приемами, например, по методу С. А. Чаплыгина [10]. Из преимуществ метода оценок следует отметить простоту нахождения последующих разложений по степеням $1/\theta_0$, знание интервала, в котором располагается точное решение, простоту обобщения на функции тепловыделения, отличающиеся от аррениусовской. Предварительные результаты данной работы применительно к ламинарным пламенам сообщены в [11].

Поступила 5 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новиков С. С., Рязанцев Ю. С.** О существовании и единственности решения системы уравнений тепловой теории горения.— ПМТФ, 1964, № 4.
2. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961.
3. **Johnson W. E., Nachbar W.**— In: 8 th Sympos. (Internat.) on Combust. Baltimore, 1962.
4. **Зельдович Я. Б.** К теории распространения пламени.—«Журн. физ. химии», 1948, т. 22, № 1.
5. **Ваганов Д. А., Худяев С. И.** Об одной стационарной задаче теории горения.— ФГВ, 1969, т. 5, № 2.
6. **Берман В. С., Рязанцев Ю. С.** К анализу задачи о тепловом распространении пламени методом сращиваемых асимптотических разложений.— ПММ, 1972, т. 36, № 4.
7. **Берман В. С., Рязанцев Ю. С.** Применение метода сращиваемых асимптотических разложений к расчету стационарного теплового распространения фронта экзотермической реакции в конденсированной среде.— ПМТФ, 1972, № 5.
8. **Баушев В. С., Вилюнов В. Н.** Скорость распространений и пределы существования турбулентного пламени.— ПМТФ, 1972, № 3.
9. **Баушев В. С., Вилюнов В. Н.** К математической теории стационарной скорости распространения мелкомасштабного турбулентного пламени.— ПМТФ, № 4, 1973.
10. **Чаплыгин С. А.** Избранные труды по механике и математике. М., 1954, с. 490.
11. **Баушев В. С., Вилюнов В. Н.** О методе оценок нормальной скорости распространения пламени.— В кн.: Аннотации третьей научной конференции по математике и механике. Томск, изд. Томск. ун-та, 1973.

УДК 533.6.011

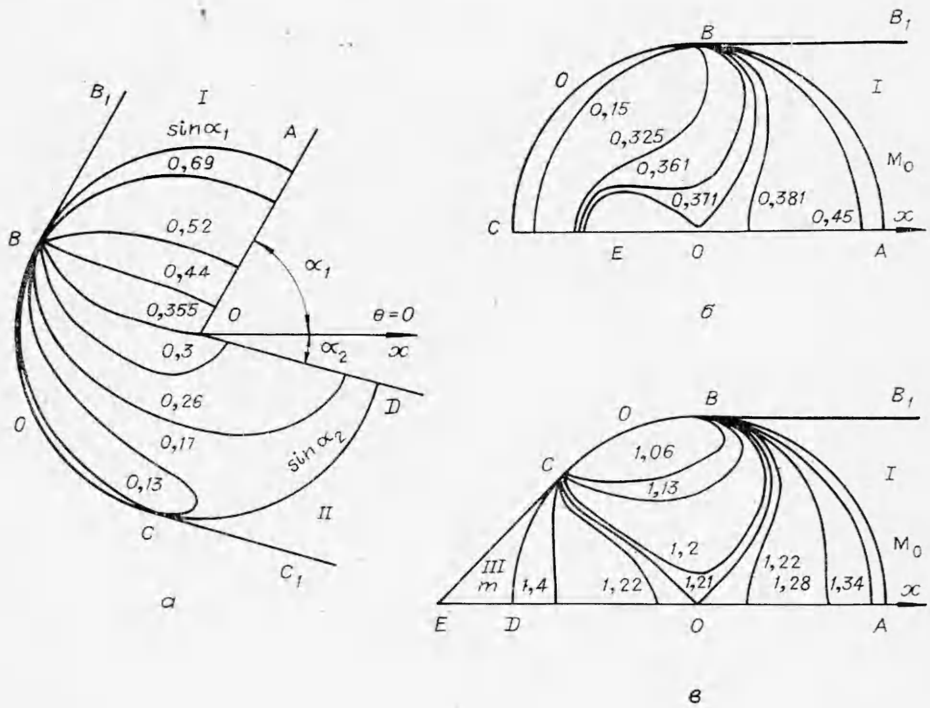
НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ, ИНИЦИИРУЕМОГО ВНЕЗАПНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КЛИНА

В. В. Титаренко

(*Саратов*)

Методом сращиваемых асимптотических разложений изучаются некоторые автомодельные задачи о внезапном движении клина, рассмотренные в линейном приближении в работах [1—3]. Определен характер волновой границы области возмущений. Построены решения, описывающие во втором приближении течения за фронтами слабых ударных волн, распространяющимися по покоящемуся газу, и за фронтами линий слабого разрыва, распространяющимися по известным однородным потокам. Сформулирована краевая задача, решение которой описывает в первом приближении течения в окрестностях точек взаимодействия фронтов. Установлено существование законов подобия течений в этих окрестностях. Дается приближенное решение задач.

