УДК 624.124:532.595

ВОЗДЕЙСТВИЕ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА НА ПЛАВАЮЩИЙ ЛЕДЯНОЙ ПОКРОВ

В. М. Козин, А. В. Погорелова

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре
E-mail: sasha@imim.ru

Представлено теоретическое и экспериментальное исследование колебаний вязкоупругой пластины, лежащей на упругом жидком основании, при воздействии на нее импульсной нагрузки. Проанализировано влияние переменной глубины водоема, толщины пластины и времени релаксации деформаций на величину амплитуды колебаний пластины, на длину и кривизну профиля изгибно-гравитационной волны. Получено хорошее согласование теоретических и экспериментальных результатов.

Ключевые слова: импульсная нагрузка, изгибно-гравитационная волна, разрушение ледяного покрова.

1. Теоретическая часть настоящего исследования посвящена развитию результатов, полученных в работе [1]. Рассматривается вязкоупругая, изначально ненапряженная однородная изотропная ледяная пластина, лежащая на упругом жидком основании, которая находится в состоянии покоя и в момент времени $t = 0$ нагружается ударным импульсом Y. Система координат располагается следующим образом: начало координат совмещено с точкой приложения импульса, плоскость xOy совпадает с невозмущенной поверхностью раздела пластина — жидкость, ось z направлена вверх. Предполагается, что движение жидкости плотности ρ_2 потенциальное.

Согласно [2, 3] для льда принимается закон деформирования линейной упругозапаздывающей среды Кельвина — Фойгта [4]. Дифференциальное уравнение малых колебаний плавающей пластины в этом случае запишется в виде (см. [1])

$$\frac{Gh^3}{3}\Big(1+\tau_\phi\,\frac{\partial}{\partial t}\Big)\nabla^4 w+\rho_1 h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho_2 g w+\rho_2\,\frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{z=0}=Y\delta(\boldsymbol{r})\delta(t), \qquad (1.1)$$

где $G = 0{,}5E/(1+\nu)$ — модуль упругости льда при сдвиге; E — модуль упругости льда при растяжении и сжатии; ν — коэффициент Пуассона; $h(x, y)$ — толщина льда; $\rho_1(x, y)$ — его плотность; τ_ϕ — время релаксации деформаций льда или "время запаздывания" [2–4]; $w(x, y, t)$ — деформация поверхности жидкости или вертикальное перемещение льда; $\Phi(x, y, z, t)$ — функция потенциала скорости жидкости, удовлетворяющая уравнению Лапласа ($\Delta\Phi = 0$); $\delta(\boldsymbol{r})$ — дельта-функция Дирака; $\boldsymbol{r} = (x, y)$ — радиус-вектор текущей точки ледяной поверхности; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. В дальнейшем предполагается, что ρ_1, h — постоянные. В качестве расчетных величин модуля сдвига G и плотности пластины ρ_1 следует принимать их приведенные значения, определяемые как интегральные величины по толщине пластины [2].

Начальные условия для w будут однородными [1, 2]:

$$w = 0, \qquad \dot w = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0.$$

Линеаризованное кинематическое условие на поверхности раздела лед — вода имеет вид [2]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=0}=\frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (1.2)$$

Граничное условие на дне водоема для функции потенциала скорости жидкости $\Phi(x, y, z, t)$ запишется так:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \qquad \text{при} \qquad z = -H, \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали донной поверхности; $H = H_1 + \alpha r - b$; H_1 — глубина водоема; r — модуль радиус-вектора $\boldsymbol{r}$; $b = \rho_1 h/\rho_2$ — глубина погружения льда при статическом равновесии; α — тангенс угла наклона донной поверхности вдоль направления радиус-вектора $\boldsymbol{r}$. Если $\alpha = 0$, то расстояние от поверхности раздела лед — вода до дна водоема постоянно и равно $H_1 - b$. Если $\alpha > 0$, то в направлении радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ глубина увеличивается, если $\alpha < 0$, — уменьшается.

