УДК 519.644.7

Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений икосаэдра с инверсией

А.С. Попов

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
E-mail: popov@labchem.sscc.ru

Попов А.С. Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений икосаэдра с инверсией // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 4. — С. 413–423.

Описывается алгоритм поиска наилучших (в некотором смысле) кубатурных формул на сфере, инвариантных относительно преобразований группы вращений икосаэдра с инверсией. Проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатурных формул данного вида симметрии до 79-го порядка точности. Даются с 16-ю значащими цифрами параметры новых кубатурных формул 21-го, 25-го и 29-го порядков точности.

DOI: 10.15372/SJNM20170405

Ключевые слова: *численное интегрирование, инвариантные кубатурные формулы, инвариантные многочлены, группа вращений икосаэдра.*

Popov A.S. The cubature formulas on a sphere invariant to the icosahedral group of rotations with inversion // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 4. — P. 413–423.

An algorithm of the search for the best (in a sense) cubature formulas on a sphere that are invariant with respect to the transformations of the icosahedral group of rotations with inversion is described. This algorithm is applied to finding the parameters of all the best cubature formulas of this symmetry type up to the 79th order of accuracy. The parameters of the new cubature formulas of the 21st, 25th and 29th orders of accuracy to 16 significant digits are given.

Keywords: *numerical integration, invariant cubature formulas, invariant polynomials, icosahedral group of rotations.*

1. Введение

С момента создания С.Л. Соболевым общей теории кубатурных формул на сфере, инвариантных относительно преобразований конечных групп вращений, прошло уже более полувека (см. [1, 2]). За это время наибольшее распространение получили кубатурные формулы, инвариантные относительно групп симметрии правильных многогранников (см. [3–28] и имеющуюся там литературу). Среди этих кубатурных формул особый интерес представляют кубатуры, имеющие положительные веса и содержащие при этом минимальное число узлов (кубатуры гауссова типа). В случае наличия для данного порядка точности n нескольких кубатур с положительными весами и одинаковым числом узлов в [23] был предложен новый критерий оптимальности, согласно которому наилучшей среди этих кубатур считается та, которая имеет наименьший главный член погрешности. В дальнейшем этот критерий был использован для поиска наилучших кубатур для группы вращений тетраэдра [28], группы вращений тетраэдра с инверсией [27], группы вращений октаэдра [23], группы вращений октаэдра с инверсией [24] и группы вращений икосаэдра [25, 26].

В данной работе будет предложен алгоритм поиска наилучших кубатур, инвариантных относительно высшей группы пространственной симметрии — группы вращений икосаэдра с инверсией. Будут проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данной группы симметрии для $n \le 79$. Даются с 16-ю значащими цифрами параметры новых кубатур для $n = 21$, 25, 29.

2. Алгоритм поиска наилучших кубатур

Пусть S — единичная сфера с центром в начале координат, т. е. множество точек $(x, y, z) \in R_3$, для которых $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Рассмотрим на S интеграл

$$U(f) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(s)\, ds, \tag{1}$$

где $s \in S$, ds — элемент поверхности сферы, $U(1) = 1$.

Для численного нахождения интеграла (1) построим кубатурную формулу, инвариантную относительно преобразований группы вращений икосаэдра с инверсией Y_h, в виде

$$\begin{gathered} V(f) = A_0 \sum_{j=1}^{12} f(a_{0j}) + B_0 \sum_{j=1}^{20} f(b_{0j}) + C_0 \sum_{j=1}^{30} f(c_{0j}) + \\ \sum_{i=1}^{L} A_i \sum_{j=1}^{60} f(a_{ij}) + \sum_{i=1}^{M} B_i \sum_{j=1}^{120} f(b_{ij}), \end{gathered} \tag{2}$$

где 12 точек a_{0j} лежат в вершинах вписанного в сферу икосаэдра и имеют координаты:

$$\begin{gathered} (\pm a, \pm b, 0), \quad (0, \pm a, \pm b), \quad (\pm b, 0, \pm a), \\ a = \sqrt{(5+\sqrt{5})/10}, \quad b = \sqrt{(5-\sqrt{5})/10}\,; \end{gathered}$$

20 точек b_{0j} отвечают центрам граней икосаэдра при координатах:

$$\begin{gathered} (\pm c, \pm d, 0), \quad (0, \pm c, \pm d), \quad (\pm d, 0, \pm c), \quad (\pm e, \pm e, \pm e), \\ c = \sqrt{(3-\sqrt{5})/6}, \quad d = \sqrt{(3+\sqrt{5})/6}, \quad e = 1/\sqrt{3}\,; \end{gathered}$$

