4. **Rosato A., Strandburg K. J., Prinz F., Swendsen R. H.** Why the Brazil nuts are on top: size segregation of particulate matter by shaking // Phys. Rev. Lett.— 1987.— V. 58, N 10.
5. **Геология** и сейсмичность зоны БАМ/Под. ред. Н. А. Логачева.— Новосибирск: Наука, 1983.

г. Люберцы *Поступила 26/I 1989 г., в окончательном варианте — 10/XI 1989 г.*

УДК 532.529.6

П. К. Волков

ДВИЖЕНИЕ ЦЕПОЧКИ ПУЗЫРЬКОВ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В барботажных аппаратах или при равномерном пропускании пузырьков газа через трубку, заполненную жидкостью, наблюдаются регулярные цепочки пузырьков, движущихся друг за другом, практически одинаковых по форме. Очевидно, что скорость всплытия их в этом случае отличается от скорости одиночного пузырька такого же размера, а картина течения существенно зависит от расстояния между ними. Теоретическое и экспериментальное исследование представляет значительные трудности и в настоящее время. Пожалуй, только [1], где получены продольные компоненты вектора скорости по сечению трубы за пузырьком и измерено трение на стенке трубы, дает некоторое количественное представление о гидродинамике процесса.

В данной работе предложен алгоритм численного решения задачи о стационарном движении цепочки пузырьков в вязкой жидкости в вертикальной трубе под действием силы Архимеда. Получены результаты для случаев, когда стенки трубы практически не оказывают влияния на процесс всплытия и когда оно является определяющим.

1. Постановка задачи. В системе координат, связанной с центром масс какого-нибудь пузырька, труба движется вниз с постоянной скоростью u, равной скорости всплытия пузырька, а жидкость обтекает эту цепочку. Теперь для описания движения всей цепочки достаточно рассмотреть обтекание одного пузырька. Поскольку задача периодическая, на расстоянии L вверх и вниз от центра масс пузырька картина течения одна и та же; величина периода равна $2L$.

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом O, совпадающим с центром масс пузырька (рис. 1). Пусть $r = R(\theta)$ $(\theta \in [0, \pi])$ — уравнение поверхности пузыря, $R_к$ — радиус трубы. Уравнения Навье — Стокса вязкой несжимаемой жидкости в переменных вихрь ω — функция тока ψ с учетом осевой симметрии имеют тот же вид, что и в [2, 3].

Краевые условия отличаются от описанных в [3] только на сечениях Γ_1 $(r = L/\cos\theta, \theta \in [0, \theta^*])$ и Γ_2 $(r = -L/\cos\theta, \theta \in [\pi - \theta^*, \pi], \operatorname{tg}\theta^* = R_к/L)$, где задаются условия периодичности, отражающие тот факт, что значения функций скорости и их производных по нормали к границам Γ_1 и Γ_2 совпадают. Как следует из [4], в терминах вихрь ω — функция тока ψ они имеют вид (z — направление вдоль оси трубы)

$$\psi|_{\Gamma_1} = \psi|_{\Gamma_2}, \quad \partial\psi/\partial z|_{\Gamma_1} = \partial\psi/\partial z|_{\Gamma_2},$$
$$\omega|_{\Gamma_1} = \omega|_{\Gamma_2}, \quad \partial\omega/\partial z|_{\Gamma_1} = \partial\omega/\partial z|_{\Gamma_2}. \tag{1.1}$$

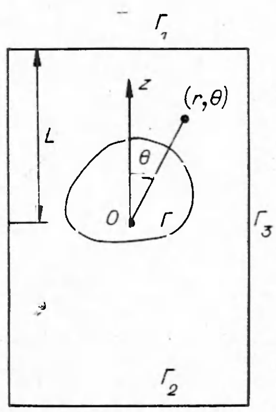

Рис. 1

Задача с условиями (1.1), очевидно, отличается от решаемой в [3], где на входе и выходе задан вектор скорости. Условия (1.1) означают, что профиль вектора скорости на границах Γ_1, Γ_2 должен быть найден одновременно с функциями течения.