По аналогии с работой [1] для решения задачи используются преобразования Фурье по координатам x и y для функций $w(x, y, t)$ и $\Phi(x, y, z, t)$ и совершается переход к их трансформантам $w_F(\boldsymbol{\gamma}, t)$ и $\Phi_F(\boldsymbol{\gamma}, z, t)$ в векторной форме

$$w(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \exp\left(i(\boldsymbol{\gamma r})\right) w_F(\boldsymbol{\gamma}, t)\, d\boldsymbol{\gamma}, \qquad \Phi(\boldsymbol{r}, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \exp\left(i(\boldsymbol{\gamma r})\right) \Phi_F(\boldsymbol{\gamma}, z, t)\, d\boldsymbol{\gamma}$$

$$(\Phi_F(\boldsymbol{\gamma}, z, t) = A_1 \exp(-\gamma z) + B_1 \exp(\gamma z)).$$

Здесь A_1, B_1 — неизвестные функции переменных $\boldsymbol{\gamma}$ и t; γ — модуль вектора $\boldsymbol{\gamma}$.

После применения преобразования Фурье к уравнению (1.1) и использования кинематического (1.2) и граничного (1.3) условий получается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами для расчета w_F

$$\ddot{w}_F m(\gamma) + \dot{w}_F k(\gamma) + w_F c(\gamma) = Y \delta(t), \tag{1.4}$$

где

$$k(\gamma) = \tau_\phi \frac{G h^3 \gamma^4}{3}; \qquad m(\gamma) = \rho_1 h + \frac{\rho_2 (1 + \alpha^2)}{\gamma(\operatorname{th}(\gamma H) + \alpha^2 \operatorname{cth}(\gamma H))}; \qquad c(\gamma) = \rho_2 g + \frac{G h^3 \gamma^4}{3}.$$

Применение преобразования Лапласа к решению уравнения (1.4) при однородных начальных условиях дает следующий результат:

$$w_F = \begin{cases} \dfrac{Y}{\sqrt{cm - k^2/4}} \exp\Big(-\dfrac{kt}{2m}\Big) \sin\Big(\dfrac{t}{m}\sqrt{cm - \dfrac{k^2}{4}}\Big), & cm - \dfrac{k^2}{4} > 0, \\ \dfrac{Y}{\sqrt{k^2/4 - cm}} \exp\Big(-\dfrac{kt}{2m}\Big) \operatorname{sh}\Big(\dfrac{t}{m}\sqrt{\dfrac{k^2}{4} - cm}\Big), & \dfrac{k^2}{4} - cm > 0, \\ \dfrac{Y}{m}\, t \exp\Big(-\dfrac{kt}{2m}\Big), & cm - \dfrac{k^2}{4} = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Искомая функция w находится по аналогии с [2] с помощью обратного преобразования Фурье:

$$w(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty w_F \gamma J_0(\gamma r)\, d\gamma. \tag{1.6}$$

Величина w_F вычисляется по формулам (1.5); $J_0(\gamma r)$ — функция Бесселя первого рода; r — расстояние от точки до места приложения ударного импульса; t — время; величины c, m, k вычисляются по формулам (1.4).

2. Эксперименты проводились в бассейне размерами $L \times B \times H = 2{,}0 \times 1{,}5 \times 1{,}2$ м. В качестве модельной использовалась полимерная пластина толщиной 1 мм. Ударный

