3. R. D. Bengtson, M. H. Miller a. o. Phys. Fluids, 1970, 13, 2.
4. А. А. Коньков, А. П. Рязин, А. И. Соколов. Теплофизика высоких температур, 1974, 12, 4.
5. В. П. Вакатов, А. Б. Карасев и др. Журнал прикладной спектроскопии, 1971, 15, 6.
6. А. С. Предводителев, Т. В. Ступоченко и др. Таблицы термодинамических функций воздуха. М., Изд-во АН СССР, 1959.
7. Г. А. Ковальская, В. Г. Севастьяненко, И. А. Соколова. ПМТФ, 1972, 1.
8. P. Debye, E. Huckel. Z. Phys., 1923, 24, 9.
9. W. Weizel, G. Ecker. Bull. Amer. Phys. Soc., 1956, 1, 4.
10. Г. А. Ковальская. ПМТФ, 1973, 1.
11. F. A. Goldsworthy. J. Fluid Mech., 1959, 5, 1.
12. И. А. Авилова, Л. М. Биберман и др. Оптические свойства горячего воздуха. М., «Наука», 1970.

О НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МОДЕЛЯХ ОДНОМЕРНОЙ ПУЛЬСАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. К. Кедринский

В противоположность случаю сферической симметрии динамика цилиндрической полости в безграничной несжимаемой жидкости не может быть описана точным уравнением из-за логарифмической особенности на бесконечности. Между тем наличие хотя бы приближенной модели весьма желательно, поскольку целый ряд практических задач подводного взрыва и взрыва в грунтах распределенных зарядов, где часто используется модель несжимаемой жидкости, связан с необходимостью получения простых оценок характера пульсации полости с продуктами детонации.

Уравнение пульсации цилиндрической полости в сжимаемой жидкости было получено в работах [1—3]. В [3] в результате формального предельного перехода (скорость звука в жидкости полагалась бесконечно большой) было получено приближенное уравнение и для пульсации цилиндрической полости в несжимаемой жидкости. Это позволило, в частности, оценить период пульсации полости с продуктами детонации, который практически совпал с экспериментальным значением для стандартного заряда диаметром 3 мм.

В работе [4] было высказано сомнение относительно реальности этого результата в связи с несоответствием уравнения, полученного в результате предельного перехода, известному уравнению и его первого интеграла — закону сохранения энергии. Как будет показано ниже, вид приближенного уравнения связан с введением дополнительного предположения, которое, следуя [5], было сделано еще при анализе волнового уравнения, т. е. до предельного перехода. В [4] было обращено внимание на то, что в реальных постановках всегда присутствует свободная поверхность, и предложена модель пульсации полости в полупространстве идеальной несжимаемой жидкости. Ниже сопоставим различные приближенные модели и проведем их сравнение с некоторыми экспериментальными данными.

Предельный случай модели Кирквуда — Бете. Для потенциального течения жидкости в акустическом приближении справедливо следующее выражение уравнения неразрывности в одномерном случае сферической цилиндрической или плоской симметрии ($\nu=2, 1, 0$):

$$\varphi_{rr} - c_0^{-2} \cdot \varphi_{tt} + \nu \cdot \varphi_r / r = 0,$$

где φ — потенциал скорости; c_0 — скорость звука в невозмущенной жидкости; r — координата; t — время. Следуя [1, 5], вводим новую функцию $\Phi = r^{\alpha}\cdot\varphi$, где $\alpha = \mathrm{const}$. Тогда для Φ имеем

$$\Phi_{rr} - c_0^{-2}\cdot\Phi_{tt} + (\nu - 2\alpha)\cdot r^{-1}\cdot\Phi_r + \alpha(\alpha + 1 - \nu)\cdot r^{-2}\cdot\Phi = 0.$$

Полагаем $\alpha = \nu/2$, при этом последнее уравнение перепишется как

$$\Phi_{rr} - c_0^{-2}\cdot\Phi_{tt} + \nu\cdot(2 - \nu)\cdot\Phi/4\cdot r^2 = 0.$$

Отсюда видно, что для плоского ($\nu=0$) и сферического ($\nu=2$) случаев оно имеет вид

$$\Phi_{rr} - c_0^{-2}\cdot\Phi_{tt} = 0. \qquad (1)$$

Рич и Гиннел [5] предположили, что в асимптотическом приближении при $\nu=1$ (цилиндрическая симметрия) в предпоследнем уравнении можно принебречь членом $\Phi/4\cdot r^2$, и показали, что это предположение практически справедливо и для областей, близких к заряду. Сравнение экспериментальных и расчетных параметров цилиндрической ударной волны, в определении которых основную роль играет приближенное уравнение пульсации цилиндрической полости в сжимаемой жидкости, подтверждает этот факт [1]. Для несжимаемой жидкости это допущение эквивалентно предположению о том, что и в случае цилиндрической симметрии функция Φ зависит только от t. Ясно, что таким образом автоматически введено ограничение потенциала на бесконечности, которое может быть оправдано только согласием с экспериментом.

