

УДК 519.6

## Специальные алгоритмы моделирования однородных случайных полей\*

Г.А. Бабичева<sup>1</sup>, Н.А. Каргаполова<sup>1,2</sup>, В.А. Огородников<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: galinab2811@gmail.com (Бабичева Г.А.), nkargapolova@gmail.com (Каргаполова Н.А.),  
ova@osmf.sccc.ru (Огородников В.А.)

**Бабичева Г.А., Каргаполова Н.А., Огородников В.А.** Специальные алгоритмы моделирования однородных случайных полей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 2. — С. 125–138.

В работе предложены два новых алгоритма для численного моделирования однородных случайных полей. Оба алгоритма являются специальными модификациями известного метода моделирования “по строкам и столбцам” для построения гауссовских однородных полей с корреляционными функциями гауссовского типа. Разработанные алгоритмы позволяют эффективно моделировать однородные случайные поля с широким классом невыпуклых корреляционных функций.

**DOI:** 10.15372/SJNM20160201

**Ключевые слова:** однородное случайное поле, стохастическое моделирование, рандомизация.

**Babicheva G.A., Kargapolova N.A., Ogorodnikov V.A.** Special algorithms for simulation of homogeneous random fields // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 2. — P. 125–138.

In this paper, two new algorithms for the simulation of homogeneous random fields are proposed. Both algorithms are based on the widespread algorithm “in rows and columns” for the simulation of the Gaussian fields with special correlation functions. Applying the algorithms developed makes possible to efficiently simulate homogeneous random fields with non-convex correlation functions.

**Keywords:** *homogeneous random field, stochastic simulation, randomization.*

---

### 1. Введение

При решении различных прикладных задач с использованием методов стохастического моделирования, в частности задач статистической метеорологии, океанологии, гидрологии и популяционной биологии, необходимо учитывать корреляционную структуру реальных процессов и полей. Во многих случаях соответствующие корреляционные функции, необходимые для моделирования, получают аппроксимацией выборочных корреляционных функций, оцененных по данным наблюдений, специальными положительно определенными функциями непрерывного аргумента. Например, для описания корреляционной структуры пространственных двумерных полей приземной температуры воздуха и геопотенциала на заданной территории, если предположение об изотропности поля согласуется с реальными данными, используют аппроксимирующие функции вида

$$r(\rho) = \exp(-\alpha\rho^2),$$

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №15-01-01458-а, №15-01-08988-а, №16-01-00145-а, №16-31-00123-мол-а, №16-31-00038-мол-а).

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние между двумя точками поля. В случае, когда с данными согласуется предположение об однородности поля, используют функции более общего вида

$$r(x, y) = \exp\left(-(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)^\theta\right).$$

Существующие алгоритмы моделирования случайных полей, например векторные алгоритмы, основанные на методе условных распределений, на векторных моделях авторегрессии, скользящего среднего, смешанных моделях авторегрессии и скользящего среднего и др., позволяют строить реализации гауссовских полей дискретных аргументов с заданной корреляционной структурой [10]. Однако они обладают общим недостатком: моделирование большого количества реализаций случайного поля оказывается достаточно трудоемкой задачей в смысле затрат времени на вычисления и затрат машинной памяти. Кроме того, для корреляционных функций указанного выше вида стандартные алгоритмы моделирования вычислительно неустойчивы, поскольку соответствующие корреляционные матрицы обладают большим числом обусловленности и собственными числами, близкими к нулю. При моделировании случайных полей накапливаются вычислительные ошибки, в результате чего некоторые собственные числа корреляционной матрицы оказываются отрицательными. Для матриц же с отрицательными собственными числами вещественнозначное разложение Холецкого, а также основанные на методе условных распределений алгоритмы, используемые при моделировании, неприменимы. В связи с этими недостатками для различных классов корреляционных функций разрабатывают более экономичные и устойчивые алгоритмы моделирования [7–10].

Для корреляционных функций вида  $r(\rho) = \exp(-\alpha\rho^2)$  и  $r(x, y) = \exp(-(\alpha x^2 + \gamma y^2))$  существует эффективный алгоритм моделирования гауссовских полей на регулярных сетках. В литературе его называют алгоритмом “по строкам и столбцам” [3, 4, 10]. При его реализации корреляционные матрицы задаются отдельно на горизонтальных и вертикальных сечениях поля. В основе этого алгоритма лежит тот факт, что корреляционная матрица поля представима в виде прямого произведения корреляционных матриц его горизонтального и вертикального сечений. Преимуществом данного метода является то, что он сводится к последовательному использованию алгоритмов моделирования гауссовских векторов с теплицевыми корреляционными матрицами, заданными функциями вида  $r(x) = \exp(-\alpha x^2)$ . Для них алгоритмы, основанные на методе условных распределений, реализуются с высокой точностью.

Алгоритм моделирования “по строкам и столбцам” имеет специфику, которую можно проиллюстрировать следующим примером. Предположим, что мы моделируем однородное гауссовское поле на равномерной прямоугольной сетке размера  $m \times n$  узлов (для простоты используем единичный шаг сетки). Элементы корреляционных матриц горизонтального  $R^{(1)} = (r_{ij}^{(1)})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , и вертикального  $R^{(2)} = (r_{kp}^{(2)})$ ,  $k, p = 1, 2, \dots, m$ , сечений поля задаются функциями  $r_{ij}^{(1)} = \exp(-\alpha_1|i - j|^2)$  и  $r_{kp}^{(2)} = \exp(-\alpha_2|k - p|^2)$  соответственно. После реализации алгоритма “по строкам и столбцам” корреляционная функция построенного однородного случайного поля имеет вид

$$r(i, j, k, p) = \exp(-\alpha_1(i - j)^2 - \alpha_2(k - p)^2).$$

При этом сечение горизонтальной плоскостью поверхности корреляционной функции между значением поля в произвольном фиксированном узле и значениями во всех остальных узлах будет представлять собой эллипс с главными осями, ориентированными вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ .