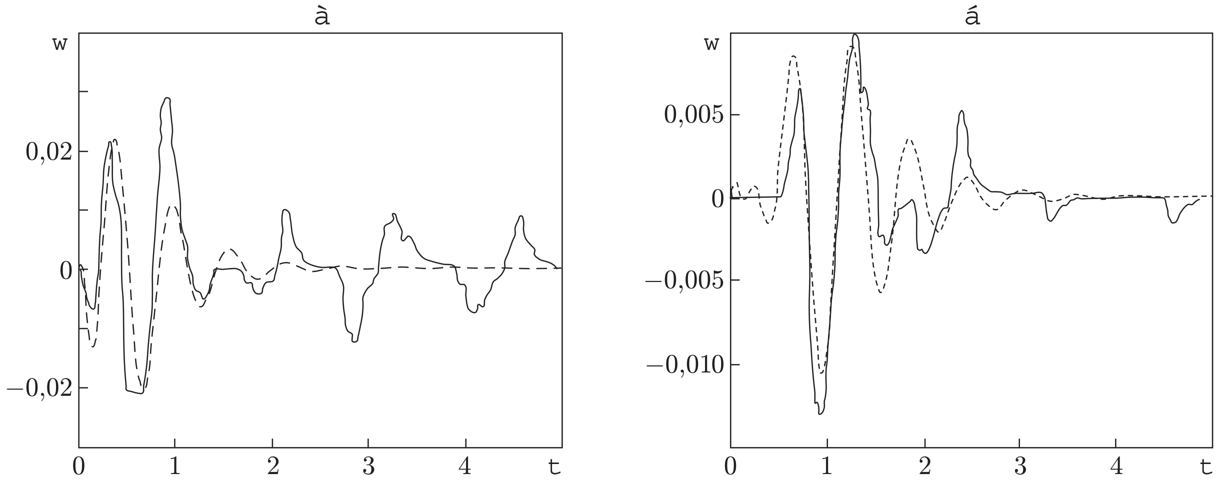

Рис. 1

импульс прикладывался снизу вверх при помощи механического нагружающего устройства. Для измерения параметров моделируемых волн использовались датчик перемещений и двухкоординатный самописец. Интенсивность импульса выбиралась в зависимости от чувствительности датчика для обеспечения устойчивой и стабильной записи кривых деформаций пластины. При увеличении интенсивности импульса на 20–30 % происходит линейное увеличение амплитуды волн при неизменном периоде.

Результаты измерений деформации пластины на расстояниях 0,26 и 0,52 м представлены сплошными кривыми на рис. 1,*а,б* соответственно. Такое расположение датчика относительно точки приложения импульса обеспечивало качественную запись профиля волны в пределах примерно двух ее периодов без искажения, т. е. без наложения отраженных от стенок бассейна волн.

3. Результаты расчетов по формуле (1.6) сравнивались с экспериментальными данными, полученными для следующих параметров пластины и воды: $\rho_1 = 2200$ кг/м^3, $\rho_2 = 1000$ кг/м^3, $E = 4{,}1 \cdot 10^6$ Н/м^2, $\nu = 0{,}45$, $h = 0{,}001$ м, $\alpha = 0$, $H = 1{,}2$ м, $\tau_\phi = 5$ с, $Y = 4$ кг/с. Время релаксации полимерной пластины τ_ϕ выбиралось таким образом, чтобы периоды изгибно-гравитационной волны в эксперименте и расчете были примерно одинаковыми. Заметим, что наилучшее соответствие теоретических и экспериментальных данных наблюдалось при $\tau_\phi = 5$ с. Так как в условиях эксперимента невозможно было замерить величину импульса, прикладываемого к пластине, то для расчетов по формуле (1.6) было выбрано такое значение импульса, при котором теоретические и экспериментальные амплитуды колебаний пластины примерно равны. На рис. 1 для расстояний 0,26 и 0,52 м от источника импульса представлены результаты расчетов по формуле (1.6) (штриховые кривые) и экспериментальные данные (сплошные кривые). Видно, что решение (1.6) для вязкоупругой модели пластины корректно и хорошо согласуется с экспериментальными данными для $t \leqslant 1{,}5$ с, т. е. для того промежутка времени, когда в результатах измерений влияние отраженных волн не учитывается.

4. При расчетах по формуле (1.6) варьировались расстояния до точки приложения импульса, время, прошедшее с момента приложения импульса, глубина водоема, толщина ледяной пластины и время релаксации при следующих параметрах льда и воды: $\rho_1 = 900$ кг/м^3, $\rho_2 = 1000$ кг/м^3, $E = 5 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\nu = 1/3$, $Y = -10^7$ кг/с. Толщина льда h варьировалась от 0,1 до 2,0 м, время релаксации τ_ϕ — от 0,001 до 10 с, расстояние от поверхности раздела лед — вода до дна H — от 1 м до бесконечности, а тангенс угла наклона донной поверхности α изменялся от −1 до 1.

