточно малых возмущениях.

Следующая лемма устанавливает условия, при которых соотношения на характеристиках (2.9) эквивалентны уравнениям (1.7).

Лемма 2. *Пусть компоненты вектор-функции* $\mathbf{S}=(S_1,S_2)^{\mathrm{T}}$ *таковы, что* $\int\limits_\lambda^1 S_1\,d\nu$

удовлетворяет условию Гёльдера, а S_2 *непрерывна по переменной* λ, *выполнены соотношения* $(\mathbf{F}^{1\lambda}, \mathbf{S}) = 0$, $(\mathbf{F}^{2\lambda}, \mathbf{S}) = 0$, $(\mathbf{F}^{0}, \mathbf{S}) = 0$ *и условие* (2.10). *Тогда* $\mathbf{S}(\lambda) \equiv \mathbf{0}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$.

Доказательство. Из уравнения $(\mathbf{F}^{2\lambda}, \mathbf{S}) = 0$ следует, что компонента S_2 равна нулю. С учетом этого для определения функции S_1 получим

$$\int_0^1 \theta(\nu) \Big[(u(\nu) - u(\lambda))^{-1} u(\nu) \int_\lambda^\nu S_1(\mu)\, d\mu \Big]_\nu d\nu = 0, \qquad \int_0^1 \theta(\lambda) S_1(\lambda)\, d\lambda = 0. \tag{2.11}$$

Интегрированием по частям и заменой $\psi(\lambda) = -\int_\lambda^1 S_1(\mu)\, d\mu$ уравнения (2.11) преобразуем к виду

$$u_1\theta_1(u_1 - u(\lambda))^{-1}\psi(\lambda) + u_0\theta_0(u_0 - u(\lambda))^{-1}(\psi_0 - \psi(\lambda)) + \int_0^1 u(\nu)\theta_\nu(u(\nu) - u(\lambda))^{-1}(\psi(\nu) - \psi(\lambda))\, d\nu = 0,$$

$$\psi_0\theta_0 + \int_0^1 \theta_\lambda \psi(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Исключив ψ_0, для определения функции ψ запишем сингулярное интегральное уравнение

$$\Big[u_1\theta_1(u_1 - u(\lambda))^{-1} - u_0\theta_0(u_0 - u(\lambda))^{-1} - \int_0^1 u(\nu)\theta_\nu(u(\nu) - u(\lambda))^{-1}\, d\nu \Big] \psi(\lambda) -$$
$$- u_0(u_0 - u(\lambda))^{-1} \int_0^1 \theta_\nu \psi(\nu)\, d\nu + \int_0^1 u(\nu)\theta_\nu(u(\nu) - u(\lambda))^{-1}\psi(\nu)\, d\nu = 0,$$

которое несложными преобразованиями приведем к виду

$$u(\lambda) \Big[\Big(-\theta_1(u_1 - u(\lambda))^{-1} + \theta_0(u_0 - u(\lambda))^{-1} + \int_0^1 \theta_\nu(u(\nu) - u(\lambda))^{-1}\, d\nu \Big) \psi(\lambda) -$$
$$- (u(\lambda) - u_0)^{-1} \int_0^1 \theta_\nu(u(\nu) - u_0)(u(\nu) - u(\lambda))^{-1}\psi(\nu)\, d\nu \Big] = 0.$$

В силу замечания 2 множитель $u(\lambda)$ в данном выражении можно сократить. Заменой переменной $\xi = u(\nu)$ $(\xi_0 = u(0),\ \xi_1 = u(1),\ z = u(\lambda))$ это уравнение сводится к сингулярному интегральному уравнению, союзному с характеристическим [4]:

$$a(z)\tilde{\psi} - (\pi i)^{-1} \int_{\xi_0}^{\xi_1} b(\xi)(\xi - z)^{-1}\tilde{\psi}(\xi)\, d\xi = 0, \tag{2.12}$$