2. Алгоритм решения. Поскольку усложнение задачи касается только краевых условий, для решения ее используем тот же метод, что и в [3]. Замена переменных $\eta = (r - G(\theta))/(R(\theta) - G(\theta))$,

$\theta' = \theta$ переводит область течения в прямоугольник $[0, 1] \times [0, \pi]$. Здесь функция $r = G(\theta)$ $(\theta \in [0, \pi])$ задает уравнение границы, состоящей из трех частей: Γ_1, Γ_2, Γ_3. При $\eta = 0$ уравнения (1.1) примут вид

$$\psi|_{\Gamma_1} = \psi|_{\Gamma_2}, \quad (A\psi_\eta + B\psi_\theta)|_{\Gamma_1} = (A\psi_\eta + B\psi_\theta)|_{\Gamma_2},$$
$$\omega|_{\Gamma_1} = \omega|_{\Gamma_2}, \quad (A\omega_\eta + B\omega_\theta)|_{\Gamma_1} = (A\omega_\eta + B\omega_\theta)|_{\Gamma_2}, \tag{2.1}$$

где $A = (\cos\theta + (G'/G)\sin\theta)/(R - G)$; $B = -\sin\theta/G$.

Для численного решения задачи использовались разностная схема и алгоритм, изложенный в [5]. Однако непосредственное применение разностной схемы невозможно по двум причинам.

Во-первых, на Γ_3 имеем два условия для функции ψ и нет условия для ω. Это типичная ситуация для задач, когда есть условия прилипания на твердых стенках, решаемых в переменных функция тока ψ — вихрь ω. Аналогично [6] получим условие для ω на Γ_3 с использованием уравнений движения:

$$\omega = \frac{G^2 + G'^2}{2(R-G)^2 G^3 \sin\theta}\left[\frac{2}{h_1^2}(\psi_1 - \psi_2 + h_1\psi_\eta) + \frac{2G'(R-G)}{G^2 + G'^2}\psi_{\eta\theta} + \right.$$
$$\left. + \frac{(R-G)\left(G'' - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}G\right) - 2G'(R' - G')}{G^2 + G'^2}\psi_\eta\right]. \tag{2.2}$$

Здесь h_1 — шаг разностной сетки по η; ψ_1 — значение ψ на стенке Γ_3; ψ_2 — значение ψ на расстоянии h_1 от стенки; ψ_η, $\psi_{\eta\theta}$ вычисляются согласно (1.6) из [3]. Для получения устойчивого счета с условием (2.2) необходимо делать процедуру релаксации [7]: $\omega^{k+1} = \alpha\omega + (1 - \alpha)\omega^k$ (k — номер итерации, α подбирается экспериментально ($\sim h_1$)).

Во-вторых, условия (2.1) связывают функции и их производные на разных участках границы $\eta = 0$. Получим формулы для расчета ψ и ω на Γ_1 и Γ_2, точно удовлетворив при этом (2.1). Задачи определения ψ и ω будем решать, как и в [5], методом стабилизирующей поправки. Очевидно, что трудности возникнут при расчете задачи с условиями (2.1). Пусть, как и в методе левой прогонки [8],

$$\psi_{i+1}^j = \alpha_{i+1}^j\psi_i^j + \beta_{i+1}^j \tag{2.3}$$

$\left(\psi_{i+1}^j = \psi((i+1)h_1, jh_2)\right.$, h_2 — шаг по θ; α_{i+1}^j, β_{i+1}^j — прогоночные коэффициенты), тогда при $i = 1$ имеем разностную аппроксимацию (2.1):

$$\psi_1^j = \psi_1^{m-j+1}, \quad A^j\frac{\psi_2^j - \psi_1^j}{h_1} + B^j\frac{\psi_1^j - \psi_1^{j-1}}{h_2} =$$
$$= A^{m-j+1}\frac{\psi_2^{m-j+1} - \psi_1^{m-j+1}}{h_1} + B^{m-j+1}\frac{\psi_1^{m-j+1} - \psi_1^{m-j}}{h_2}.$$

Добавляя при $i = 1$ соотношения из (2.3)

$$\psi_2^j = \alpha_2^j\psi_1^j + \beta_2^j, \quad \psi_2^{m-j+1} = \alpha_2^{m-j+1}\psi_1^{m-j+1} + \beta_2^{m-j+1},$$

получим четыре уравнения для определения ψ_1^j, ψ_1^{m-j+1}, ψ_2^j, ψ_2^{m-j+1}. Исключая ψ_2^j, ψ_2^{m-j+1}, находим

$$\psi_1^j = \frac{(B^j + B^{m-j+1})\psi_1^{j-1}/h_2 + (A^{m-j+1}\beta_2^{m-j+1} - A^j\beta_2^j)/h_1}{A^j(\alpha_2^j - 1)/h_1 - A^{m-j+1}(\alpha_2^{m-j+1} - 1)/h_1 + (B^j + B^{m-j+1})/h_2} \tag{2.4}$$

(m — число точек по θ, $j \in [1, j^*]$, j^* — число точек на Γ_1, Γ_2). Можно показать, что знаменатель в (2.4) в нуль не обращается. Аналогично получим выражение для ω_1^j. Все прогоночные коэффициенты α_{i+1}^j, β_{i+1}^j ($i = m - 2, \ldots, 1$) насчитываются заранее при каждом значении j по формулам левой прогонки [8]. Таким образом, условия (2.1) реализованы точно на каждой итерации метода расчета.