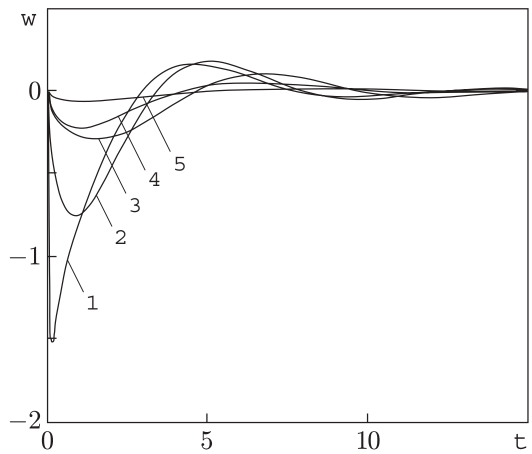

Рис. 2

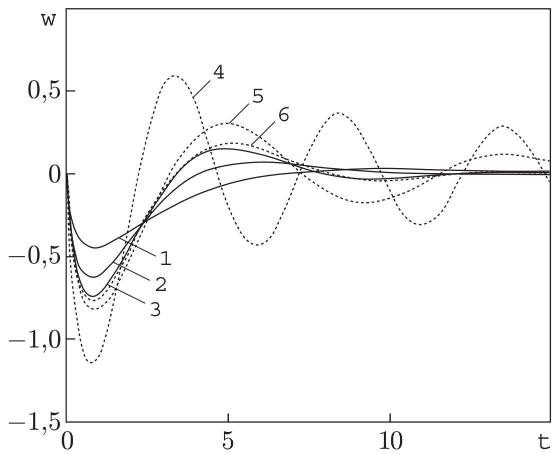

Рис. 3

На рис. 2 представлены зависимости $w(t)$ в точке приложения импульса $r = 0$ м для $H = 100$ м, $\alpha = 0$ при различных значениях времени релаксации τ_ϕ и толщины льда h. Кривые *1–3* соответствуют параметру $\tau_\phi = 0{,}05$; 0,69; 5 с для $h = 0{,}5$ м. Видно, что увеличение времени релаксации приводит к уменьшению амплитуды и увеличению периода колебаний пластины. В работах [5, 6] показано, что наилучшее приближение к экспериментальным данным вязкоупругая модель льда дает при времени релаксации $\tau_\phi = (0{,}690 \pm 0{,}067)$ с. Кривые *2, 4, 5* соответствуют толщине пластины $h = 0{,}5$; 1; 2 м при $\tau_\phi = 0{,}69$ с. Увеличение толщины пластины, как и следовало ожидать, приводит к уменьшению амплитуды прогиба пластины и увеличению периода и длины волны.

На рис. 3 показано влияние тангенса угла наклона донной поверхности α на величину вертикального перемещения пластины w для различных H в зависимости от времени t в точке приложения импульса $r = 0$ м при $\tau_\phi = 0{,}69$ с, $h = 0{,}5$ м. Кривые *1–3* соответствуют $H_1 - b = 30$, 10, 3 м для $\alpha = 0$, кривые *4–6* — тем же значениям $H_1 - b$ для $\alpha = \pm 1$. На рис. 3 видно, что наклон донной поверхности приводит к увеличению амплитуды прогиба пластины. Чем меньше глубина водоема, тем сильнее сказывается влияние α на изгибе ледяной пластины.

На рис. 4 показано влияние глубины водоема и тангенса угла наклона донной поверхности на величину w и на абсолютную величину кривизны изгиба ледяной поверхности $|K|$ в зависимости от расстояния r от точки приложения импульса в момент времени $t = 0{,}7$ с для $\tau_\phi = 0{,}69$ с, $h = 0{,}5$ м. Кривые *1, 2* — графики зависимости $w(r)$ при $H = 2$, 12 м соответственно ($\alpha = 0$). Кривыми *5, 6* представлены зависимости от радиуса модуля кривизны кривых *1* и *2* соответственно. Видно, что увеличение глубины водоема приводит к росту прогиба ледяной пластины в окрестности точки приложения нагрузки и к незначительному увеличению кривизны изгиба пластины. Кривые *3, 4* — графики зависимости $w(r)$ при $H_1 - b = 2$ м, $\alpha = 1$ и $H_1 - b = 12$ м, $\alpha = -1$ соответственно, кривые *7, 8* — зависимости от радиуса модуля кривизны кривых *3* и *4*. Из представленных на рис. 4 результатов (кривые *3, 4, 7, 8*) следует, что наклонное дно и малая глубина могут привести к увеличению кривизны изгиба ледяной поверхности в 5–10 раз. Отметим, что кривые *3, 4* на рис. 4 соответствуют большим значениям угла наклона ($\alpha \approx 1$) в случае, когда расстояние от глубокой до мелкой воды намного меньше длины изгибно-гравитационной волны.