где функции $a(z)$ и $b(\xi)$ заданы формулами

$$a(z) = (z - \xi_0)\Big(-\tilde{\theta}_1(\xi_1 - z)^{-1} + \tilde{\theta}_0(\xi_0 - z)^{-1} + \int_{\xi_0}^{\xi_1} \tilde{\theta}_\xi(\xi - z)^{-1}\, d\xi\Big),$$

$$b(\xi) = \pi i \tilde{\theta}_\xi(\xi - \xi_0) \qquad (f(\lambda) = \tilde{f}(z)).$$

Введем кусочно-голоморфную функцию, обращающуюся в нуль на бесконечности:

$$\Psi(z) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} b(\xi)\tilde{\psi}(\xi)(\xi - z)^{-1}\, d\xi.$$

Из формул Сохоцкого — Племеля получим равенства

$$a(z)\tilde{\psi}(z) = \Psi^+(z) + \Psi^-(z), \qquad b(z)\tilde{\psi}(z) = \Psi^+(z) - \Psi^-(z),$$

из которых видно, что решение уравнения (2.12) может быть сведено к решению однородной задачи сопряжения $\Psi^+(z) = G(z)\Psi^-(z)$, где $G(z) = (a(z) + b(z))(a(z) - b(z))^{-1}$ — заданная функция, а Ψ — искомая. По известной функции Ψ легко найти $\tilde{\psi} = (2(a+b))^{-1}\Psi^+$. Заметим, что $\chi^{\pm}(z) = (a(z) \pm b(z))(z - \xi_0)^{-1}$. Поэтому приращение аргумента функции $G(z)$ при изменении z от ξ_0 до ξ_1 равно приращению аргумента $\chi^+(z)(\chi^-(z))^{-1}$, а по условию (2.10) равно нулю. Следовательно, индекс задачи сопряжения равен нулю. В этом случае, согласно [4], однородная задача сопряжения имеет только тривиальное решение в классе функций, исчезающих на бесконечности, а значит, и $\tilde{\psi}(z) = \psi(\lambda) = 0$. Так как $S_1(\lambda) = \psi'(\lambda)$, получим, что $S_1(\lambda) \equiv 0$. Лемма доказана.

Теорема. *Для течений с монотонным по глубине профилем скорости условия* (2.10) *являются необходимыми и достаточными для гиперболичности уравнений* (1.7), *если функции u, θ дифференцируемы, а $u_\lambda, \theta_\lambda$ гёльдеровы по переменной λ.*

Доказательство теоремы следует из определения гиперболичности, лемм 1 и 2.

3. Изменение типа системы уравнений в процессе эволюции течения. Приведем точное решение, на котором уравнения (1.7) с ростом времени меняют тип. Рассмотрим решение

$$u = (x + C(\lambda))(t + C(\lambda) + a)^{-1}, \qquad \theta = u^{-1} + (1-u)^{-1} \qquad (0 < u < 1), \tag{3.1}$$

где $C(\lambda)$ — произвольная функция ($C'(\lambda) > 0$, $C(0) = 0$, $C(1) = C_1$); a — положительная постоянная. Неравенства $u_\lambda > 0$, $H = \Phi_\lambda = C'(x + C)^{-1}$, обеспечивающие монотонность профиля скорости по глубине и обратимость замены (1.3), выполнены в области $0 < x < t + a$ ($t \geqslant 0$). Верхняя граница канала и расход заданы функциями

$$h(x) = \ln(1 + C_1 x^{-1}), \qquad Q(t) = \ln(1 + C_1(t+a)^{-1}).$$

В эйлеровых координатах решение имеет вид

$$u = x\exp(y)(t + x(\exp(y) - 1) + a)^{-1},$$

$$v = -(\exp(y) - 1)(t + x(\exp(y) - 1) + a)^{-1}, \qquad p = -y + f(t)$$

($f(t)$ — произвольная функция). Пусть для определенности $C_1 = 12$, $a = 0{,}09$.