30 точек c_{0j} отвечают серединам рёбер икосаэдра при координатах:

$$\begin{gathered} (\pm g, \pm h, \pm t), \quad (\pm t, \pm g, \pm h), \quad (\pm h, \pm t, \pm g), \\ (\pm 1, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0), \quad (0, 0, \pm 1), \\ g = (\sqrt{5}+1)/4, \quad h = (\sqrt{5}-1)/4, \quad t = 1/2; \end{gathered}$$

60 точек a_{ij} отвечают рёбрам и медианам граней икосаэдра и порождены точкой $(a_i, b_i, 0)$ группы вращений икосаэдра Y; 120 точек b_{ij} отвечают точкам общего положения на гранях икосаэдра и порождены двумя точками $(c_i, d_i, \pm e_i)$ группы Y.

Напомним, что каждая точка общего положения вида (a, b, c) группы Y порождает 60 эквивалентных точек (см. [25]).

Величины a_i, b_i, c_i, d_i, e_i удовлетворяют уравнениям связи:

$$a_i^2 + b_i^2 = 1, \qquad c_i^2 + d_i^2 + e_i^2 = 1. \tag{3}$$

Общее число узлов в кубатурной формуле (2) обозначим через N.

Будем говорить, что данная кубатурная формула имеет алгебраический порядок точности n (или просто порядок n), если она точна для всех многочленов степени не выше n и не точна хотя бы для одного многочлена степени $n+1$.

Пусть $\{Z_{kj}(x,y,z);\ k=0,1,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,2k+1\}$ — ортонормированная система многочленов степени не выше n, для которых $U(Z_{kj}Z_{lm}) = \delta_{kl}\delta_{jm}$. Здесь индекс k нумерует степени базисных многочленов, а индекс j — многочлены при данном k; δ_{kl} — символ Кронекера. Погрешностью кубатурной формулы (2) на многочленах степени k назовём величину [23]:

$$E_k = \left(\sum_{j=1}^{2k+1} \left(U(Z_{kj}) - V(Z_{kj})\right)^2 \right)^{1/2}.$$

Для кубатурной формулы порядка n все величины $E_k = 0$ при $k \le n$, а $E_{n+1} > 0$. Величину E_{n+1} назовём главным членом погрешности кубатурной формулы.

В данной работе будет сделана попытка построить все наилучшие кубатурные формулы вида (2) на сфере для $n \le 79$. При этом наилучшей среди всех кубатурных формул этого вида, имеющих данный порядок n, мы будем считать ту, которая последовательно удовлетворяет четырём условиям [23]:

1) узлы принадлежат области интегрирования,
2) веса положительны,
3) число узлов минимально,
4) главный член погрешности минимален.

Пусть строится кубатурная формула вида (2) для некоторого порядка n. Достаточно потребовать, чтобы эта формула была точна для всех многочленов вида $u^k v^l$ ($k, l = 0, 1, \ldots,\ 6k + 10l \le n$):

$$\begin{gathered}
u = 5(Ax^2 - By^2)(Ay^2 - Bz^2)(Az^2 - Bx^2) + 1, \\
v = \big(25\sqrt{5}(Cx^2 - Dy^2)(Cy^2 - Dz^2)(Cz^2 - Dx^2) \times \\
(1 - 4(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)) + 5u - 1\big)/4, \\
A = (\sqrt{5}+1)/2, \quad B = (\sqrt{5}-1)/2, \quad C = B^2, \quad D = A^2.
\end{gathered}$$

Тогда для всех других многочленов степени не выше n наша формула будет точна автоматически [25].

Обозначим число базисных многочленов степени не выше n через m.

Параметрами кубатурной формулы (2) являются веса и координаты узлов. С учётом уравнений связи (3) легко видеть, что узлы a_{0j}, b_{0j} и c_{0j} имеют по одному свободному параметру (это их веса A_0, B_0 и C_0), узлы a_{ij} имеют по два свободных параметра, а узлы b_{ij} — по три свободных параметра. В итоге на один свободный параметр приходится: 12 узлов a_{0j}, 20 узлов b_{0j}, 30 узлов c_{0j} или a_{ij}, 40 узлов b_{ij}. Отсюда следует, что для получения формулы с минимальным для данного n числом узлов N выгоднее всего использовать в первую очередь узлы a_{0j}, затем — узлы b_{0j}, далее — узлы c_{0j} и a_{ij} и лишь в последнюю очередь — узлы b_{ij}.