Однако в прикладных задачах достаточно часто встречаются корреляционные функции случайных полей, изолинии которых являются эллипсами с главными осями, повернутыми относительно положительных направлений осей  $Ox$ ,  $Oy$  на некоторый угол  $\varphi$ . Например, для корреляционной функции поля геопотенциала на уровне 500 мбар угол поворота  $\varphi \approx 45^\circ$  [2].

В данной работе предложены две модификации алгоритма “по строкам и столбцам”. Первая из них позволяет моделировать поля, для которых угол поворота  $\varphi \neq 0^\circ$ . Вторая модификация метода “по строкам и столбцам” значительно расширяет класс корреляционных функций, для которых он применим.

## 2. Модифицированный алгоритм “по строкам и столбцам”

В этом пункте будет рассмотрена модификация алгоритма “по строкам и столбцам”, позволяющая численно реализовывать однородные случайные поля, у которых угол поворота  $\varphi$ , описанный в п. 1, отличен от  $0^\circ$ .

### 2.1. Алгоритм моделирования случайного поля

Сформулируем алгоритм моделирования двумерного гауссовского однородного случайного поля  $\{\eta_j^i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , на равномерной прямоугольной сетке размерности  $m \times n$  узлов (для удобства шаг сетки равен 1).

**Шаг 1.** Моделируем двумерное случайное поле  $\{\varphi_j^i\}$  как массив стандартных гауссовских независимых случайных величин

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \cdots & \varphi_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^m & \cdots & \varphi_n^m \end{pmatrix},$$

где  $\vec{\varphi}^{(i)\top} \sim N(0, I)$ ,  $\vec{\varphi}^{(i)\top} = (\varphi_1^i, \varphi_2^i, \dots, \varphi_n^i)$  — вектор-строка,  $i = 1, \dots, m$ ,  $I$  — единичная матрица.

**Шаг 2.** Преобразованием

$$\vec{\xi}^{(i)\top} = \vec{\varphi}^{(i)\top} L^{(1)\top}$$

для каждого  $i = 1, \dots, m$  получаем  $m$  независимых векторов-строк

$$\vec{\xi}^{(i)\top} = (\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_n^i).$$

Здесь

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} l_{1,1}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1}^{(1)} & l_{2,2}^{(1)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n,1}^{(1)} & l_{n,2}^{(1)} & \cdots & l_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}$$

является нижнетреугольной матрицей такой, что  $L^{(1)}L^{(1)\top} = R^{(1)}$ , а матрица

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} r_{1,1}^{(1)} & \cdots & r_{1,n}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1}^{(1)} & \cdots & r_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}$$

есть заданная корреляционная матрица горизонтального сечения поля. Из векторов-строк  $\vec{\xi}^{(i)\top}$  формируем поле  $\{\xi_j^i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ :

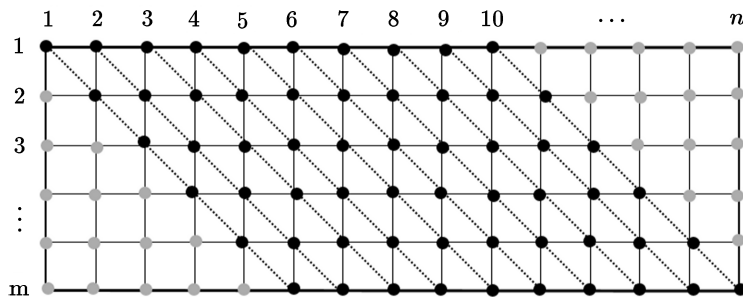
$$\{\xi_j^i\} = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \cdots & \xi_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^m & \cdots & \xi_n^m \end{pmatrix},$$

векторы-строки  $\vec{\xi}^{(i)\top} \sim N(0, R^{(1)})$  которого независимы между собой.

**Шаг 3.** Составим  $p$  векторов  $\vec{\zeta}_{(k)}$  из случайных величин  $\xi_j^i$ , “лежащих” на прямых определенного наклона относительно горизонтального направления сетки, т. е.

$$\vec{\zeta}_{(k)} = \left( \xi_k^1, \xi_{k+d}^2, \xi_{k+2d}^3, \dots, \xi_{k+(m-1)d}^m \right)^\top,$$

где  $k = 1, \dots, n - (m-1)d$ ,  $d = 0, 1, 2, \dots$ , — параметр сдвига на каждом горизонтальном слое сетки. Для иллюстрации этого способа построения векторов  $\vec{\zeta}_{(k)}$  приведен рис. 1. Так как векторы-строки  $\vec{\xi}^{(i)\top} = (\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_n^i)$  поля  $\{\xi_j^i\}$  независимы между собой, то векторы  $\vec{\zeta}_{(k)} \sim N(0, I)$ .



**Рис. 1.** Схема построения векторов  $\vec{\zeta}_{(k)}$  на Шаге 3 модифицированного алгоритма “по строкам и столбцам” при  $d = 1$ . Черным цветом обозначены случайные величины, из которых составляются векторы  $\vec{\zeta}_{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n - (m-1)d$

Отличие Шага 3 в модифицированном алгоритме от стандартного алгоритма “по строкам и столбцам” состоит в том, что при реализации последнего после преобразований на втором шаге случайные величины связываются между собой по узлам сетки, находящимся на ее вертикальных слоях.