3. **Результаты расчетов.** Решение исходной задачи, очевидно, зависит от четырех независимых безразмерных параметров, в качестве которых можно взять Re, We, $\lambda = a/R_{\text{к}}$, L. Расчеты проводились для $\lambda = 0{,}2$ и $L = 20$. Можно ожидать, что при некоторых значениях Re и We, когда след за пузырьком невелик, будет возможно сравнение с данными [5].

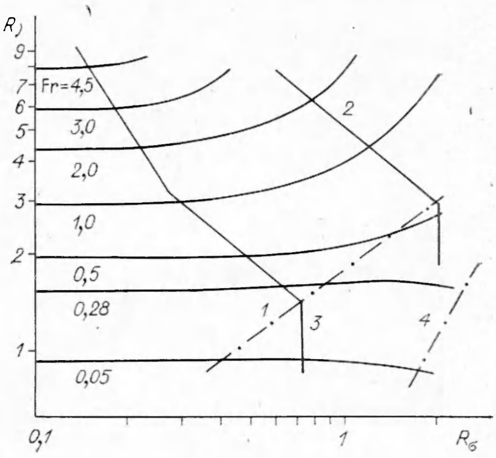

Рис. 2

Результаты расчетов представлены на рис. 2 изолиниями числа Фруда $\mathrm{Fr} = u^2/ga$ в координатах $R_\sigma = a/(\sigma/\rho g)^{1/2}$, $R_\nu = a/(\nu^2/g)^{1/3}$. Учитывая, что $(R_\sigma/R_\nu)^6 = g\rho^3\nu^4/\sigma^3 = \mathrm{M}$ (M — число Мортона), можно легко найти скорость всплытия u для пузырька данного размера a в заданной жидкости. Поскольку на рис. 2 в качестве координат выбраны $\lg R_\sigma$ и $\lg R_\nu$, каждая жидкость изображается некоторой прямой, имеющей наклон 45° к оси R_σ. Отметим, что для жидкостей с большим значением M (как правило, достаточно вязких) скорость всплытия пузырька растет с увеличением его размера. В жидкостях с малым M, изображаемых прямой выше линии *1*, зависимость скорости всплытия пузырька от его размера носит немонотонный характер. При некотором значении a имеется локальный максимум скорости. Это соответствует случаю, когда изолиния Fr = const касается прямой, изображающей на рис. 2 жидкость. При дальнейшем увеличении R_σ (размера a) Fr (скорость всплытия) убывает для заданной жидкости. Расчеты показали, что точка локального максимума скорости всплытия отвечает моменту образования вихревого следа за пузырьком. На диаграмме выше верхней линии *2* за пузырьком имеется замкнутый след.

Левый угол, очерченный ломаной линией *3*, — область сферических пузырьков. Линия *1* указывает на то, что носовая часть пузырька начинает выдвигаться вперед, линия *4* — что кормовая часть начинает выдвигаться назад. Таким образом, при $\mathrm{Re} < 0{,}4$ влияние стенок на всплытие пузырька сказывается на процессе его деформации — он вытягивается вдоль оси трубы. В области сферических пузырьков изолинии Fr = const практически прямолинейны и соответствуют постоянному значению Re.

При $\mathrm{Re} < 20$ значения Fr и картина течения хорошо согласуются с расчетами [5]. Расчеты с $\mathrm{Re} \geqslant 20$ дают Fr, отличающиеся от [5] на 10—15 %. Линии, указывающие на наличие вихревого следа и зоны сферических пузырьков, расположены несколько ниже, чем по расчетам [5]. Последнее объясняется тем, что в настоящей работе точек по θ взято в 2 раза больше, чем в [5]. Существенные отличия содержатся в форме вихревого следа, здесь он имеет значительно большую длину. На рис. 3 показана картина течения для Re = 40, We = 8,4. M = 0,00043, $R_\sigma = 2{,}04$, $R_\nu = 7{,}43$. Параметры течения и его структура в целом близки к указанным в [9].