1. Рассмотрим течение покоящегося идеального политропического газа, возникающее при внезапном движении в отрицательном направлении оси Ox бесконечного клина с постоянной скоростью W_0. Параметрами этой



Ф и г. 1

автомодельной задачи являются число Маха клина $M_0 = W_0/a_0$, показатель адиабаты газа γ и углы α_1, α_2, образованные гранями клина с осью Ox. Рассматриваются случаи движения (*а*) клина произвольного угла раствора с малой скоростью ($M_0 \ll 1$), (*б*) тонкого клина ($\alpha_j = \alpha \ll 1$) с дозвуковой скоростью и (*в*) тонкого клина со сверхзвуковой скоростью (фиг. 1, *а—в* соответственно). В последнем случае должно выполняться условие $\alpha M_0 \ll 1$.

В областях *I—III* (фиг. 1) вне зоны *OABCDO* влияния ребра клина (области возмущений) имеем однородные потоки, параметры которых известны [1, 4] (p — давление, U — скорость фронта плоской ударной волны, индексы 0, j соответствуют параметрам покоящегося газа и однородных потоков)

$$(1.1)\qquad (p_j - p_0)/\gamma p_0 = [2/(\gamma+1)][(U_j/a_0)^2 - 1],$$

$$U_j/a_0 = [(\gamma+1)/4]M_0\sin\alpha_j + \sqrt{1 + \{[(\gamma+1)/4]M_0\sin\alpha_j\}^2}.$$

Необходимо определить границу *ABCD* и параметры неоднородного течения в области возмущений.

В дальнейшем малым параметром задачи ε будем считать либо M_0, либо α. Согласно (1.1), в рассматриваемых случаях интенсивность плоских ударных волн порядка ε и, следовательно, течение в области возмущений с точностью до ε^2 включительно является безвихревым.

В автомодельных переменных в полярной системе координат r, θ уравнения для потенциала скорости f и Лагранжа-Коши имеют вид [5—8]

$$(1.2)\quad (1-r^2)f_{rr}+(1/r)f_r+(1/r^2)f_{\theta\theta}=(\gamma-1)(f-rf_r+(1/2)f_r^2+$$
$$+(1/2r^2)f_\theta^2)(f_{rr}+(1/r)f_r+(1/r^2)f_{\theta\theta})+(f_r^2-2rf_r)f_{rr}+$$
$$+(2/r^2)f_\theta(f_\theta-rf_{r\theta})+(1/r^4)f_\theta^2f_{\theta\theta}+(2/r^2)f_rf_\theta f_{r\theta}-(1/r^3)f_rf_\theta^2;$$

$$(1.3)\quad a_*^2=(1+\gamma P)^{(\gamma-1)/\gamma}=1-(\gamma-1)(f-rf_r+(1/2)f_r^2+(1/2r^2)f_\theta^2),$$

где $f=\Phi/a_0^2t$; $P=(p-p_0)/\gamma p_0$; $r\cos\theta=x/a_0t$; $r\sin\theta=y/a_0t$

($\Phi(x, y, t)$ — потенциал скорости в неподвижной системе координат).

Неизвестная граница области возмущений представляет собой совокупность фронтов слабых ударных волн и линий слабого разрыва, распространяющихся по покоящемуся газу или известным однородным потокам.

Дифференциальные уравнения фронтов ударной волны $r=k(\theta)$, линии слабого разрыва $r=r_*(\theta)$, распространяющихся по однородным потокам, и условия на них запишем в виде [5—8]

$$(1.4)\quad f_r-f_{jr}=\frac{2}{\gamma+1}\left[\frac{D_2}{1+k'^2/k^2}-\frac{a_{j*}^2}{D_2}\right],\quad D_2=k-f_{jr}+k'f_{j\theta}/k^2;$$

$$(1.5)\quad \frac{P-P_j}{1+\gamma P_j}=\frac{2}{\gamma+1}\left[\frac{D_2^2}{a_{j*}^2(1+k'^2/k^2)}-1\right];\quad f_r-f_{jr}=k'(f_{j\theta}-f_\theta);$$

$$(1.6)\quad r_*=f_{jr}-r'_*f_{j\theta}/r_*^2+a_{j*}\sqrt{1+r'^2_*/r_*^2};$$

$$(1.7)\quad f_r=f_{jr};\ f_\theta=f_{j\theta};\ P=P_j \text{ при } r=r_*.$$

Здесь $a_*=a/a_0$, потенциал скорости и давление j-го потока можно представить в виде

$$(1.8)\quad f_j=\varepsilon[br\cos(\theta-\varphi)+e]=\varepsilon f_j^{(1)}+\varepsilon^2f_j^{(2)}+\ldots;$$
$$P_j=(p_j-p_0)/\gamma p_0=\varepsilon d_j+\varepsilon^2l_j+\ldots,$$

где d_j, l_j, b, e — известные постоянные; φ — угол наклона к оси $\theta=0$ нормали плоской ударной волны, инициирующей j-й поток.

Уравнение линии слабого разрыва получим, интегрируя (1.6) с учетом (1.8) ($b=b_1+\varepsilon b_2+\ldots$; $e=e_1+\varepsilon e_2+\ldots$; $\varphi=\varphi_1+\varepsilon\varphi_2+\ldots$):

$$(1.9)\quad r_*=\varepsilon b\cos(\theta-\varphi)+\sqrt{1-(\gamma-1)\varepsilon e-\varepsilon^2b^2[\sin^2(\theta-\varphi)+}$$
$$\overline{+(\gamma-1)/2]}=1+\varepsilon r_*^{(1)}+\varepsilon^2r_*^{(2)}+\ldots,$$

где

$$r_*^{(1)}=b_1\cos(\theta-\varphi_1)-\frac{\gamma-1}{2}e_1;\ r_*^{(2)}=b_2\cos(\theta-\varphi_1)+b_1\varphi_2\times$$
$$\times\sin(\theta-\varphi_1)-\frac{\gamma-1}{2}e_2-\frac{b_1^2}{2}\sin^2(\theta-\varphi_1)-\frac{\gamma-1}{4}b_1^2-\frac{(\gamma-1)^2}{8}e_1^2.$$

В случае фронта, распространяющегося по покоящемуся газу, соотношения (1.4)—(1.9) сильно упрощаются ($f_j=P_j=0$).