**Шаг 4.** Заключительным преобразованием

$$\vec{v}_{(k)} = L^{(2)} \vec{\zeta}_{(k)}$$

получаем векторы  $\vec{v}_{(k)} = \left( \nu_k^1, \nu_{k+d}^2, \nu_{k+2d}^3, \dots, \nu_{k+(m-1)d}^m \right)^\top$ ,  $k = 1, \dots, n - (m-1)d$ . Здесь матрица

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} l_{1,1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1}^{(2)} & l_{2,2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n,1}^{(2)} & l_{n,2}^{(2)} & \cdots & l_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix}$$

является нижнетреугольной матрицей такой, что  $L^{(2)}L^{(2)\top} = R^{(2)}$ , а матрица

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} r_{1,1}^{(1)} & \cdots & r_{1,m}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m,1}^{(1)} & \cdots & r_{m,m}^{(1)} \end{pmatrix}$$

есть заданная корреляционная матрица вертикального сечения поля. Из построенных векторов формируем случайное поле  $\{\nu_j^i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . При  $d = 1$  поле имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \nu_1^1 & \nu_2^1 & \cdots & \nu_{m-1}^1 & \nu_m^1 & \cdots & \nu_{n-(m-1)}^1 & \xi_{n-(m-1)+1}^1 & \cdots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \nu_2^2 & \cdots & \nu_{m-1}^2 & \nu_m^2 & \cdots & \nu_{n-(m-1)}^2 & \nu_{n-(m-1)+1}^2 & \cdots & \xi_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^{m-1} & \xi_2^{m-1} & \cdots & \nu_{m-1}^{m-1} & \nu_m^{m-1} & \cdots & \nu_{n-(m-1)}^{m-1} & \nu_{n-(m-1)+1}^{m-1} & \cdots & \xi_n^{m-1} \\ \xi_1^m & \xi_2^m & \cdots & \xi_{m-1}^m & \nu_m^m & \cdots & \nu_{n-(m-1)}^m & \nu_{n-(m-1)+1}^m & \cdots & \nu_n^m \end{pmatrix}.$$

Так как в рассматриваемом случае для моделирования используется прямоугольная сетка, то после “отбрасывания” по  $d(m-1)$  векторов-столбцов с боковых сторон данного массива случайных величин получаем итоговое случайное поле  $\{\eta_j^i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n - 2d(m-1)$ :

$$\{\eta_j^i\} = \begin{pmatrix} \nu_m^1 & \nu_{m+1}^1 & \cdots & \nu_{n-(m-1)}^1 \\ \nu_m^2 & \nu_{m+1}^2 & \cdots & \nu_{n-(m-1)}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_m^m & \nu_{m+1}^m & \cdots & \nu_{n-(m-1)}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^1 & \eta_2^1 & \cdots & \eta_{n-2(m-1)}^1 \\ \eta_1^2 & \eta_2^2 & \cdots & \eta_{n-2(m-1)}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_1^m & \eta_2^m & \cdots & \eta_{n-2(m-1)}^m \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что в данном случае был рассмотрен угол  $\theta$  наклона прямых, по которым связываются случайные величины, принадлежащий интервалу  $[-\pi/4, 0)$ . В общем случае  $\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \setminus \{0\}$ , и в силу дискретности сетки, угол наклона прямых  $\theta$  изменяется тоже дискретно. При этом

$$\operatorname{tg} \theta = \begin{cases} -1/d, & \theta \in [-\pi/4, 0), \\ 1/d, & \theta \in (0, \pi/4], \end{cases}$$

где  $d$  — целочисленный параметр сдвига. В случае, когда  $\theta \in (0, \pi/4]$ , на Шаге 3 векторы  $\vec{\zeta}_{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n - (m-1)d$ , формируются из случайных величин  $\xi_j^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , следующим образом:

$$\vec{\zeta}_{(k)} = \left( \xi_{k+(m-1)d}^1, \dots, \xi_{k+2d}^{m-2}, \xi_{k+d}^{m-1}, \xi_k^m \right)^\top.$$

Все дальнейшие рассуждения приведены для случая  $\theta \in [-\pi/4, 0)$ , если не оговорено иное.

Отметим, что от значения параметра сдвига  $d$  при фиксированной размерности сетки ( $m \times n$  узлов) зависит количество  $p$  векторов  $\vec{\zeta}_{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , а именно,  $p = n - (m-1)d$ .

Это, в свою очередь, приводит к уменьшению размерности итогового поля  $\{\eta_j^i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n - 2d(m - 1)$ . Если необходимо построить ровно  $p$  векторов  $\zeta_{(k)}$  при заданном сдвиге  $d$  и фиксированном числе узлов  $m$  по вертикальному сечению сетки, то необходимое число узлов сетки по горизонтали вычисляется по формуле  $n = p + d(m - 1)$ .

**Замечание 1.** В приложениях бывает удобно моделировать случайные поля не на прямоугольной сетке, а например на сетке в форме параллелограмма. В этих случаях можно не “отбрасывать” по  $d(m - 1)$  векторов-столбцов массива, а использовать получившееся поле нужной формы.