Данное решение описывает течение жидкости в сужающемся канале (рис. 2). Горизонтальная компонента скорости u больше нуля, поэтому жидкость течет в положительном направлении по оси x. При фиксированном t и больших значениях x высота канала и вертикальная компонента скорости стремятся к нулю, а горизонтальная — к бесконечности. С ростом времени (при фиксированном x) происходит замедление течения, так как $u \to 0$, $v \to 0$. На рис. 3 показаны профили скорости в точке $x = 0{,}05$ в моменты времени $t = 0$ и 0,8.

Проверку условий гиперболичности системы уравнений (1.7) проведем с использованием функций $Z^{\pm}(u) = (u_1 - u)(u_0 - u)\chi^{\pm}(u)$. На решении (3.1) функции $Z^{\pm}$ имеют вид

$$Z^{\pm}(u) = (u - u_0)[u_1^{-1} + (1 - u_1)^{-1}] + (u_1 - u)[u_0^{-1} + (1 - u_0)^{-1}] -$$
$$-(u_1 - u)(u - u_0)[(1-u)^{-1}((1-u_1)^{-1} - (1-u_0)^{-1}) + u^{-1}(u_0^{-1} - u_1^{-1}) +$$

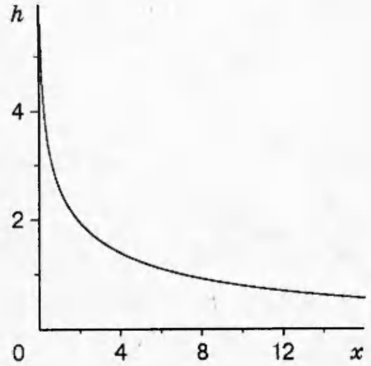

Рис. 2

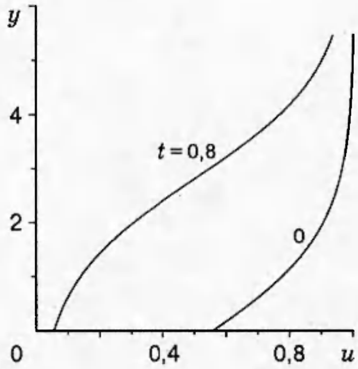

Рис. 3

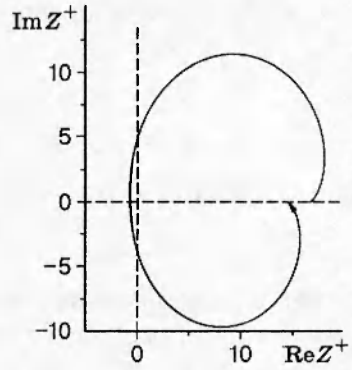

Рис. 4

$$+(1-u)^{-2}\ln((1-u_0)(u_1-u)(1-u_1)^{-1}(u-u_0)^{-1})+$$
$$+u^{-2}\ln(u_1(u-u_0)u_0^{-1}(u_1-u)^{-1})] \mp \pi i(u_1-u)(u-u_0)((1-u)^{-2}-u^{-2}).$$

Видно, что мнимая часть функций $Z^{\pm}$ обращается в нуль только при $u = u_0$, $1/2$, u_1. Если $0 < u < 1/2$ или $1/2 < u < 1$, то $\operatorname{Im} Z^{\pm}(u)$ не меняет знак и условия (2.10) выполнены.

Проверим выполнение условий гиперболичности на решении (3.1) в точке $x = 0{,}05$ в моменты времени $t = 0$; $0{,}8$. При $t = 0$ индекс $æ = 0$ (условия (2.10) выполнены), поскольку $u_0 = 0{,}555\,56 > 1/2$, $\operatorname{Im} Z^{\pm}$ не меняет знак при изменении u от u_0 до u_1 и приращение аргумента функций $Z^{\pm}(u)$ равно нулю. Более того, в начальный момент времени $t = 0$ условия гиперболичности (2.10) выполнены в любой точке x, где решение определено.