Однако здесь имеется одно существенное ограничение. Дело в том, что среди базисных многочленов степени $n \geq 30$ содержатся многочлены вида $u^k v^l w$ $(k, l = 0, 1, \dots)$:

$$w = -16v^2 + 40u^2 v - 25u^4 + 20uv^2 - 45u^3 v + 27u^5 - v^3$$

(см. [25, формула (8)], где вместо нашего w фигурирует w^2). Эти многочлены обращаются в нуль в узлах a_{0j}, b_{0j}, c_{0j} и a_{ij}. В то же время интеграл $U(u^k v^l w) > 0$. Поэтому правильное интегрирование этих многочленов возможно лишь с привлечением узлов b_{ij}. Для кубатуры порядка n число базисных функций, требующих привлечения узлов b_{ij}, есть величина m_0, которая равна полному числу базисных функций m для кубатуры степени $n - 30$ (в самом деле, умножая произвольную базисную функцию любой степени n вида $u^k v^l$ на w, мы получим базисную функцию степени $n+30$, требующую привлечения узлов b_{ij}). Таким образом, величина M в (2) должна быть такой, чтобы выполнялось условие $3M \geq m_0$.

Далее задаём величину L в (2) так, чтобы общее число свободных параметров кубатуры было равно m. При этом, если нужно, можно положить $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ или $C_0 = 0$.

Затем подставляем m базисных функций на место f в формулу (2) и решаем систему m нелинейных алгебраических уравнений с m неизвестными свободными параметрами кубатуры. В отличие, например, от случая группы вращений октаэдра [23], здесь мы не можем заранее быть уверены, что возникающая система нелинейных уравнений будет разрешима. Тем более мы не можем заранее гарантировать, что все веса кубатуры будут положительны. Поэтому, как правило, нужно выполнить несколько попыток с разным набором параметров кубатуры, чтобы получить для данного n формулу с минимальным N и с положительными весами. Как говорилось выше, в случае наличия нескольких таких формул с одинаковым N наилучшей среди них считается та, которая имеет наименьшую величину главного члена погрешности E_{n+1}.

Аналогично работе [25] при выполнении практических расчётов с целью определения параметров конкретных кубатур мы будем использовать не параметры a_i, b_i, c_i, d_i и e_i, а параметры u_i и v_i, которые равны значениям функций u и v в узлах a_{ij} и b_{ij} соответственно. Поскольку величина w равна нулю в узлах a_{ij}, то на параметры u_i и v_i каждой из L групп точек a_{ij} налагаются уравнения связи

$$w_i = -16v_i^2 + 40u_i^2 v_i - 25u_i^4 + 20u_i v_i^2 - 45u_i^3 v_i + 27u_i^5 - v_i^3 = 0. \qquad (4)$$

Эти уравнения мы не будем разрешать явно, а добавим их к исходной системе m уравнений, появляющихся после подстановки всех базисных функций на место f в формулу (2). Так что всего будет $m+L$ уравнений, определяющих параметры нашей кубатуры. Решив эту систему, получим $L+M$ наборов параметров u_i и v_i, причём первые L параметров u_i и v_i будут удовлетворять уравнению (4). Заметим, что $u = v = 0$ в узлах a_{0j}, $u = 32/27$, $v = 256/81$ в узлах b_{0j}, $u = v = 1$ в узлах c_{0j}.

Для определения L параметров a_i, b_i через найденные величины u_i, v_i можно использовать формулы

$$a_i^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{(1-u_i)(9u_i^2 - 4v_i)}{4v_i - u_i^2 - 3u_i v_i} - \frac{1}{2} \right) \Big/ \sqrt{5}, \qquad b_i^2 = 1 - a_i^2.$$

Данные выражения легко получить из приводимого ниже алгоритма, если положить $a_i = c_i$, $b_i = d_i$, $e_i = s_i = w_i = 0$.

Для определения M параметров c_i, d_i, e_i через найденные величины u_i, v_i можно использовать следующий алгоритм, представляющий собой некоторую модификацию соответствующего алгоритма из [25]. В данном алгоритме используется тот факт, что группа вращений икосаэдра с инверсией содержит подгруппу вращений тетраэдра с инверсией, поэтому сначала вычисляются тетраэдральные координаты r, s, t, а затем — декартовы x, y, z.

1. Введём тетраэдральные переменные:

$$r_i = c_i^2 d_i^2 + c_i^2 e_i^2 + d_i^2 e_i^2, \qquad s_i = c_i^2 d_i^2 e_i^2, \qquad t_i = (c_i^2 - d_i^2)(c_i^2 - e_i^2)(d_i^2 - e_i^2).$$

   Переменная r в данном алгоритме совпадает с переменной s в алгоритме [25], а переменная s данного алгоритма равна квадрату переменной r из [25]. Переменные t обоих алгоритмов совпадают.