## 2.2. Корреляционная структура поля.

Исследуем корреляционную структуру построенного с помощью вышеописанного модифицированного алгоритма “по строкам и столбцам” гауссовского случайного поля  $\{\eta_j^i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n - 2d(m - 1)$ . Элементы корреляционных матриц  $R^{(1)} = (r^{(1)}(i, j))$  и  $R^{(2)} = (r^{(2)}(k, p))$  вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} r^{(1)}(i, j) &= \exp(-\alpha_1|i - j|^2), \quad i, j = 1, \dots, n, \\ r^{(2)}(k, p) &= \exp(-\alpha_2|k - p|^2), \quad k, p = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — произвольные параметры. Поскольку случайные величины  $\eta_j^i$  имеют нулевое среднее и единичную дисперсию, то корреляции между ними имеют вид

$$M\eta_i^k\eta_j^p = r(i, j, k, p) = r^{(2)}(k, p)r^{(1)}(i - d(k - 1), j - d(p - 1)),$$

где  $i, j = 1, \dots, n - 2d(m - 1)$ ,  $k, p = 1, \dots, m$ . С учетом того, что шаг сетки равен 1, перепишем корреляционную структуру поля  $\{\eta_j^i\}$  в декартовых координатах  $Oxy$ :

$$\begin{aligned} M\eta_i^k\eta_j^p &= \exp(-\alpha_2|k - p|^2) \exp(-\alpha_1|i - d(k - 1) - j + d(p - 1)|^2) \\ &= \exp(-\alpha_2y^2) \exp(-\alpha_1|x - dy|^2) = \exp(-\alpha_1x^2 + 2d\alpha_1xy - (d^2\alpha_1 + \alpha_2)y^2). \end{aligned}$$

Таким образом, корреляционная функция построенного поля  $\{\eta_j^i\}$  имеет вид

$$r(x, y) = \exp(-\alpha_1x^2 + 2d\alpha_1xy - (d^2\alpha_1 + \alpha_2)y^2).$$

Изолинии данной корреляционной функции описываются уравнениями

$$f(x, y) = -\alpha_1x^2 + 2d\alpha_1xy - (d^2\alpha_1 + \alpha_2)y^2 + C = 0$$

и представляют собой кривые второго порядка, а именно, эллипсы, главные оси которых повернуты на некоторый угол  $\varphi$  относительно координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ . Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 2.

Угол поворота  $\varphi$  вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2d\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1(d^2 - 1)}.$$

Из последней формулы следует, что, изменяя коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  при задании корреляционных матриц  $R^{(1)}$  и  $R^{(2)}$  соответственно, можно контролировать угол поворота  $\varphi$  изолиний корреляционной функции поля.

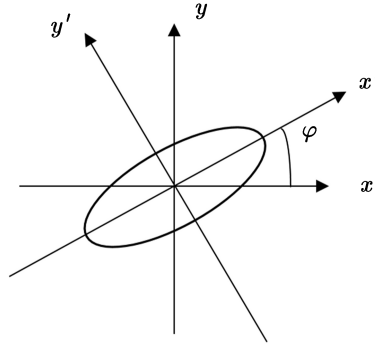


Рис. 2. Пример изолинии  $f(x, y)$

**Замечание 2.** Если величина  $\theta \in (0, \pi/4]$ , то корреляции между случайными величинами поля  $\{\eta_j^i\}$  будут равны

$$M\eta_i^k \eta_j^p = r(i, j, k, p) = r^{(2)}(k, p)r^{(1)}(i + d(k - 1), j + d(p - 1)),$$

а уравнение изолиний примет вид

$$f(x, y) = -\alpha_1 x^2 - 2d\alpha_1 xy - y^2 (\alpha_2 + d^2\alpha_1) + C = 0.$$

При этом угол поворота  $\varphi$  может быть найден из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{-2d\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1 (d^2 - 1)}.$$

**Замечание 3.** Следует отметить, что существуют некоторые ограничения на выбор параметров  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и угол поворота  $\varphi$ . Во-первых,  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ . Во вторых, должно выполняться условие

$$\operatorname{tg} 2\varphi \in \left(0, \frac{2d}{d^2 - 1}\right),$$

т.е. пределы изменения угла поворота  $\varphi$  связаны с параметром сдвига  $d$ . Кроме того, существует связь между скоростями убывания корреляционной функции поля по координатным осям. Действительно, при  $y = 0$  корреляционная функция поля  $\{\eta_j^i\}$  имеет вид  $r(x) = \exp(-\alpha_1 x^2)$ , т.е. скорость убывания функции по оси  $Ox$  зависит только от параметра  $\alpha_1$ . При  $x = 0$  корреляционная функция описывается выражением  $r(y) = \exp(-(d^2\alpha_1 + \alpha_2)y^2)$ , и скорость убывания корреляционной функции по оси  $Oy$  зависит от суммы  $(d^2\alpha_1 + \alpha_2)$ . Таким образом, при изменении параметра  $\alpha_1$  будет изменяться скорость убывания корреляционной функции не только по оси  $Ox$ , но и по оси  $Oy$ .

**Замечание 4.** В главных осях  $Ox'y'$  уравнение изолиний корреляционной функции поля имеет вид

$$f(x', y') = Ax'^2 + By'^2 + C = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A &= -\alpha_1 (d^2 \sin^2 \varphi - d \sin 2\varphi + \cos^2 \varphi) - \alpha_2 \sin^2 \varphi, \\ B &= -\alpha_1 (d^2 \cos^2 \varphi + d \sin 2\varphi + \sin^2 \varphi) - \alpha_2 \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Корреляционную функцию поля в новой системе координат  $Ox'y'$  можно переписать в виде

$$r(x', y') = \exp(Ax'^2 + By'^2).$$

При  $y' = 0$  корреляционная функция описывается уравнением  $r(x') = \exp(Ax'^2)$ , а при  $x' = 0$  — уравнением  $r(y') = \exp(By'^2)$  соответственно.