При $t = 0{,}8$ на основе рис. 4 (график функции Z^- аналогичен, но обход осуществляется в противоположном направлении) получим $\Delta \arg Z^+(u) = 2\pi$, $\Delta \arg Z^-(u) = -2\pi$ и, следовательно, $æ = 4\pi$. В этом случае условия гиперболичности нарушены, на рассматриваемом решении имеются комплексные характеристические корни. Приведенный пример показывает, что в процессе эволюции течения система уравнений (1.7) может менять тип и, вероятно, при течении жидкости в узком канале возможно возникновение неустойчивости при некоторых распределениях начальных данных.

4. Решение линеаризованной задачи. Линеаризуем уравнения (1.7) на решении $u = u^0(\lambda)$ ($u^0_\lambda \neq 0$), $\theta = \theta^0(\lambda)$. Для этого представим функции u, θ как

$$u(t,x,\lambda) = u^0(\lambda) + \varepsilon u'(t,x,\lambda), \qquad \theta(t,x,\lambda) = \theta^0(\lambda) + \varepsilon\theta'(t,x,\lambda),$$

где $u'(t,x,\lambda)$, $\theta'(t,x,\lambda)$ — неизвестные величины (возмущения); ε — малый параметр. Функция $Q(t)$, задающая расход жидкости в канале, также линеаризуется: $Q(t) = Q_0 + \varepsilon Q_1(t)$. Считаем, что функция $Q_1(t)$ задана. В дальнейшем штрих опускается. Система для определения возмущений имеет вид

$$u_{\lambda t} + u^0 u_{\lambda x} + u^0_\lambda u_x = 0, \qquad \theta_t + u^0\theta_x = 0. \tag{4.1}$$

Здесь функции u и u_x выражены через u^0, θ^0, u_λ, θ и Q_1 формулами

$$u = \Big(\int_0^1 u^0_\lambda\theta^0\,d\lambda\Big)^{-1}\Big[Q_1(t) + \int_0^1 u_\lambda\Big(\int_0^\lambda u^0_\nu\theta^0\,d\nu\Big)d\lambda - u^0_1\int_0^1 u_\lambda\theta^0\,d\lambda +$$
$$+\int_0^1 u^0_\lambda\Big(\int_0^\lambda u_\nu\theta^0\,d\nu\Big)d\lambda - u^0_1\int_0^1 u^0_\lambda\theta\,d\lambda + \int_0^1 u^0_\lambda\Big(\int_0^\lambda u^0_\nu\theta\,d\nu\Big)d\lambda\Big] - \int_\lambda^1 u_\nu\,d\nu,$$

$$
u_x = \Big(\int\limits_0^1 u_\lambda^0\theta^0\,d\lambda\Big)^{-2}\Big[Q_0+\int\limits_0^1 u_\lambda^0\Big(\int\limits_0^\lambda u_\nu^0\theta^0\,d\nu\Big)\,d\lambda\Big]\Big(\int\limits_0^1 u_{\lambda x}\theta^0\,d\lambda+\int\limits_0^1 u_\lambda^0\theta_x\,d\lambda\Big)+
$$

$$
+\Big(\int\limits_0^1 u_\lambda^0\theta^0 d\lambda\Big)^{-1}\Big[\int\limits_0^1 u_{\lambda x}\Big(\int\limits_0^\lambda u_\nu^0\theta^0\,d\nu\Big)d\lambda+\int\limits_0^1 u_\lambda^0\Big(\int\limits_0^\lambda u_{\nu x}\theta^0\,d\nu\Big)d\lambda+\int\limits_0^1 u_\lambda^0\Big(\int\limits_0^\lambda u_\nu^0\theta_x\,d\nu\Big)d\lambda\Big]-\int\limits_\lambda^1 u_{\nu x}\,d\nu,
$$

полученными в результате линеаризации (1.6), (1.8). Таким образом, уравнения (4.1) представляют линейную систему для определения функций u_λ, θ.