2. Возьмём в качестве s_i один из корней уравнения пятой степени

$$\left(x^2 - \frac{u_i}{32}x + \frac{9u_i^2 - 4v_i}{20480}\right)^2 x - \frac{w_i}{52428800000} = 0,$$

   где, как и выше по тексту, $w_i = -16v_i^2 + 40u_i^2 v_i - 25u_i^4 + 20u_i v_i^2 - 45u_i^3 v_i + 27u_i^5 - v_i^3$. Данное уравнение получается из уравнения (9) работы [25] путём переноса члена с w в правую часть, возведения обеих частей уравнения в квадрат с последующей заменой x^2 на x и w^2 на w.

3. Положим

$$r_i = \frac{102400s_i^2 - 320(6u_i - v_i)s_i + 4v_i - u_i^2 - 3u_i v_i}{5(102400s_i^2 - 1920u_i s_i + 9u_i^2 - 4v_i)},$$
$$t_i = \frac{2(1 - u_i)/5 - r_i + 11s_i}{\sqrt{5}}.$$

   Данные выражения легко получаются из соответствующих выражений [25] с учётом соответствия переменных, указанного на шаге 1.

4. Пусть $x_i \geq y_i \geq z_i \geq 0$ — корни кубического уравнения

$$x^3 - x^2 + r_i x - s_i = 0.$$

5. Положим $e_i = \sqrt{z_i}$.

6. Если $t_i \geq 0$, положим $c_i = \sqrt{x_i}$, $d_i = \sqrt{y_i}$, в противном случае $c_i = \sqrt{y_i}$, $d_i = \sqrt{x_i}$.

Шаги 4–6 этого алгоритма отвечают шагам 1–3 алгоритма 2 из [27].

3. Построение новых кубатур

Кубатура $n = 21$, $N = 192$, $L = 3$, $M = 0$, $B_0 = C_0 = 0$.

Поочерёдно подставляя в (2) семь базисных функций и добавляя три уравнения связи, получим следующую систему:

$$
\begin{aligned}
V(1) &= 12A_0 + 60A_1 + 60A_2 + 60A_3 = 1,\\
V(u) &= 60A_1u_1 + 60A_2u_2 + 60A_3u_3 = 16/21,\\
V(v) &= 60A_1v_1 + 60A_2v_2 + 60A_3v_3 = 256/231,\\
V(u^2) &= 60A_1u_1^2 + 60A_2u_2^2 + 60A_3u_3^2 = 2048/3003,\\
V(uv) &= 60A_1u_1v_1 + 60A_2u_2v_2 + 60A_3u_3v_3 = 18432/17017,\\
V(u^3) &= 60A_1u_1^3 + 60A_2u_2^3 + 60A_3u_3^3 = 8192/12597,\\
V(v^2) &= 60A_1v_1^2 + 60A_2v_2^2 + 60A_3v_3^2 = 1900544/969969,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-16v_1^2 + 40u_1^2v_1 - 25u_1^4 + 20u_1v_1^2 - 45u_1^3v_1 + 27u_1^5 - v_1^3 = 0,\\
-16v_2^2 + 40u_2^2v_2 - 25u_2^4 + 20u_2v_2^2 - 45u_2^3v_2 + 27u_2^5 - v_2^3 = 0,\\
-16v_3^2 + 40u_3^2v_3 - 25u_3^4 + 20u_3v_3^2 - 45u_3^3v_3 + 27u_3^5 - v_3^3 = 0.
\end{aligned}
$$

Решая эту систему численно, находим:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 0.4573468585094262E-2, & A_1 &= 0.3386842090125361E-2,\\
A_2 &= 0.6026213879415452E-2, & A_3 &= 0.6338916980107001E-2,\\
a_1 &= 0.4611490009811005E-1, & b_1 &= 0.9989361420976525E+0,\\
a_2 &= 0.9587293351026753E+0, & b_2 &= 0.2843203510366117E+0,\\
a_3 &= 0.5158659234706932E+0, & b_3 &= 0.8566693346920554E+0.
\end{aligned}
$$