Кроме этого, при  $d = 1$  на параметры  $A$  и  $B$  накладываются ограничения в виде неравенств:

$$0 < A < \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}, \quad 1 < B < 2\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}.$$

Для корреляционных функций вида  $r(x, y)$  справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** График функции, получающийся при сечении поверхности  $r(x, y)$  произвольной плоскостью вида  $ax + by = 0$ , обладает точками перегиба.

Действительно, перепишем функцию  $r(x, y)$  в виде

$$r(x, y) = \exp\left(-\left(\alpha_1(x - dy)^2 + \alpha_2y^2\right)\right).$$

Очевидно, что  $\alpha_1(x - dy)^2 + \alpha_2y^2 \geq 0$  и  $\alpha_1(x - dy)^2 + \alpha_2y^2 = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y = 0$ . График функции, получающийся при сечении плоскостью  $y = kx$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , есть график функции

$$\tilde{r}(x) = \exp\left(-(\alpha_1(1 - dk)^2 + \alpha_2k^2)x^2\right) = \exp(-D_1x^2), \quad D_1 > 0,$$

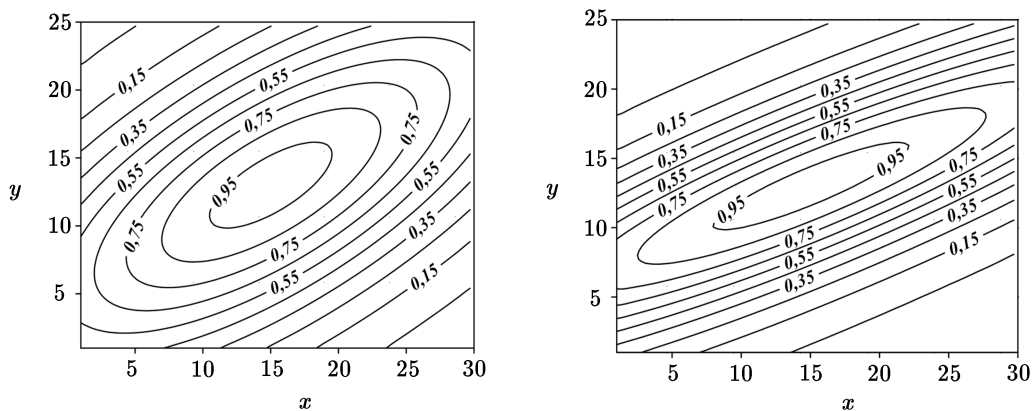
а при сечении плоскостью  $x = 0$  — график функции

$$\hat{r}(y) = \exp(-y^2(\alpha_1d^2 + \alpha_2)) = \exp(-D_2y^2), \quad D_2 > 0.$$

Существование точек перегиба следует из того, что функции  $\partial^2\tilde{r}/\partial x^2$ ,  $\partial^2\hat{r}/\partial y^2$  обращаются в 0 и меняют знак в точках  $\pm 1/\sqrt{2D_1}$  и  $\pm 1/\sqrt{2D_2}$  соответственно.

Кроме того, непосредственной подстановкой легко убедиться, что все точки перегиба, независимо от выбора секущей плоскости  $ax + by = 0$ , принадлежат плоскости  $z = \exp(-0.5)$ .

На рис. 3 приведены примеры изолиний корреляционной функции  $r(x, y)$  при различных значениях параметров  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\varphi$ ,  $d$ .



**Рис. 3.** Изолинии корреляционной функции  $r(x, y)$ . Слева: при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.005$ ,  $\varphi = 31.7$ ,  $d = 1$ . Справа: при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.005$ ,  $\varphi = 22.5$ ,  $d = 2$



### 3. Рандомизированный алгоритм “по строкам и столбцам”

В данном пункте рассматривается дальнейшая модификация алгоритма “по строкам и столбцам”. По аналогии с [6, 7], рандомизируя значения одного из параметров  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$ , можно получить достаточно широкий класс корреляционных функций, для которых применим указанный в данной работе алгоритм моделирования.

Пусть угол поворота главных осей эллипса зафиксирован, т. е.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = c,$$

где  $c \in \left(0, \frac{2d}{d^2-1}\right)$  — некоторая константа.

В таком случае можно выразить параметр  $\alpha_2$  через  $\alpha_1$ :

$$\alpha_2 = \left(\frac{2d}{c} - d^2 + 1\right) \alpha_1.$$

Подставляя полученное выражение для  $\alpha_2$  в формулу, описывающую корреляционную функцию поля, имеем

$$r(x, y) = \exp\left(-\alpha_1\left((x-dy)^2 + \left(\frac{2d}{c} - d^2 + 1\right)y^2\right)\right) = \exp(-D\alpha_1),$$

где  $D = D(x, y) = (x-dy)^2 + \left(\frac{2d}{c} - d^2 + 1\right)y^2 \geq 0$  (равенство  $D = 0$  выполняется только если  $x = y = 0$ ).

Пусть теперь  $\alpha_1$  — случайная величина с плотностью одномерного распределения  $f(z)$ ,  $z \in (a, b)$ ,  $0 < a < b$ . Будем считать, что  $f(z) > 0$ ,  $z \in (a, b)$ . Рассмотрим несколько примеров корреляционных функций вида

$$R(x, y) = \int_a^b f(z) \exp(-Dz) dz.$$

Все примеры будут приведены для сдвига  $d = 1$ .