Хорошее согласование расчетов [5] с экспериментами [9] по коэффициенту сопротивления (или, что то же самое, по Fr) объясняется тем, что главный вклад в интегральные характеристики вносят отрывная зона, которая имеется в [5], и течение вблизи пузырька. В случае, когда форма свободной поверхности и точка отрыва близки, наступает совпадение по коэффициенту сопротивления. Длина следа определяется наличием вторичного течения, которое на рис. 3 проявляется локальным максимумом функции тока, равным 0,16.

Построенный алгоритм позволяет практически точно найти структуру следа за пузырьком. В самом деле, при решении задачи о движении оди-

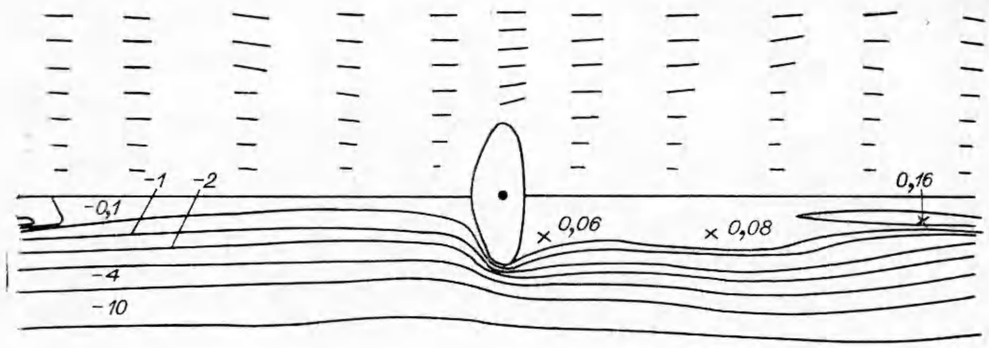

Рис. 3

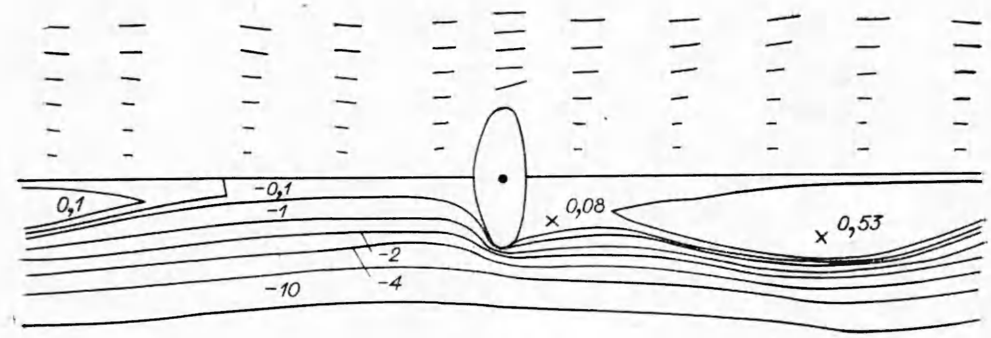

Рис. 4

ночного пузырька в неограниченной области невозможно точно удовлетворить краевым условиям на внешней границе течения. Приходится, как правило, прибегать к сносу их на некоторое конечное расстояние. Кроме того, не совсем ясно, какие условия надо ставить за пузырьком. В данной постановке все зависит от расстояния между пузырьками $2L$. При достаточно большом L будем иметь слабое влияние одного пузырька на другой, которое может быть оценено при сравнении с экспериментом.

На рис. 4 показана картина течения для $\mathrm{Re} = 60$, $\mathrm{We} = 9{,}6$, $\mathrm{M} = 0{,}0001$, $R_\sigma = 1{,}9$, $R_\nu = 8{,}8$, $\mathrm{Fr} = 1{,}14$. За пузырьком существуют отрывная зона и развитое вторичное течение в следе. При увеличении We зона интенсивного вторичного течения, которая занимает почти все пространство между пузырьками, приближается к нему.

Расчеты с $L = 10$ показали, что уже с $\mathrm{Re} > 20$ след от переднего пузырька замыкается на заднем, и, таким образом, всплывает уже не цепочка из отдельных пузырьков, обтекаемых жидкостью, а некоторое образование как одно целое, состоящее из пузырьков и жидкости между ними. Скорость всплытия его больше, чем у отдельного пузырька, и определяется суммарной силой Архимеда пузырьков, входящих в это образование. При всплытии таких цепочек происходит перемещение жидкости, захватываемой пузырьками, снизу вверх.