Кубатура $n = 25$, $N = 252$, $L = 4$, $M = 0$, $B_0 = C_0 = 0$.
Решая систему из 9+4=13 уравнений, получаем:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 0.2667520904474026E-2, & &\\
A_1 &= 0.3650789044047501E-2, & A_2 &= 0.4098718231969162E-2,\\
A_3 &= 0.4126798398773681E-2, & A_4 &= 0.4256856810981517E-2,\\
a_1 &= 0.9397283064728942E+0, & b_1 &= 0.3419220817870444E+0,\\
a_2 &= 0.6024292898307894E+0, & b_2 &= 0.7981722563168747E+0,\\
a_3 &= 0.9929317885177863E+0, & b_3 &= 0.1186864076079067E+0,\\
a_4 &= 0.2180804296529830E+0, & b_4 &= 0.9759307999045682E+0.
\end{aligned}
$$

Кубатура $n = 29$, $N = 332$, $L = 3$, $M = 1$, $C_0 = 0$.
Решая систему из 11+3=14 уравнений, находим:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 0.3473549085574238E-2, & &\\
B_0 &= 0.2785035467617369E-2, & A_1 &= 0.3022348695811747E-2,\\
A_2 &= 0.3374112232899828E-2, & A_3 &= 0.3510787329478828E-2,\\
a_1 &= 0.6286442904438386E+0, & b_1 &= 0.7776929703246408E+0,\\
a_2 &= 0.9935762933969139E+0, & b_2 &= 0.1131642576065859E+0,\\
a_3 &= 0.9439281525944457E+0, & b_3 &= 0.3301509393287209E+0,\\
B_1 &= 0.2568181717744480E-2, & c_1 &= 0.1847725580439959E+0,\\
d_1 &= 0.9790280870296092E+0, & e_1 &= 0.8580854620037653E-1.
\end{aligned}
$$

Заметим, что в [14] приведена кубатура $n = 29$, $N = 302$, $L = 4$, $M = 0$ с отрицательными весами, не содержащая узлов общего положения b_{ij}.

Расчёт параметров новых кубатур проводился с использованием арифметики повышенной точности (более 30 десятичных знаков в мантиссе) на вычислительной технике Сибирского суперкомпьютерного центра. Системы нелинейных алгебраических уравнений решались численным методом ньютоновского типа, аналогичным работам [23, 24].

Приведём теперь сводную таблицу, содержащую основные характеристики всех наилучших на сегодняшний день кубатур группы Y_h до 79-го порядка точности.

В таблице L — ссылка на первоисточник, $\eta = (n+1)^2/(3N)$ — так называемый коэффициент эффективности (см., например, [3, 4]). Для кубатур с минимальным числом узлов величина $\eta \to 1$ при $n \to \infty$ (см. [4]).

n	N	η	E_{n+1}	L	n	N	η	E_{n+1}	n	N	η	E_{n+1}
5	12	1.0000	2.3917	[29]	33	422	0.9131	0.6462	57	1142	0.9819	0.8189
9	32	1.0417	2.2441	[30]	35	462	0.9351	1.4846	59	1232	0.9740	1.4447
11	62	0.7742	1.9227	[3]	37	512	0.9401	0.1416	61	1322	0.9692	0.7508
15	92	0.9275	1.0509	[13]	39	542	0.9840	1.7606	63	1412	0.9669	0.1160
17	122	0.8852	0.2648	[13]	41	632	0.9304	1.0069	65	1472	0.9864	0.1977
19	152	0.8772	1.9519	[14]	43	692	0.9326	0.3425	67	1592	0.9682	0.1082
21	192	0.8403	1.0182		45	732	0.9636	1.0167	69	1662	0.9828	1.1576
23	212	0.9057	1.3804	[16]	47	782	0.9821	0.1893	71	1782	0.9697	1.4503
25	252	0.8942	0.2475		49	872	0.9557	0.5268	73	1892	0.9648	0.0557
27	272	0.9608	0.2190	[15]	51	962	0.9369	0.4558	75	1952	0.9863	0.1718
29	332	0.9036	1.5134		53	1022	0.9511	0.1941	77	2042	0.9931	0.1444
31	392	0.8707	0.3333		55	1082	0.9661	0.2079	79	2162	0.9867	0.7239

Заметим, что указанные в этой таблице кубатуры для $n = 5, 9$ являются наилучшими не только для группы Y_h, но и вообще для всех групп симметрии.

Укажем также, что в работах [25, 26] приведены аналогичные таблицы, содержащие основные характеристики наилучших кубатур группы вращений икосаэдра Y для $n \le 65$. Сравнение этих таблиц показывает, что для $n = 5, 9, 11, 15, 17, 27$ наилучшие кубатуры этих групп совпадают друг с другом, а для всех остальных n наилучшие кубатуры группы Y содержат меньшее число узлов по сравнению с наилучшими кубатурами группы Y_h. Однако для больших n всё же предпочтительнее пользоваться наилучшими кубатурами группы Y_h, поскольку асимптотически при одинаковой точности $n \to \infty$ они требуют вдвое меньше информации для хранения в памяти ЭВМ. Кроме того, все кубатуры группы Y_h обладают центральной симметрией и поэтому автоматически точны для всех нечётных функций.