**Пример 1.** Пусть  $f(z)$  — плотность равномерного распределения на интервале  $(a, b)$ . Тогда

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \int_a^b \frac{1}{b-a} \exp(-Dz) dz = \frac{\exp(-aD) - \exp(-bD)}{(b-a)D} \\ &= \frac{\exp\left(-a\left((x-dy)^2 + \left(\frac{2d}{c} - d^2 + 1\right)y^2\right)\right) - \exp\left(-b\left((x-dy)^2 + \left(\frac{2d}{c} - d^2 + 1\right)y^2\right)\right)}{(b-a)\left((x-dy)^2 + \left(\frac{2d}{c} - d^2 + 1\right)y^2\right)}, \\ &\quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0), \end{aligned}$$

$$R(0, 0) = 1.$$

Если  $a = 0$ ,  $b = 1$ , то

$$R(x, y) = \frac{1 - \exp\left(-\left((x-dy)^2 + \left(\frac{2d}{c} - d^2 + 1\right)y^2\right)\right)}{\left((x-dy)^2 + \left(\frac{2d}{c} - d^2 + 1\right)y^2\right)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0).$$

**Пример 2.** Если  $f(z)$  — плотность экспоненциального распределения с параметром  $\lambda > 0$ , то

$$R(x, y) = \frac{\lambda}{\lambda + D} = \frac{\lambda}{\lambda + (x - dy)^2 + \left(\frac{2d}{c} - d^2 + 1\right) y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Пример 3.** Если  $f(z)$  — плотность треугольного распределения (распределения Симпсона), т. е.

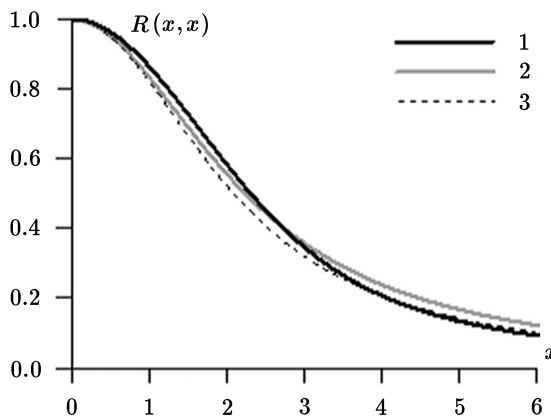
$$f(z) = \begin{cases} \frac{4(z-a)}{(b-a)^2}, & z \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right], \\ \frac{4(b-z)}{(b-a)^2}, & z \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right), \end{cases}$$

то

$$R(x, y) = \frac{4}{(b-a)^2} \frac{(\exp(-aD) - 2 \exp(-\frac{a+b}{2}D) + \exp(-bD))}{D^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0),$$

$$R(0, 0) = 1.$$

На рис. 4 приведены графики сечений поверхности  $R(x, y)$  плоскостью  $y = x$  при  $x > 0$  и при различных плотностях  $f(z)$ .



**Рис. 4.** Графики сечений поверхности  $R(x, y)$  плоскостью  $y = x$ . Кривая 1:  $f(z)$  — плотность равномерного распределения на отрезке  $(0, 0.3)$ ; кривая 2:  $f(z)$  — плотность экспоненциального распределения с параметром  $\lambda = 5$ ; кривая 3:  $f(z)$  — плотность экспоненциального распределения с параметром  $\lambda = 3.7$ , усеченного на отрезок  $(0, 0.7)$

Следует отметить, что, изменяя плотности  $f(z)$ , можно получать корреляционные функции случайного поля с различным характером их убывания.

Приведенные на рис. 4 функции обладают общим свойством: у всех есть точки перегиба. Оказывается, что вне зависимости от выбора плотности  $f(z)$  и плоскости сечения  $Ax + By = 0$  у графика функции всегда будут точки перегиба. Этот факт можно сформулировать в виде следующего утверждения.

**Утверждение 2.** Если  $0 < a < b < +\infty$ , плотность распределения  $f(z)$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $f(z) > 0$ ,  $z \in [a, b]$ , то график функции, являющейся сечением плоскостью  $Ax + By = 0$  поверхности

$$R(x, y) = \int_a^b f(z) \exp(-Dz) dz,$$

где  $D = D(x, y) = (x - dy)^2 + \left(\frac{2d}{c} - d^2 + 1\right) y^2$ , имеет точки перегиба.

**Доказательство.** Рассмотрим случай, когда плоскость сечения имеет уравнение  $y = kx$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . В этом случае верна цепочка равенств

$$D = D(x, kx) = \left( (1 - dk)^2 + \left( \frac{2d}{c} - d^2 + 1 \right) k^2 \right) x^2 = mx^2, \quad m > 0.$$

В результате элементарных вычислений можно получить, что

$$\frac{\partial^2 R(x, kx)}{\partial x^2} = 2m \int_a^b f(z) (2mx^2 z^2 - z) \exp(-mzx^2) dz.$$

Будем рассматривать далее функцию

$$I(x) = \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \int_a^b f(z) (2mx^2 z^2 - z) \exp(-mzx^2) dz.$$