Задача состоит в интегрировании системы нелинейных уравнений (1.2), (1.3) с граничными условиями (1.4), (1.5), (1.7), (1.9) и условиями на гранях клина.

Решение ищется в виде асимптотических рядов по малому параметру

$$P = \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \ldots; \; f = \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \ldots; \tag{1.10}$$

$$k = 1 + \varepsilon k^{(1)}(\theta) + \varepsilon^2 k^{(2)}(\theta) + \ldots; \; r_* = 1 + \varepsilon r_*^{(1)} + \varepsilon^2 r_*^{(2)} + \ldots \tag{1.11}$$

Подставляя (1.10) в (1.2), (1.3), получим системы уравнений для первого и второго приближений. Соответствующие граничные условия получаются при подстановке (1.10), (1.11) в (1.4) ,(1.5), (1.7) и в условие на гранях клина. Области возмущений в линейном приближении изображены на фиг. 1.

Если исключить $f^{(1)}$ из системы уравнений для первого приближения и применить преобразование Буземана—Чаплыгина $\sigma = (1 - \sqrt{1 - r^2})/r$; $\theta = \theta$, то задачи сводятся к отысканию гармонической в области возмущений функции $p^{(1)}(\sigma, \theta)$, принимающей кусочно-постоянные значения на границе $r = \sigma = 1$ (значения $P(1)$ на фиг. 1 указаны рядом с фронтами: 0, $\sin \alpha_1$, $\sin \alpha_2$, M_0, $m = M_0^2 / \sqrt{M_0^2 - 1}$) и удовлетворяющей условию $P_\theta^{(1)} = 0$ на гранях клина. Кроме того, в случае (*б*) в точке E с координатами $\sigma = -\xi_0 = -\left(1 - \sqrt{1 - M_0^2}\right)/M_0$, $\theta = \pi$ функция $P^{(1)}$ должна иметь заданную особенность [1].

Решения указанных задач имеют вид

$$\begin{gathered} P_1^{(1)} = \sin \alpha_1 \cdot I\{\sigma^\lambda; \lambda(\theta - \alpha_1), -(\lambda/2)\pi\} + \sin \alpha_2 \cdot I \times \\ \times \{\sigma^\lambda, \lambda(\theta - \alpha_1), \lambda(3\pi/2 - \alpha_1 - \alpha_2)\}; \\ P_2^{(1)} = \frac{m}{\pi} \ln \sqrt{\frac{1 - 2\xi_0 \sigma \cos\theta + \xi_0^2 \sigma^2}{\sigma^2 + 2\xi_0 \sigma \cos\theta + \xi_0^2}} + M_0 I\{\sigma, \theta, -\pi/2\}; \\ P_3^{(1)} = mI\{\sigma, \theta, \pi/2 + \arcsin(1/M_0)\} + M_0 I\{\sigma, \theta, -\pi/2\}, \; \lambda = \\ = \pi/(2\pi - \alpha_1 - \alpha_2), \end{gathered} \tag{1.12}$$

где функция I определяется соотношением

$$I\{s, w, w_1\} = (1/\pi)\operatorname{arctg}\{[(1 - s^2)\sin w_1]/[2s\cos w - (1 + s^2)\cos w_1]\}. \tag{1.13}$$

Значения arctg в (1.13) берутся в интервале $(0, \pi)$. Линии равных значений давления (изобары), вычисленные в соответствии с (1.12) для некоторых значений исходных параметров (*а*) $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 15°$; (*б*) $M_0 = 0{,}5$; (*в*)$M_0 = \sqrt{2}$, приведены на фиг. 1, *а—в* соответственно.

В случае (*в*) течения сверху и снизу от клина независимы друг от друга. Для несимметричного тонкого клина $\alpha_2 = A\alpha_1$, $0 < A \leqslant 1$ давление в области возмущений внизу от клина $P_4^{(1)} = AP_3^{(1)}$ и подъемная сила направлена вниз.

Анализ результатов линейной теории показывает, что они должны быть уточнены в окрестности границ областей возмущений. Согласно (1.12), при $r \to 1$ можно получить

$$\begin{gathered} P_i^{(1)} = d_j + \sqrt{1 - r}\, Q_i/(\pi\sqrt{2}) + 0\left[(1 - r^{3/2})\right], \; i = 1, 2, 3; \\ Q_1(\theta, \alpha_1, \alpha_2) = \lambda\left\{\sin\alpha_1\left[\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) - \operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)\right] + \right. \\ \left. + \sin\alpha_2\left[\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\left(\theta + \frac{3\pi}{2} - 2\alpha_1 - \alpha_2\right) - \operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\left(\theta - \frac{3\pi}{2} + \alpha_2\right)\right]\right\}; \end{gathered} \tag{1.14}$$

$$Q_2(\theta, \mathrm{M}_0) = \mathrm{M}_0\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2\xi_0}{1 - 2\xi_0\cos\theta - \xi_0^2}\right];$$

$$Q_3(\theta, \mathrm{M}_0) = m\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\mathrm{M}_0}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\arcsin\frac{1}{\mathrm{M}_0}\right)\right] + \mathrm{M}_0\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Для градиента давления в окрестности $r = 1$ получается явное противоречие с предположениями, лежащими в основе линейной (акустической теории).