Литература

1. **Соболев С.Л.** О кубатурных формулах на сфере, инвариантных при преобразовании конечных групп вращений // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 146, № 2.— С. 310–313.
2. **Соболев С.Л.** О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сиб. матем. журн.— 1962.— Т. 3, № 5.— С. 769–796.
3. **McLaren A.D.** Optimal numerical integration on a sphere // Math. Comput.— 1963.— Vol. 17, № 83.— P. 361–383.
4. **Лебедев В.И.** Значения узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса–Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.— 1975.— Т. 15, № 1.— С. 48–54.
5. **Лебедев В.И.** О квадратурах на сфере // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.— 1976.— Т. 16, № 2.— С. 293–306.

6. **Лебедев В.И.** Квадратурные формулы для сферы 25–29-го порядка точности // Сиб. матем. журн. — 1977. — Т. 18, № 1. — С. 132–142.

7. **Лебедев В.И.** Квадратурная формула 35-го порядка для сферы // Теория кубатурных формул и вычисл. математика / Тр. конференции по дифф. уравнениям и вычисл. математике. Отв. редактор акад. С.Л. Соболев. — Новосибирск: Наука, 1980. — С. 110–114.

8. **Лебедев В.И., Скороходов А.Л.** Квадратурные формулы для сферы 41-, 47- и 53-го порядков // Докл. РАН. — 1992. — Т. 324, № 3. — С. 519–524.

9. **Лебедев В.И.** Квадратурная формула для сферы 59-го алгебраического порядка точности // Докл. РАН. — 1994. — Т. 338, № 4. — С. 454–456.

10. **Лебедев В.И., Лайков Д.Н.** Квадратурная формула для сферы 131-го алгебраического порядка точности // Докл. РАН. — 1999. — Т. 366, № 6. — С. 741–745.

11. **Лебедев В.И., Лайков Д.Н.** Квадратурные формулы для сферы гауссова типа порядков 65, 71, 77, 83, 89, 95 и 101 // Кубатурные формулы и их приложения / Материалы 5-го Международного семинара-совещания. — Красноярск, 2000. — С. 106–118.

12. **Лебедев В.И., Лайков Д.Н.** Квадратурные формулы для сферы гауссового типа порядков 107, 113, 119 и 125 // Кубатурные формулы и их приложения / Тр. 6-го Международного семинара-совещания. — Уфа, 2002. — С. 82–94.

13. **Коняев С.И.** Квадратурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы икосаэдра. — Москва, 1975. — (Препринт / Ин-т атомной энергии АН СССР; ИАЭ-2516).

14. **Коняев С.И.** Квадратуры типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы икосаэдра с инверсией // Матем. заметки. — 1979. — Т. 25, № 4. — С. 629–634.

15. **Коняев С.И.** Формулы численного интегрирования на сфере // Теоремы вложения и их приложения / Тр. семинара акад. С.Л. Соболева. — Новосибирск, 1982. — № 1. — С. 75–82.

16. **Коняев С.И.** Квадратурные формулы для сферы 23 и 27 порядков, инвариантные относительно группы икосаэдра с инверсией. — Москва, 1990. — (Препринт / Ин-т атомной энергии АН СССР; ИАЭ-5072/16).

17. **Konyaev S.I.** On invariant quadrature formulae for a sphere // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 1995. — Vol. 10, № 1. — P. 41–47.

18. **Мысовских И.П.** Интерполяционные кубатурные формулы. — М.: Наука, 1981.

19. **Попов А.С.** Кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно группы тетраэдра // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1995. — Т. 35, № 3. — С. 459–466. — Перевод: Popov A.S. Cubature formulae for a sphere which are invariant with respect to the tetrahedral group // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 1995. — Vol. 35, № 3. — P. 369–374.

20. **Попов А.С.** Кубатурные формулы высоких порядков точности для сферы, инвариантные относительно группы тетраэдра // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1996. — Т. 36, № 4. — С. 5–9. — Перевод: Popov A.S. Cubature formulae of high orders of accuracy for a sphere which are invariant with respect to the tetrahedral group // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 1996. — Vol. 36, № 4. — P. 417–421.

21. **Попов А.С.** Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений октаэдра // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 1. — С. 34–41. — Перевод: Popov A.S. Cubature formulas on a sphere that are invariant with respect to octahedron rotation groups // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 1998. — Vol. 38, № 1. — P. 30–37.