Уравнения (4.1) (по аналогии с нелинейной системой (1.7)) эквивалентны соотношениям на характеристиках

$$
u^0(R_t+u^0R_x)+h_t+u^0h_x=0, \qquad \theta_t+u^0\theta_x=0, \qquad h_t=0, \qquad u^0\neq 0, \tag{4.2}
$$

где

$$
R=\int\limits_0^1[\theta^0(\nu)u_\nu+u_\nu^0\theta(\nu)-u_\nu^0\theta^0(\nu)(u(\nu)-u(\lambda))(u^0(\nu)-u^0(\lambda))^{-1}](u^0(\nu)-u^0(\lambda))^{-1}\,d\nu,
$$

$$
h=\int\limits_0^1(u_\lambda^0\theta+\theta^0u_\lambda)\,d\lambda. \tag{4.3}
$$

Если $u^0(\lambda)$ обращается в нуль, следует использовать линеаризованные уравнения (2.9′). В результате интегрирования соотношений (4.2) получим

$$
R(t,x,\lambda)=f_1(x-tu^0(\lambda),\lambda)-(u^0(\lambda))^{-1}h(x), \qquad \theta(t,x,\lambda)=f_2(x-tu^0(\lambda),\lambda)
$$

(функции f_1, f_2 определяются начальными данными). Пусть имеются начальные данные:

$$
u_\lambda(0,x,\lambda)=s(x,\lambda), \qquad \theta(0,x,\lambda)=f_2(x,\lambda).
$$

Тогда f_1 будет найдена подстановкой в (4.3) функций s и f_2 вместо u_λ и θ. Для получения решения системы (4.1) необходимо выразить u_λ через известные величины R, θ, h, u^0 и θ^0.

Действуя по аналогии с доказательством леммы 2, введем функцию $\psi(\lambda)=-\int\limits_\lambda^1 u_\nu\,d\nu$ и представим уравнения (4.3) в виде

$$
\theta_1^0\psi(\lambda)(u_1^0-u^0(\lambda))^{-1}+\theta_0^0(\psi_0-\psi(\lambda))(u_0^0-u^0(\lambda))^{-1}+\int\limits_0^1\theta_\nu^0(\psi(\nu)-\psi(\lambda))(u^0(\nu)-u^0(\lambda))^{-1}\,d\nu=
$$

$$
=R(\lambda)-\int\limits_0^1\theta(\nu)u_\nu^0(u^0(\nu)-u^0(\lambda))^{-1}\,d\nu, \qquad \int\limits_0^1\theta^0\psi_\lambda\,d\lambda=h-\int\limits_0^1\theta u_\lambda^0\,d\lambda. \tag{4.3′}
$$

Выразим ψ_0 из второго уравнения (4.3′) и подставим в первое, после преобразования получим соотношение

$$
g(\lambda)=\psi(\lambda)(u_0^0-u^0(\lambda))\Big[-\theta_1^0(u_1^0-u^0(\lambda))^{-1}+\theta_0^0(u_0^0-u^0(\lambda))^{-1}+\int\limits_0^1\theta_\nu^0(u^0(\nu)-u^0(\lambda))^{-1}\,d\nu\Big]+
$$

$$
+\int\limits_0^1\theta_\nu(u^0(\nu)-u_0^0)(u^0(\nu)-u^0(\lambda))^{-1}\psi(\nu)\,d\nu,
$$

$$g(\lambda) = -h + \int_0^1 u_\lambda^0 \theta \, d\lambda + (u_0^0 - u^0(\lambda)) \Big[R(\lambda) - \int_0^1 u_\nu^0 \theta(\nu) (u^0(\nu) - u^0(\lambda))^{-1} \, d\nu \Big],$$