Покажем, что в условиях данного утверждения функция

$$G(x, z) = f(z) (2mx^2 z^2 - z) \exp(-mzx^2)$$

при  $x \rightarrow M$  равномерно по  $z$  на  $[a, b]$  стремится к функции

$$g(z) = f(z) (2mM^2 z^2 - z) \exp(-mzM^2).$$

Для этого надо доказать, что для любого  $\varepsilon_1 > 0$  существует  $\delta_1 > 0$ , такое что для всех  $z \in [a, b]$  неравенство

$$|G(x_1, z) - G(x_2, z)| < \varepsilon_1$$

выполняется, если  $|x_1 - M| < \delta_1$  и  $|x_2 - M| < \delta_1$ . Функция  $G(x, z)$  непрерывна в ограниченной замкнутой области  $[-M, M] \times [a, b]$ , следовательно по теореме Кантора она равномерно непрерывна в этой области, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое что неравенство

$$|G(x, z) - G(x_0, z_0)| < \varepsilon$$

выполнено для всех точек  $(x, z)$ ,  $(x_0, z_0)$  одновременно, если  $|x - x_0| < \delta$   $|z - z_0| < \delta$ . Пусть  $z = z_0$ , тогда неравенство  $|z - z_0| < \delta$  выполняется автоматически. Запишем дважды определение равномерной непрерывности в случае, если  $x_0 = M$ :

$$\begin{aligned} \forall \frac{\varepsilon_1}{2} \exists \delta' : |G(x_1, z) - G(M, z)| < \frac{\varepsilon_1}{2}, \text{ если } |x_1 - M| < \delta', \\ \forall \frac{\varepsilon_1}{2} \exists \delta'' : |G(x_2, z) - G(M, z)| < \frac{\varepsilon_1}{2}, \text{ если } |x_2 - M| < \delta''. \end{aligned}$$

Следовательно, верна цепочка неравенств

$$|G(x_1, z) - G(x_2, z)| \leq |G(x_1, z) - G(M, z)| + |G(M, z) - G(x_2, z)| < \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_1$$

одновременно для всех  $z$ , если  $|x_1 - M| < \delta_1$  и  $|x_2 - M| < \delta_1$ , где  $\delta_1 = \min\{\delta', \delta''\}$ . Таким образом, функция  $G(x, z)$  при  $x \rightarrow M$  равномерно по  $z$  на  $[a, b]$  стремится к функции  $f(z)(2mM^2z^2 - z)\exp(-mzM^2)$ .

С учетом доказанного мы можем воспользоваться теоремой о предельном переходе под знаком интеграл, из которой следует, что

$$\lim_{x \rightarrow M} I(x) = \int_a^b f(z)(2mM^2z^2 - z)\exp(-mzM^2) dz.$$

С другой стороны, по теореме о непрерывности собственного интеграла

$$\lim_{x \rightarrow M} I(x) = I(M).$$

Следовательно,

$$I(M) = \int_a^b f(z)(2mM^2z^2 - z)\exp(-mzM^2) dz.$$

Покажем, что существуют такие  $M_1, M_2$ , что  $I(M_1) > 0$ ,  $I(M_2) < 0$ . Так как  $f(z) > 0$ ,  $a > 0$ ,  $\exp(-mzM^2) > 0$ , то  $I(M) > 0$ , если  $2mz^2M^2 - z > 0$ , т.е. если  $M^2 > \frac{1}{2mz}$ . Поскольку  $m\frac{1}{2ma} > m\frac{1}{2mz}$ , то неравенство  $2mz^2M^2 - z > 0$  будет выполняться, если  $M^2 > \frac{1}{2ma}$ . Следовательно, в качестве  $M_1$  можно брать любое значение, большее чем  $m\frac{1}{\sqrt{2ma}}$ . Аналогично, если в качестве  $M_2$  взято любое значение, меньшее чем  $\frac{1}{\sqrt{2mb}}$ , то будут выполняться неравенства  $2mz^2M_2^2 - z < 0$  и  $I(M_2) < 0$ .

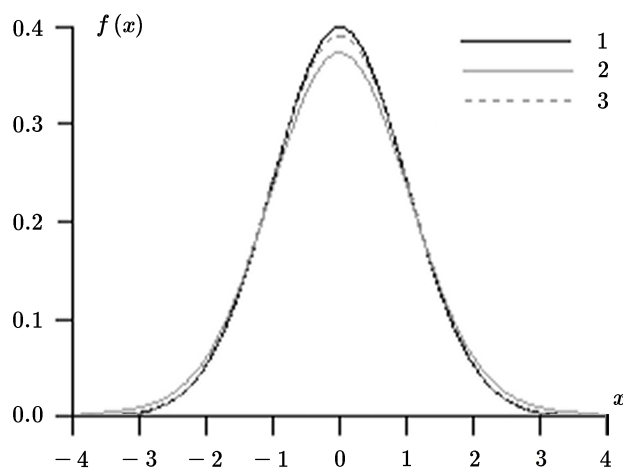
Функция  $I(x)$  непрерывна,  $\exists M_1, M_2 : I(M_1) > 0, I(M_2) < 0$ , следовательно, существует точка  $M_0 : I(M_0) = 0$ . Это означает, что функция  $\frac{\partial^2 R(x, kx)}{\partial x^2}$  обращается в точке  $M_0$  в ноль и меняет знак, т.е. график функции  $R(x, kx)$  обладает точкой перегиба.

В случае, когда рассматривается сечение поверхности  $R(x, y)$  плоскостью  $x = 0$ , доказательство существования точки перегиба идентично приведенному выше с точностью до замены переменной  $x$  на  $y$  и константы  $m$  на постоянную  $m_1 = \frac{2d}{c} + 1$ .  $\square$

**Замечание 5.** Если  $f(z) \geq 0, z \in [a, b]$ , то утверждение сохраняет силу, только выбор точек  $M_1, M_2$  надо осуществлять так, чтобы  $f(M_1) \neq 0, f(M_2) \neq 0$ . В случае, когда  $f(z)$  — плотность распределения на интервале  $[a, +\infty)$ , доказательство утверждения несколько более трудоемко.