22. **Попов А.С.** Новые кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно группы вращений октаэдра // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2001. — Т. 4, № 3. — С. 281–284.

23. **Попов А.С.** Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений октаэдра // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2002. — Т. 5, № 4. — С. 367–372.
24. **Попов А.С.** Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений октаэдра с инверсией // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2005. — Т. 8, № 2. — С. 143–148.
25. **Попов А.С.** Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений икосаэдра // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2008. — Т. 11, № 4. — С. 433–440. — Перевод: Popov A.S. Cubature formulas on a sphere invariant under the icosahedral rotation group // Numerical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 1, № 4. — P. 355–361.
26. **Попов А.С.** Новые кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений икосаэдра // Кубатурные формулы и их приложения / Материалы 10-го Международного семинара-совещания. — Улан-Удэ, 2009. — С. 111–118.
27. **Попов А.С.** Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы тетраэдра с инверсией // Сибирские электронные математические известия. — 2014. — Т. 11. — С. 372–379.
28. **Попов А.С.** Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно групп симметрии правильных многогранников // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — Т. 14. — С. 190–198.
29. **Диткин В.А.** О некоторых приближенных формулах для вычисления трехкратных интегралов // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 62, № 4. — С. 445–447.
30. **Диткин В.А., Люстерник Л.А.** Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере // Вычисл. математика и вычисл. техника. — М.: Машгиз, 1953. — № 1. — С. 3–13.

Поступила в редакцию 21 февраля 2017 г.,
в окончательном варианте 25 апреля 2017 г.

Литература в транслитерации

1. **Sobolev S.L.** O kubaturnyh formulah na sfere, invariantnyh pri preobrazovanii konechnyh grupp vrashcheniy // Dokl. AN SSSR. — 1962. — T. 146, № 2. — S. 310–313.
2. **Sobolev S.L.** O formulah mekhanicheskih kubatur na poverhnosti sfery // Sib. matem. zhurn. — 1962. — T. 3, № 5. — S. 769–796.
3. **McLaren A.D.** Optimal numerical integration on a sphere // Math. Comput. — 1963. — Vol. 17, № 83. — P. 361–383.
4. **Lebedev V.I.** Znacheniya uzlov i vesov kvadraturnyh formul tipa Gaussa–Markova dlya sfery ot 9-go do 17-go poryadka tochnosti, invariantnyh otnositel'no gruppy oktaedra s inversiey // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1975. — T. 15, № 1. — S. 48–54.
5. **Lebedev V.I.** O kvadraturah na sfere // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1976. — T. 16, № 2. — S. 293–306.
6. **Lebedev V.I.** Kvadraturnye formuly dlya sfery 25–29-go poryadka tochnosti // Sib. matem. zhurn. — 1977. — T. 18, № 1. — S. 132–142.
7. **Lebedev V.I.** Kvadraturnaya formula 35-go poryadka dlya sfery // Teoriya kubaturnyh formul i vychisl. matematika / Tr. konferentsii po diff. uravneniyam i vychisl. matematike. Otv. redaktor akad. S.L. Sobolev. — Hovosibirsk: Nauka, 1980. — S. 110–114.
8. **Lebedev V.I., Skorohodov A.L.** Kvadraturnye formuly dlya sfery 41-, 47- i 53-go poryadkov // Dokl. RAH. — 1992. — T. 324, № 3. — S. 519–524.