Расчеты другого предельного случая (всплытия цепочек пузырьков в каналах, радиус которых сравним с a ($\lambda = 0{,}8$)), показали, что скорость их всплытия и картина течения такие же, как и при всплытии одиночного пузырька, если расстояние между пузырьками больше диаметра канала. Этот вывод полностью согласуется с расчетами [3], где получено, что уже на расстоянии 1.5 калибров трубы от пузырька профиль скорости по сечению трубы выравнивался.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nakorjakov V. E., Kashinsky O. N., Kozmenko B. K.** Experimental study of gas liquid slug flow in a small-diameter vertical pipe // Int. J. Multiphase Flow.— 1986.— V. 12, N 3.

2. **Волков П. К., Кузнецов Б. Г.** Численное решение задачи о стационарном обтекании вязкой жидкостью газовой полости в трубе // ЧММСС.— 1982.— Т. 13, № 5.
3. **Волков П. К.** Всплывание газового пузыря в трубе, заполненной вязкой жидкостью // ПМТФ.— 1989.— № 6.
4. **Сироченко В. П.** Численное решение одной задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в двусвязной области // ЧММСС.— Новосибирск.— 1977.— Т. 8, № 1.
5. **Christov C. I., Volkov P. K.** Numerical investigation of the steady viscous flow past a stationary deformable bubble // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 158.— P. 341.
6. **Том А., Эйплт К.** Числовые расчеты полей в технике и физике.— М.; Л.: Энергия, 1964.
7. **Тарунин Е. Л.** Оптимизация неявных схем для уравнений Навье—Стокса в переменных функции тока и вихря скорости//V Всесоюз. семинар по численным методам механики вязкой жидкости.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.— Т. 1.
8. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.
9. **Bhaga D., Weber M. E.** Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities // J. Fluid Mech.— 1981.— V. 105.— P. 61.

г. Новосибирск *Поступила 25/X 1988 г.*

УДК 532.72

Т. А. Боднарь

УСТОЙЧИВОСТЬ АДИАБАТИЧЕСКОГО ПРОТОЧНОГО ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Численные исследования (см., например, [1—3]) показали возможность существования множества стационарных режимов работы химических реакторов с распределенными параметрами. Вместе с тем, как указал Н. Н. Моисеев в послесловии к [4], численные методы изучения систем с распределенными параметрами перестают работать в окрестностях точек бифуркации, в которых решение теряет единственность. Разработка численных методов постбифуркационного анализа, позволяющих найти все решения, выходящие из точек бифуркации, сопряжена с огромными трудностями, особенно в случае многомерных или многофакторных задач. Это в полной мере относится к численным исследованиям химических реакторов с распределенными параметрами.

В настоящей работе в рамках теории [4] предлагается метод анализа устойчивости стационарных решений системы уравнений в частных производных, описывающей работу проточного химического реактора с адиабатическим изменением температуры. Метод основан на редукции размерности бесконечномерной задачи за счет использования проекций ее решений на пространство собственных функций и альтернативы Фредгольма. Данным методом найдены нулевое, бифуркационное и изолированные (разрушающие бифуркацию) решения и определена их устойчивость. Анализ устойчивости полученных в пространстве размерности R^2 решений основан на теоремах Ляпунова и утверждении Хопфа об эквивалентности строгой потери устойчивости и двойной точки бифуркации [5].

Предполагается, что скорость тепловыделения в реакторе является непрерывной функцией $\varphi(c, T)$ от температуры и концентраций реагирующих веществ и $\partial\varphi(c, T)/\partial T > 0$. Такое предположение справедливо для любых реакций с аррениусовской скоростью выделения тепла.

1. Постановка задачи. Математическое описание процесса в проточном химическом реакторе имеет вид [6]

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - w \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \frac{Qz}{c_p} \varphi(c, T); \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} - w \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} - z\varphi(c, T), \tag{1.2}$$

где x — координата; t — время; T — температура; $\varkappa$ — температуропроводность; c — концентрация; Q — тепловой эффект реакции, отнесенный к единице массы; z — предэкспонент; E — энергия активации; c_p — удельная теплоемкость; R — универсальная газовая постоянная; w — скорость потока; D — коэффициент диффузии; $\varphi(c, T)$ — непрерывная функция от концентраций и температуры. Не нарушая общности, предполагаем, что в реакторе происходит реакция типа Лэнгмюра —