Анализ точных уравнений и граничных условий (1.2)—(1.9), аналогичный проведенному при изучении нелинейных конических течений газа [9], дает возможность установить, что в первом приближении

$$P_r(k, \theta) = -2/(\gamma + 1) + \ldots; \; P_r(r_*, \theta) = 1/(\gamma + 1\;) + \ldots \tag{1.15}$$

Это позволяет в соответствии с (1.14), анализируя поведение функций Q_i, установить, что линии фронтов AB, CD являются линиями слабого разрыва (вдоль них $Q_i < 0$), а линии фронта BC — слабыми ударными волнами (вдоль них $Q_i > 0$).

Определим пределы применимости линейной теории.

А. В окрестности фронта слабой ударной волны BC, распространяющейся по покоящемуся газу ($d_j = 0$), асимптотика $f^{(1)}$, согласно линеаризованному интегралу Лагранжа-Коши (1.3), запишется в виде (в дальнейшем индекс i опускаем)

$$f^{(1)} = -(2/3)cQ(1 - r)^{3/2} + 0[(1 - r)^{5/2}], \; c = 1/(\pi\sqrt{2}). \tag{1.16}$$

Используя соотношения (1.14), (1.16), (1.10), (1.11) в (1.2), (1.3), можно получить

$$\begin{gathered} P = \varepsilon cQ\sqrt{1 - r} + \varepsilon^2[(\gamma + 1)/2]c^2Q^2 + \ldots; \\ f = -\varepsilon cQ(1 - r)^{3/2} - \varepsilon^2[(\gamma + 1)/2]c^2Q^2(1 - r) + \ldots \end{gathered} \tag{1.17}$$

При $r \sim 1 - \varepsilon^2 Q^2$ разложения (1.17) (внешние по терминологии [10]) нерегулярны, т. е. младшие члены разложений становятся такого же порядка, как и старшие.

Внутренние переменные, согласно (1.17), определяются формулами

$$\begin{gathered} r = 1 - \varepsilon^2Q^2\delta; \; P = [2\varepsilon^2/(\gamma + 1)]Q^2\Pi(\delta) + \ldots; \\ f = -[2\varepsilon^4/(\gamma + 1)]Q^4F(\delta) + \ldots \end{gathered} \tag{1.18}$$

Соответствующая нелинейная система уравнений, аналогичная уравнениям одномерных коротких волн [11], и ее общее решение имеют вид (c_1, c_2 — произвольные функции θ)

$$\begin{gathered} 2(F_\delta + \delta)F_{\delta\delta} - F_\delta = 0; \; \Pi = F_\delta; \\ \Pi = \left(1 \pm \sqrt{1 + \delta c_1}\right)/c_1; \; F = \delta/c_1 \pm 2(1 + \delta c_1)^{3/2}/(3c_1^2) + c_2. \end{gathered}$$

Уравнение фронта ударной волны $\delta = \delta_*$ и условия на нем получаются из (1.18), (1.4), (1.5)

$$k = 1 - \varepsilon^2Q^2\delta_*; \; F_\delta(\delta_*) = -2\delta_*; \; \Pi(\delta_*) = F_\delta(\delta_*); \; F(\delta_*) = 0. \tag{1.19}$$

Проводя сращивание внешнего разложения порядка ε^2 внутреннего разложения порядка ε^2 с внутренним разложением порядка ε^2 внешнего разложения порядка ε^2 и удовлетворяя условиям (1.19), получим

$$P = f_r = \varepsilon^2[(\gamma+1)/2]c^2Q^2(1+D^{1/2}) + \ldots; \tag{1.20}$$
$$P_r = -1/(\gamma+1)D^{1/2} + \ldots,\ D = 1 + 4(1-r)/\varepsilon^2(\gamma+1)^2c^2Q^2,$$
$$f = -[(\gamma+1)/2]\varepsilon^2c^2Q^2(1-r) - [(\gamma+1)^3/12]\varepsilon^4c^4Q^4(1+D^{3/2}) + \ldots;$$
$$k - 1 = [(\gamma+1)/4]P(k, \theta) = (3/16)\varepsilon^2(\gamma+1)^2c^2Q^2 + \ldots$$

Формулы для положения фронта ударной волны и интенсивности совпадают с полученными методом деформированных координат [5].