Следует отметить, что рандомизированный алгоритм, в отличие от стандартного алгоритма “по строкам и столбцам”, является приближенным в том смысле, что одномерные распределения построенного поля не являются стандартными нормальными, однако близки к ним. Одномерные распределения зависят от выбора плотности распределения рандомизированного параметра и от координат точки поля, в которой определяется его распределение. В качестве иллюстрации приведем рис. 5, на котором изображены

плотность стандартного нормального распределения и оценки плотностей одномерных распределений в двух максимально удаленных друг от друга точках смоделированного поля. Плотность рандомизированного параметра выбрана экспоненциальной с параметром, равным 2. Оценки плотностей проводились по 20000000 реализаций.



**Рис. 5.** Графики одномерных распределений. Кривая 1: плотность стандартного нормального распределения; кривые 2, 3: эмпирические плотности, оцененные в 2-х различных точках поля

## 4. Заключение

Предложенные в данной статье алгоритмы могут быть использованы при моделировании метеорологических полей. Например, согласно [1, 2] корреляционная структура полей среднемесячной приземной температуры воздуха может быть описана корреляционными функциями, обладающими точками перегиба. В работе [5] приведен пример корреляционной функции, которая хорошо описывает структуру реального поля среднемесячной температуры в районе озера Байкал. При моделировании на основе предложенного в статье алгоритма поля с этой корреляционной функцией время вычислений удалось сократить примерно в 100 раз по сравнению с временем, необходимым для моделирования методом условных распределений. При оценках вероятностей возникновения редких событий, когда требуется большое число модельных реализаций поля, такое сокращение времени расчетов является существенным.

## Литература

1. Статистическая структура метеорологических полей / Л.С. Гандин, В.И. Захариев, Р. Целнаи. — Будапешт, 1976.
2. **Гандин Л.С., Каган Р.Л.** Статистические методы интерпретации метеорологических данных. — Л.: Гидрометеиздат, 1976.
3. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.
4. **Каган Р.Л., Федорченко Е.И.** К вопросу о статистическом моделировании двумерных метеорологических полей // Труды ГГО. — 1973. — Вып. 308. — С. 20–26.
5. **Каргаполова Н.А.** Исследование статистической структуры пространственно-временных полей среднемесячной температуры и суммарного месячного количества осадков в районе

- озера Байкал // XI Междунар. науч. конгр. “Интерэкспо ГЕО-Сибирь 2015”, 13–25 апреля 2015 г., сб. материалов Междунар. науч. конф. “Дистанционные методы зондирования Земли и фотограмметрия, мониторинг окружающей среды, геоэкология”. Т. 1. — Новосибирск: СГУГиТ, 2015. — С. 191–195.
6. **Михайлов Г.А.** Оптимизация весовых методов Монте-Карло. — М.: Наука, 1987.
  7. **Огородников В.А.** Моделирование одного класса изотропных гауссовских полей // Сб. науч. тр. “Теория и приложения статистического моделирования”. — Новосибирск, 1988. — С. 25–30.
  8. **Пригарин С.М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005.
  9. **Ambos A.Yu., Mikhaylov G.A.** Statistical modelling of the exponentially correlated multivariate random field // Rus. J. Numer. Analys. Math. Modeling. — 2011. — Vol. 26, № 3. — P. 213–232.
  10. **Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M.** Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. — The Netherlands, Utrecht: VSP, 1996.

*Поступила в редакцию 5 июня 2015 г.,  
в окончательном варианте 22 июня 2015 г.*

### Литература в транслитерации

1. Statisticheskaya struktura meteorologicheskikh poley / L.S. Gandin, V.I. Zahariev, R. Tselnai. — Budapesht, 1976.
2. **Gandin L.S., Kagan R.L.** Statisticheskie metody interpretatsii meteorologicheskikh dannykh. — L.: Gidrometeoizdat, 1976.
3. **Ermakov S.M., Mikhaylov G.A.** Statisticheskoe modelirovanie. — M.: Nauka, 1982.
4. **Kagan R.L., Fedorchenko E.I.** K voprosu o statisticheskom modelirovanii dvumernykh meteorologicheskikh poley // Trudy GGO. — 1973. — Vyp. 308. — S. 20–26.
5. **Kargapolova N.A.** Issledovanie statisticheskoy struktury prostranstvenno-vremennykh poley srednemesyachnoy temperatury i summarnogo mesyachnogo kolichestva osadkov v rayone ozera Baykal // XI Mezhdunar. nauch. kongr. “Interekspo GEO-Sibir’ 2015”, 13–25 aprelya 2015 g., sb. materialov Mezhdunar. nauch. konf. “Distantsionnye metody zondirovaniya Zemli i fotogrammetriya, monitoring okruzhayushchey sredy, geokologiya”. Т. 1. — Novosibirsk: SGUGiT, 2015. — S. 191–195.
6. **Mikhaylov G.A.** Optimizatsiya vesovykh metodov Monte-Karlo. — M.: Nauka, 1987.
7. **Ogorodnikov V.A.** Modelirovanie odnogo klassa izotropnykh gaussovskikh poley // Sb. nauch. tr. “Teoriya i prilozheniya statisticheskogo modelirovaniya”. — Novosibirsk, 1988. — S. 25–30.
8. **Prigarin S.M.** Metody chislennogo modelirovaniya sluchaynykh protsessov i poley. — Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2005.
9. **Ambos A.Yu., Mikhaylov G.A.** Statistical modelling of the exponentially correlated multivariate random field // Rus. J. Numer. Analys. Math. Modeling. — 2011. — Vol. 26, № 3. — P. 213–232.
10. **Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M.** Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. — The Netherlands, Utrecht: VSP, 1996.