9. **Lebedev V.I.** Kvadraturnaya formula dlya sfery 59-go algebraicheskogo poryadka tochnosti // Dokl. RAH. — 1994. — T. 338, № 4. — S. 454–456.
10. **Lebedev V.I., Laykov D.N.** Kvadraturnaya formula dlya sfery 131-go algebraicheskogo poryadka tochnosti // Dokl. RAH. — 1999. — T. 366, № 6. — S. 741–745.
11. **Lebedev V.I., Laykov D.N.** Kvadraturnye formuly dlya sfery gaussova tipa poryadkov 65, 71, 77, 83, 89, 95 i 101 // Kubaturnye formuly i ih prilozheniya / Materialy 5-go Mezhdunarodnogo seminara-soveshchaniya. — Krasnoyarsk, 2000. — S. 106–118.
12. **Lebedev V.I., Laykov D.N.** Kvadraturnye formuly dlya sfery gaussovogo tipa poryadkov 107, 113, 119 i 125 // Kubaturnye formuly i ih prilozheniya / Tr. 6-go Mezhdunarodnogo seminara-soveshchaniya. — Ufa, 2002. — S. 82–94.
13. **Konyaev S.I.** Kvadraturnye formuly na sfere, invariantnye otnositel'no gruppy ikosaedra. — Moskva, 1975. — (Preprint / In-t atomnoy energii AN SSSR; IAE-2516).
14. **Konyaev S.I.** Kvadratury tipa Gaussa dlya sfery, invariantnye otnositel'no gruppy ikosaedra s inversiey // Matem. zametki. — 1979. — T. 25, № 4. — S. 629–634.
15. **Konyaev S.I.** Formuly chislennogo integrirovaniya na sfere // Teoremy vlozheniya i ih prilozheniya / Tr. seminara akad. S.L. Soboleva. — Novosibirsk, 1982. — № 1. — S. 75–82.
16. **Konyaev S.I.** Kvadraturnye formuly dlya sfery 23 i 27 poryadkov, invariantnye otnositel'no gruppy ikosaedra s inversiey. — Moskva, 1990. — (Preprint / In-t atomnoy energii AN SSSR; IAE-5072/16).
17. **Konyaev S.I.** On invariant quadrature formulae for a sphere // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 1995. — Vol. 10, № 1. — P. 41–47.
18. **Mysovskih I.P.** Interpolyatsionnye kubaturnye formuly. — M.: Nauka, 1981.
19. **Popov A.S.** Kubaturnye formuly dlya sfery, invariantnye otnositel'no gruppy tetraedra // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1995. — T. 35, № 3. — S. 459–466. — Perevod: Popov A.S. Cubature formulae for a sphere which are invariant with respect to the tetrahedral group // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 1995. — Vol. 35, № 3. — P. 369–374.
20. **Popov A.S.** Kubaturnye formuly vysokih poryadkov tochnosti dlya sfery, invariantnye otnositel'no gruppy tetraedra // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1996. — T. 36, № 4. — S. 5–9. — Perevod: Popov A.S. Cubature formulae of high orders of accuracy for a sphere which are invariant with respect to the tetrahedral group // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 1996. — Vol. 36, № 4. — P. 417–421.
21. **Popov A.S.** Kubaturnye formuly na sfere, invariantnye otnositel'no gruppy vrashcheniy oktaedra // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1998. — T. 38, № 1. — S. 34–41. — Perevod: Popov A.S. Cubature formulas on a sphere that are invariant with respect to octahedron rotation groups // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 1998. — Vol. 38, № 1. — P. 30–37.
22. **Popov A.S.** Novye kubaturnye formuly dlya sfery, invariantnye otnositel'no gruppy vrashcheniy oktaedra // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2001. — T. 4, № 3. — S. 281–284.
23. **Popov A.S.** Poisk nailuchshih kubaturnyh formul dlya sfery, invariantnyh otnositel'no gruppy vrashcheniy oktaedra // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2002. — T. 5, № 4. — S. 367–372.
24. **Popov A.S.** Poisk nailuchshih kubaturnyh formul dlya sfery, invariantnyh otnositel'no gruppy vrashcheniy oktaedra s inversiey // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2005. — T. 8, № 2. — S. 143–148.
25. **Popov A.S.** Kubaturnye formuly na sfere, invariantnye otnositel'no gruppy vrashcheniy ikosaedra // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2008. — T. 11, № 4. — S. 433–440. — Perevod: Popov A.S. Cubature formulas on a sphere invariant under the icosahedral rotation group // Numerical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 1, № 4. — P. 355–361.

26. **Popov A.S.** Novye kubaturnye formuly na sfere, invariantnye otnositel'no gruppy vrashcheniy ikosaedra // Kubaturnye formuly i ih prilozheniya / Materialy 10-go Mezhdunarodnogo seminara-soveshchaniya. — Ulan-Ude, 2009. — S. 111–118.

27. **Popov A.S.** Kubaturnye formuly na sfere, invariantnye otnositel'no gruppy tetraedra s inversiey // Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. — 2014. — T. 11. — S. 372–379.

28. **Popov A.S.** Kubaturnye formuly na sfere, invariantnye otnositel'no grupp simmetrii pravil'nyh mnogogrannikov // Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. — 2017. — T. 14. — S. 190–198.

29. **Ditkin V.A.** O nekotoryh priblizhennyh formulah dlya vychisleniya trekhkratnyh integralov // Dokl. AN SSSR. — 1948. — T. 62, № 4. — S. 445–447.

30. **Ditkin V.A., Lyusternik L.A.** Ob odnom prieme prakticheskogo garmonicheskogo analiza na sfere // Vychisl. matematika i vychisl. tekhnika. — M.: Mashgiz, 1953. — № 1. — S. 3–13.