Б. В окрестности фронта линии слабого разрыва, распространяющегося по j-му потоку, аналогично случаю А, используя уравнения для вторых приближений при $r \to 1$, найдем

$$P = \varepsilon\left\{d_j + cQ\sqrt{1-r} + 0\left[(1-r)^{3/2}\right]\right\} + \varepsilon^2\left\{l_j + r_*^{(1)}cQ/2\sqrt{1-r} + \right. \tag{1.21}$$
$$\left. + 0\left(\sqrt{1-r}\right)\right\} + 0(\varepsilon^3),$$
$$f = \varepsilon\left\{f_j^{(1)} - (2/3)cQ(1-r)^{3/2} + 0\left[(1-r)^{5/2}\right]\right\} + \varepsilon^2\left\{f_j^{(2)} - r_*^{(1)}cQ \times\right.$$
$$\left.\times \sqrt{1-r} + 0\left[(1-r)^{3/2}\right]\right\} + 0(\varepsilon^3).$$

Разложения (1.21) нерегулярны при $1 - r \sim \varepsilon$, и поэтому необходимо ввести внутренние переменные

$$r = 1 - \varepsilon z;\ f = f_j - [2/(\gamma+1)][\varepsilon^{5/2}G_1(z, \theta) + \varepsilon^3G_2(z, \theta) + \ldots];$$
$$P = P_j + [2/(\gamma+1)][\varepsilon^{3/2}\Pi_1 + \varepsilon^2\Pi_2 + \ldots].$$

Уравнения для первых двух приближений

$$\Pi_1 = G_{1z},\ 2\left(z + r_*^{(1)}\right)G_{1zz} - G_{1z} = 0;$$
$$\Pi_2 = G_{2z};\ 2\left(z + r_*^{(1)}\right)G_{2zz} - G_{2z} + 2G_{1z}G_{1zz} = 0$$

легко решаются (c_i — произвольные функции θ):

$$P = P_j + \frac{2}{\gamma+1}\left\{\varepsilon^{3/2}c_3\sqrt{z + r_*^{(1)}} + \varepsilon^2\left(c_5\sqrt{z + r_*^{(1)}} + c_3^2\right) + \ldots\right\}; \tag{1.22}$$
$$f = f_j - \frac{2}{\gamma+1}\left\{\left[\frac{2c_3}{3}\left(z + r_*^{(1)}\right)^{3/2} + c_4\right]\varepsilon^{5/2} + \varepsilon^3\left[\frac{2c_5}{3}\left(z + r_*^{(1)}\right)^{3/2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + c_3^2z + c_6\right] + \ldots\right\}.$$

Проводя сращивание (1.21) и (1.22), найдем $c_3 = [(\gamma+1)/2]cQ$, $c_4 = c_5 = 0$. Разложения (1.22) должны также удовлетворять внутренним граничным условиям, вытекающим из (1.9), (1.7). Однако можно заметить, что разложения не являются равномерно пригодными в окрестности линии слабого разрыва и удовлетворяют граничным условиям только с точностью до ε.

Разложения (1.22) становятся нерегулярными при $1 - r + \varepsilon r_*^{(1)} \sim \varepsilon^2c_3^2$ и являются промежуточными, с помощью которых переносим особенность от линии $r = 1$ к линии $r = 1 + \varepsilon r_*^{(1)}$.

Внутренние разложения, согласно (1.22), запишем в виде

$$(1.23)\qquad r = 1 + \varepsilon r_*^{(1)} - \varepsilon^2 c_3^2 \omega;\ P = P_j + \frac{2}{\gamma+1}\varepsilon^2 c_3^2 \mathbf{\Pi}_3(\omega) + \ldots;$$

$$f = f_j - \frac{2}{\gamma+1}\varepsilon^4 c_3^4 G_3(\omega) + \ldots$$

Нелинейная система уравнений для функций G_3, Π_3, описывающая течение вблизи фронта, распространяющегося по однородному потоку, и ее общее решение имеют вид ($c_3 = [(\gamma+1)/2]cQ$, c_7, c_8 — произвольные функции θ)

$$(1.24)\qquad 2G_{3\omega\omega}\left(\omega + G_{3\omega} + r_*^{(2)}/c_3^2\right) - G_{3\omega} = 0;\ \mathbf{\Pi}_3 = G_{3\omega};$$

$$\mathbf{\Pi}_3 = \left(1 \pm \sqrt{1 + c_7\left(\omega + r_3^{(2)}/c_3^2\right)}\right)/c_7;$$

$$G_3 = \left(\omega + r_*^{(2)}/c_3^2\right)/c_7 \pm \frac{2}{3c_7^2}\left[1 + c_7\left(\omega + r_*^{(2)}/c_3^2\right)\right]^{3/2} + c_8.$$

Сращивая (1.23), (1.24) и промежуточные разложения (1.22), определим $c_7 = 1$. Решение (1.23), (1.24) с нижними знаками и $c_8 = 2/3$ описывает течение за линией слабого разрыва и удовлетворяет условиям (1.7) с точностью до ε^2 включительно.

Выражения для градиентов давления, вычисленные в соответствии с внутренними решениями (1.20), (1.23), (1.24), совпадают с (1.15).

Отметим важную деталь, присущую задаче и во многом определяющую эффективность проведенных построений: внутренние переменные δ, ω зависят от r, θ.

Из (1.24), (1.23) можно получить уравнение линий равного значения давления $P^{(1)} = p_*$ в окрестности фронта линии слабого разрыва

$$(1.25)\qquad r = 1 + \varepsilon r_*^{(1)} + \varepsilon^2 r_*^{(2)} + (\gamma+1)\varepsilon(p_* - d_j) - (p_* - d_j)^2/(c^2 Q^2).$$

Уравнение линий $P^{(1)} = p_*$ в окрестности фронта ударной волны получается из (1.20) и имеет вид (1.25) с $r_*^{(1)} = r_*^{(2)} = d_j = 0$. Проведенные расчеты показали существенное отличие вблизи фронтов реального поведения параметров от предсказываемого линейной теорией.