которое заменой переменной $\xi = u^0(\nu)$ ($\xi_0 = u_0^0, \xi_1 = u_1^0, z = u(\lambda)$) приведем к сингулярному интегральному уравнению, союзному с характеристическим [4]:

$$\tilde{\psi}(z)\tilde{K}(z)(\xi_1 - z)^{-1} - \Psi(z) = \tilde{g}(z).$$

Здесь

$$\Psi(z) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \tilde{\theta}_\xi (\xi_0 - \xi)(\xi - z)^{-1} \tilde{\psi}(\xi) \, d\xi;$$

$$\tilde{K}(z) = (\xi_0 - z)(\xi_1 - z) \Big[-\tilde{\theta}_1^0 (\xi_1 - z)^{-1} + \tilde{\theta}_0^0 (\xi_0 - z)^{-1} + \int_{\xi_0}^{\xi_1} \tilde{\theta}_\xi^0 (\xi - z)^{-1} \, d\xi \Big].$$

Как и в п. **2**, используется обозначение $f(\lambda) = \tilde{f}(z)$. Решение интегрального уравнения сводится к решению неоднородной задачи сопряжения:

$$\Psi^+(z) = G(z)\Psi^-(z) + 2\pi i (\xi_0 - z)(\xi_1 - z) \tilde{\theta}_z^0 \tilde{g}(z) / \tilde{K}^-(z), \qquad G = \tilde{K}^+ / \tilde{K}^-.$$

Заметим, что $\tilde{K}(z)$ удовлетворяет требованиям канонической функции и с точностью до сомножителя совпадает с функцией $\tilde{\chi}(z)$, в терминах предельных значений которой были сформулированы условия гиперболичности уравнений (1.7). Поэтому индекс задачи сопряжения равен нулю. Согласно [4], решение неоднородной задачи сопряжения, исчезающее на бесконечности, запишем как

$$\Psi(z) = \tilde{K}(z) \int_{\xi_0}^{\xi_1} (\xi_0 - \xi)(\xi_1 - \xi) \theta_\xi^0 \tilde{g}(\xi) [\tilde{K}^+(\xi) K^-(\xi)(\xi - z)]^{-1} \, d\xi.$$

Решение интегрального уравнения $\tilde{\psi}(z)$ имеет вид

$$\tilde{\psi}(z) = (2\pi i (\xi_0 - z) \tilde{\theta}_z^0)^{-1} [\Psi^+(z) - \Psi^-(z)].$$

Проведя непосредственные вычисления и сделав обратную замену переменных, находим

$$\psi(\lambda) = (u_1^0 - u^0(\lambda)) [K(\lambda) g(\lambda) (K^+(\lambda) K^-(\lambda))^{-1} + N(\lambda)],$$

$$N(\lambda) = \int_0^1 (u_0^0 - u^0(\nu))(u_1^0 - u^0(\nu)) \theta_\nu^0 g(\nu) [(K^+ K^-)(\nu)(u^0(\nu) - u^0(\lambda))]^{-1} \, d\nu.$$

Теперь искомая функция u_λ определяется дифференцированием ψ по переменной λ. Таким образом, получено решение задачи Коши для системы уравнений (4.1).

Для системы (1.7) можно построить пример некорректной задачи Коши, если на рассматриваемом решении $u = u^0(\lambda)$, $\theta = \theta^0(\lambda)$ существуют комплексные корни уравнения (2.8). Система уравнений (4.1) имеет решение

$$u = \varphi_1(\lambda) \exp(il(x - kt)), \qquad \theta = \varphi_2(\lambda),$$

где k — комплексный ($\mathrm{Im} k > 0$) корень характеристического уравнения (2.8). При $l \to \infty$ функция $u(0, x, \lambda)$ ограничена, но $u(t, x, \lambda)$ ($t > 0$) стремится к бесконечности. Отсутствие непрерывной зависимости решения от начальных данных указывает на некорректность задачи Коши при нарушении условий (2.10).

Автор благодарит профессора В. М. Тешукова за внимание к работе, участие в обсуждении результатов и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00859) и программы «Ведущие научные школы» (код проекта 96-15-96283).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
2. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
3. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. С. 321–323.

Поступила в редакцию 30/X 1996 г.