На рис. 5 показано влияние малого угла наклона донной поверхности ($\alpha \ll 1$) и времени t на вертикальные перемещения ледяной пластины w для $h = 0{,}5$ м, $\tau_\phi = 0{,}69$ с, $H_1 - b = 11$ м. Кривые *1–4* соответствуют моментам времени $t = 2$, 5, 10, 15 с для по-

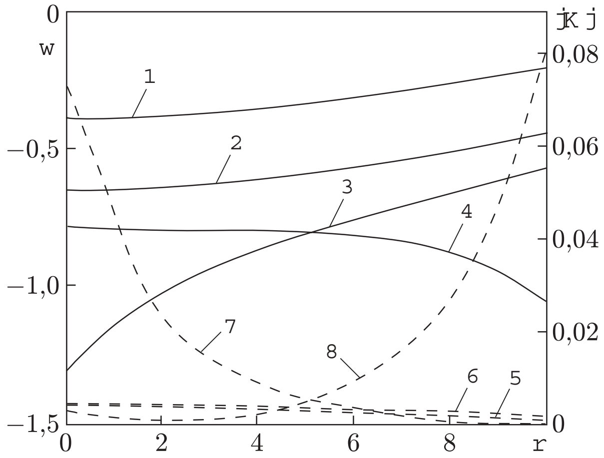

Рис. 4

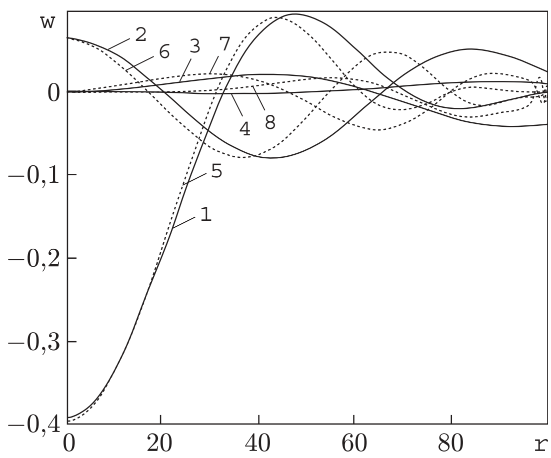

Рис. 5

стоянной глубины ($\alpha = 0$). Из анализа этих кривых следует, что наибольшего прогиба ледяная пластина достигает в начальные моменты времени в окрестности точки приложения импульса. Кривыми *5–8* показано развитие изгибно-гравитационной волны в условиях небольшого повышения донной поверхности ($\alpha = -0{,}109$) в моменты времени $t = 2$, 5, 10, 15 с соответственно. Видно, что по мере выхода волны на малую глубину 0,1 м, что соответствует $r = 100$ м при $\alpha = -0{,}109$, изгибно-гравитационная волна "сжимается", т. е. уменьшается ее длина. Из расчетов следует, что в окрестности $r = 100$ м с течением времени кривизна возрастает в сотни раз.

Полученные результаты могут быть использованы для оценки ледоразрушающей способности изгибно-гравитационной волны, возникающей от ударного импульса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Козин В. М., Погорелова А. В.** Деформация бесконечной ледовой пластины, вызванная ударным импульсом // Тр. Междунар. форума по проблемам науки, техники и образования. М.: Акад. наук о Земле, 2002. Т. 3. С. 48–50.
2. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
3. **Козин В. М., Погорелова А. В.** Волновое сопротивление судов на воздушной подушке при движении по ледяному покрову // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 49–55.
4. **Фрейденталь А., Гейрингер Х.** Математические модели неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
5. **Squire V. A., Hosking R. J., Kerr A. D., Langhorne P. J.** Moving loads on ice plates. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
6. **Takizava T.** Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load // Cold Regions Sci. Technol. 1985. V. 11. P. 171–180.

Поступила в редакцию 19/XI 2003 г.,
в окончательном варианте — 22/III 2004 г.