В. Уточним положение фронтов плоских ударных волн. Уравнение фронта BB_1 в случаях *а* — *в* (см. фиг. 1, *а* —*в*)

$$(1.26)\qquad r\cos(\theta - \alpha_1) = [(\gamma+1)/4]\mathrm{M}_0 \sin\alpha_1 + \sqrt{1 + \{[(\gamma+1)/4]\mathrm{M}_0 \sin\alpha_1\}^2}.$$

Уравнение фронта ED в случае (*в*)

$$(1.27)\qquad \mathrm{M}_0 \sin\beta = r\sin(\theta - \beta),$$

где β — угол наклона скачка ED к оси $\theta = 0$, для которого справедливо соотношение [4]

$$\beta = \arcsin(1/\mathrm{M}_0) + [(\gamma+1)/4]\left[\mathrm{M}_0^2/\left(\mathrm{M}_0^2 - 1\right)\right]\alpha_1 + 0\left(\alpha_1^2\right).$$

2. Пределы применимости теории п. 1, в дальнейшем именуемой «одномерной» внутренней, определяются условиями возможности представления линейных решений (1.12) вблизи $r = 1$ в виде (1.14). Можно показать, что условия нарушаются при $|\theta - \theta_*| \sim \sqrt{1 - r}$, где θ — угол

какой-либо точки пересечения трех фронтов (точки B, C на фиг. 1). Если принять во внимание, что $Q_i \sim 1/(\theta - \theta_*)$ при $\theta \to \theta_*$, то в соответствии с (1.18), (1.23) можно заключить, что «одномерная» внутренняя теория непригодна при

(2.1) $$r \sim 1 - 0(\varepsilon),\ |\theta - \theta_*| \sim 0(\varepsilon^{1/2}).$$

Для исследования течения в зонах взаимодействия, чьи размеры определяются (2.1), необходимо ввести внутренние переменные (согласно (2.1), (1.18), (1.23) в зонах взаимодействия $P \sim \varepsilon$, $f \sim \varepsilon^2$)

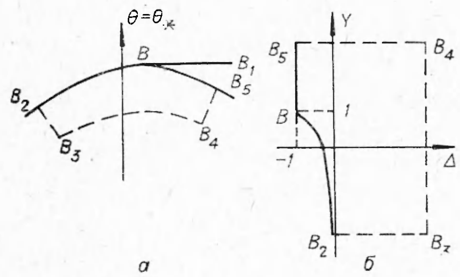
(2.2) $$r = 1 - [(\gamma + 1)/2]E\Delta;\ \theta_* - \theta = \sqrt{[(\gamma + 1)/2E]}\,Y;$$
$$P = E\mu(\Delta, Y) + \ldots;\ f = -[(\gamma + 1)/2]E^2G(\Delta, Y) + \ldots$$

Положительные постоянные коэффициенты в растяжении (2.2) выбраны в результате анализа получающихся внутренних уравнений и граничных условий для рассматриваемых случаев взаимодействия с целью упрощения их вида. Для зон взаимодействия, встречающихся в случаях (*а*) $E = M_0 \sin \alpha_j$; (*б*) $E = \alpha M_0$; (*в*) $E = \alpha M_0,\ \alpha M_0^2/\sqrt{M_0^2 - 1}$.

Важным следствием (2.2) является закон подобия: течения в зонах взаимодействия у задач с различными исходными данными M_0, α_j подобны, если параметр подобия E для этих данных одинаков. Подставляя (2.2) в (1.2), (1.3) и вводя обозначение $\nu = G_Y$, получим нелинейную систему уравнений, описывающую в первом приближении течение в зоне взаимодействия

(2.3) $$2(\Delta + \mu)\mu_\Delta - \mu + \nu_Y = 0;\ \mu = G_\Delta;\ \nu_\Delta = \mu_Y.$$

Отметим, что аналогичные системы уравнений получаются при исследовании взаимодействия слабых ударных волн [6—8, 12, 13] и конических течений газа [9, 14, 15].



Фиг. 2

В рассматриваемых случаях зоны взаимодействия однотипны и построение решения в них можно свести к решению следующей краевой задачи: найти решение системы уравнений (2.3) в области $BB_2B_3B_4B_5B$ (фиг. 2), непрерывно переходящее вдоль BB_5 в известное решение в области B_1BB_5, удовлетворяющее внутренним условиям на BB_2 и условиям сращивания с известными решениями на $B_2\,B_3\,B_4\,B_5$.

Положение плоских фронтов BB_1 (1.26), (1.27) в переменных (2.2) записывается в виде

(2.4) $$2\Delta + Y^2 = -1,\ \Delta \leqslant -1,\ |Y| \geqslant 1,$$

положение линий слабого разрыва BB_5 — в виде

(2.5) $$\Delta = -1;\ |Y| \geqslant 1.$$

Решая совместно (2.4), (2.5), определим координаты точек B

(2.6) $$\Delta_B = -1;\ |Y_B| = 1.$$

В дальнейшем приведем формулировку краевой задачи лишь в случае $\theta_B < \theta_*$ (фиг. 2,*а*); в соотношениях (2.4)—(2.6) $Y > 0$.

Для фронта затухающей ударной волны BB_2 (фиг. 2,*б*) из точных соотношений (1.4), (1.5) получим

$$d\Delta/dY = -\sqrt{-2\Delta-\mu};\ d\Delta/dY = -\nu/\mu; \tag{2.7}$$
$$\mu = G_\Delta\,(-1 \leqslant \Delta < 0,\ -\infty < Y \leqslant 1,\ \mu \leqslant -2\Delta).$$

Последнее соотношение (2.7) удовлетворяется в силу (2.3).

Условия сращивания представляют собой внутренние разложения порядка ε соответствующих внешних (по отношению к зоне взаимодействия) разложений порядка ε^2. Учет следующих членов внешних разложений не приводит к изменению условий сращивания.

Условие согласования положения фронта BB_2 с положением, даваемым «одномерной» внутренней теорией (последнее соотношение (1.20)), дает уравнение фронта BB_2 в окрестности точки B_2 и значения параметров на нем при $Y \to -\infty$:

$$\Delta = -3/2\pi^2Y^2 + \ldots;\ \mu = 3/\pi^2Y^2 + \ldots; \tag{2.8}$$
$$\nu = -9/\pi^4Y^5 + \ldots$$

На границе B_2B_3 условия сращивания с решением (1.20) при $Y \to -\infty$, $\Delta \geqslant -3/2\pi^2Y^2$:

$$\mu = (2/\pi^2Y^2)\left(1 + D_*^{1/2}\right),\ D_* = 1 + (\pi^2Y^2/2)\,\Delta;$$
$$\nu = -(4\Delta/\pi^2Y^3)\left(1 - D_*^{1/2}\right) - (32/3\pi^4Y^5)\left(1 + D_*^{3/2}\right). \tag{2.9}$$

На границе B_3B_4 в соответствии с (1.10), (1.12) при $\Delta \to \infty$, $-\infty < Y < \infty$:

$$\mu = (1/\pi)\ \mathrm{arctg}(\sqrt{2\Delta}/-Y); \tag{2.10}$$
$$\nu = (1/\pi)(Y\ \mathrm{arctg}(\sqrt{2\Delta}/-Y) + \sqrt{2\Delta}).$$

Значения arctg в (2.10) берутся в интервале $(0, \pi)$.

На границе B_4B_5 условия сращивания с решеним (1.23), (1.24) при $Y \to \infty$, $\Delta \geqslant -1$:

$$\mu = 1 + (2/\pi^2Y^2)\left(1 - D_{1*}^{1/2}\right),\ D_{1*} = 1 + (\pi^2Y^2/2)(\Delta + 1); \tag{2.11}$$
$$\nu = Y - (4(\Delta+1)/\pi^2Y^3)\left(1 + D_{1*}^{1/2}\right) - (32/3\pi^4Y^5)\left(1 - D_{1*}^{3/2}\right).$$

На линии слабого разрыва BB_5, согласно (1.7), (1.8), при $\Delta = -1$, $Y \geqslant 1$:

$$\mu = 1;\ \nu = Y. \tag{2.12}$$

Отметим, что в (2.9)—(2.12) необходимо оставить лишь одно из условий для μ и ν (любое), так как условия удовлетворяют второму уравнению системы (2.3).

Таким образом, задача (2.3), (2.7)—(2.12) представляет краевую задачу для системы нелинейных уравнений эллиптического типа с неизвестным элементом границы (положение фронта BB_2 определяется через решение $\mu = \mu(\Delta, Y)$), и ее решение описывает в первом приближении течение в зонах взаимодействия, возникающих в рассматриваемых задачах.

3. Построим приближенное решение задачи (2.3), (2.7)—(2.12). Точное частное решение системы уравнений (2.3), аналогичное найденному в работе [11]

$$(3.1)\qquad \Delta = (Y^2/2)\,\mathrm{tg}^2(\mu k_1 + k_2) - \mu - (1/2k_1)\sin 2(\mu k_1 + k_2) + {} + B\sin^2(\mu k_1 + k_2);$$

$$\nu = Y[\mu - (1/k_1)\,\mathrm{tg}\,(\mu k_1 + k_2)],\ k_1,\ k_2,\ B - \mathrm{const},$$

удовлетворяет условиям (2.9)—(2.12) и условиям (2.7) в точке B при следующем выборе постоянных:

$$(3.2)\qquad k_1 = -k_2 = \pi \text{ при } Y > 0;\ k_1 = \pi,\ k_2 = 0 \text{ при } Y < 0.$$

Отметим, что различный выбор постоянных при $Y < 0$ и $Y > 0$ не означает, что решение (3.1) разрывно при $Y = 0$ $(-\mathrm{tg}\,\pi(1 - \mu) = \mathrm{tg}\,\pi\mu$ и т. д.).

Для удовлетворения условий (2.7), (2.8) имеется лишь одна произвольная постоянная B. Если перейти к новым независимым переменным $\mu\nu$, то (2.7) примут вид

$$(3.3)\qquad d\nu/d\mu = -(\Delta_\mu + Y_\mu\sqrt{-2\Delta - \mu})/(\Delta_\nu + Y_\nu\sqrt{-2\Delta - \mu});$$

$$d\nu/d\mu = -(\mu\Delta_\mu + \nu Y_\mu)/(\mu\Delta_\nu + \nu Y_\nu).$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что семейство кривых

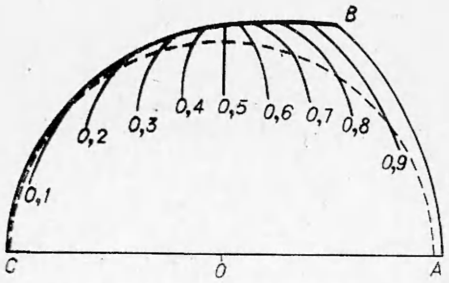
$$(3.4)\qquad \nu^2 = [\pi^2\mu^2 + \pi\sin 2\pi\mu(\mu + B/2) - \sin^2\pi\mu + B\pi^2 \times {} \times (1 - \mu\cos 2\pi\mu)]/k_3,$$

$$k_3 = \pi^2(\mu - (1/2\pi)\sin 2\pi\mu)/[\cos\pi\mu(1 - (1/\pi)\mathrm{tg}\pi\mu)]^2$$

удовлетворяет второму условию (3.3). Выбор из (3.4) кривой, имеющей при выходе из зон взаимодействия правильное асимптотическое поведение, определяемое соотношениями (2.8), приводит к требованию $B = 0$.

Оставшееся соотношение в (3.3) является дифференциальным уравнением фронта BB_2, и, если решение (3.1) с учетом (3.2) и $B=0$ — точное решение задачи (2.3), (2.7)—(2.12), то кривая, определяемая им (начальные условия для интегрирования имеем из (2.6), 2.12)), должна совпасть с кривой (3.4) при $B=0$. К сожалению, это не так, но расчеты показали, что различие в положении этих кривых очень мало.

Решение (2.2), (3.2), (3.4) позволяет провести эффективное построение полей изобар в зоне взаимодействия в плоскости Δ, Y и в физической плоскости для различных значений параметра подобия E. Эти поля практически совпадают с полями, построенными в соответствии с (2.2), (3.1), (3.2) и первым уравнением (3.3), и, следовательно, будут хорошим приближением к точному решению краевой задачи (2.3), (2.7)—(2.12).



Фиг. 3

На фиг. 3 представлено поле изобар в физической плоскости для $E = 0{,}175$ (штрихом нанесена граница области возмущений в линейном приближении). За пределами зоны взаимодействия линии уровня вычислялись в соответствии с (1.25). Единственным материалом для сравнения с результатами проведенных расчетов являются численные расчеты случая (*б*), выполненные в работе [3]. Сравнение показывает удовлетворительное согласие результатов нелинейной теории и численных расчетов ($E = 0{,}175$, фиг. 3 работы [3]). Вне окрестности волновой границы области возмущений нелинейные решения согласуются с решениями линейной теории (1.12) и для $E < 0{,}04$ переходят в решения (1.12) практически непрерывным образом.

Поступила 26 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sakurai A.** The flow due to impulsive motion of a wedge and its similarity to the diffraction of shock wave.—«J. Phys. Soc. Japan», 1955, vol. 10, N 3.
2. **Strang W. J.** A physical theory of supersonic aerofoils in unsteady flow.—«Proc. Roy. Soc. L.», 1948, vol. A195, N 1041.
3. **Тугазаков Р. Я.** Нестационарная задача о внезапном движении клина и конуса с до- и сверхзвуковой скоростями.—«Учен. зап. ЦАГИ», 1973, т. 4, вып. 1.
4. **Липман Г. В., Рошко А.** Элементы газовой динамики. М., ИЛ, 1960.
5. **Lighthill M. J.** The shock strength in supersonic «conical fields».—«Phil. Mag.», 1949, vol. 40, ser. 7, N 311.
6. **De Mestre N. J.** Non-linear weak shock diffraction.—«J. Austral. Math. Soc.», 1968, vol. 8, N 4.
7. **Могилевич Л. И., Шиндяпин Г. П.** О нелинейной дифракции слабых ударных волн.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
8. **Шиндяпин Г. П.** Нерегулярное взаимодействие слабых ударных волн разной интенсивности.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
9. **Булах Б. М.** Нелинейные конические течения газа. М., «Наука», 1970.
10. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
11. **Христианович С. А.** Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
12. **Рыжов О. С., Христианович С. А.** О нелинейном отражении слабых ударных волн.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
13. **Багдоев А. Г., Гургенян А. А.** Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости.—«Изв. АН Арм. ССР. Сер. Механика», 1968, № 1.
14. **Kuo Y. H.** A similarity rule for the interaction between a conical field and a plane shock.—«J. Aero. Sci.», 1955, vol. 22, N 7.
15. **Zahalak G. I., Myers M. K.** Conical flows near singular rays.—«J. Fluid Mech.», 1974, vol. 63, pt 3.

УДК 532.517.2

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА В КАНАЛЕ

М. А. Гольдштик

(*Новосибирск*)

Результаты, приведенные в обзорной монографии [1], относятся в основном к капельным жидкостям, для которых влияние термического режима на течение связано с зависимостью вязкости от температуры.

В данной работе рассмотрено автомодельное течение вязкого газа в канале, температура стенки которого возрастает по линейному закону. Проанализировано влияние чисел Рейнольдса и Прандтля на теплообмен и гидродинамику потока.

1. Рассмотрим идеализированный случай, когда кинематическая вязкость ν и коэффициент температуропроводности $\varkappa$ считаются постоянными, а плотность ρ зависит от температуры T по закону

$$\rho = \rho_0 T_0 / T,$$