После введения функции кинетической энтальпии $\Omega = \omega + u^2/2$, где $= \omega \int dp/\rho, p$ — давление, ρ — плотность, u — скорость частицы жидкости, уравнение сохранения импульса легко преобразуется к виду

$$\Phi_t = r^{\nu/2}\cdot\Omega. \qquad (2)$$

Решение (1), как известно, имеет вид $\Phi = \Phi(t - r/c_0)$, поэтому $\Phi_t = \Phi'$, $\Phi_r = -\Phi'/c_0$ и, согласно (2), $\Phi_r = -r^{\nu/2}\cdot\Omega/c_0$, $\Phi_{rr} = -(r^{\nu/2}\cdot\Omega)_r/c_0$ и $\Phi_{tt} = (r^{\nu/2}\cdot\Omega)_t$. Подставляя полученные соотношения в (1), получим основной результат теории Кирквуда—Бете, обобщенный для $\nu = 0, 1, 2$,

$$\frac{\partial r^{\nu/2}\cdot\Omega}{\partial r} + c_0^{-1}\cdot\frac{\partial r^{\nu/2}\cdot\Omega}{\partial t} = 0. \qquad (3)$$

Подстановка в (3) выражения $\Omega = \omega + u^2/2$ и замена частных производных на полные на основании законов сохранения

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial r},\quad c_0^{-2}\cdot\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\nu\cdot u}{r}$$

позволяет получить акустический вариант уравнения пульсации одномерной полости в безграничной жидкости

$$R\cdot\left(1 - 2\frac{dR}{dt}\Big/c_0\right)\cdot\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{4}\cdot\nu\cdot\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\cdot\left(1 - 4\cdot\frac{dR}{dt}\Big/3\cdot c_0\right) = \nu\cdot\omega/2 + $$
$$+ R\cdot\frac{d\omega}{dt}\cdot\left[1 - \frac{dR}{dt}\Big/c_0 + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2\Big/c_0^2\right]\Big/c_0, \qquad (4)$$

где R — радиус полости; dR/dt — скорость ее стенки. Уравнение пульсации можно получить и в более общем виде, если использовать предположение Кирквуда—Бете о распространении инварианта $G=r^{\nu/2}\cdot\Omega$ вдоль характеристики со скоростью $c+u$, где c — местная скорость звука. Заметим, что асимптотическое приближение использовалось только для вывода (3): при переходе к полным производным замена осуществляется уже на основании точных уравнений сохранения. В дальнейшем будем рассматривать только цилиндрическую симметрию; при $c_0\to\infty$ из (4) получим

$$[R\cdot d^2R/dt^2+(dR/dt)^2]\cdot 2-(dR/dt)^2/2=\omega. \qquad (5)$$

Здесь $\omega=(p_R-p_\infty)/\rho$, p_R — давление в полости, p_∞ — давление на бесконечности. Этот вид уравнения наиболее удобен для сравнения с другими моделями.

Цилиндрическая полость в полупространстве идеальной несжимаемой жидкости. Пусть в жидкости имеется цилиндрическая полость радиуса R, центр которой расположен на расстоянии h от свободной поверхности. Предполагается, что $h\gg R$, свободная поверхность горизонтальна и потенциал скорости на ней равен нулю. В такой постановке удобно использовать плоскую биполярную систему координат с переменными γ и β, где $\gamma=\mathrm{const}$ и $\beta=\mathrm{const}$ — ортогональные окружности. Координаты декартовой $(x,\ y)$ и плоской биполярной систем связаны соотношениями

$$x=a\cdot\mathrm{sh}\,\gamma/(\mathrm{ch}\,\gamma+\cos\beta),\quad y=a\cdot\sin\beta/(\mathrm{ch}\,\gamma+\cos\beta).$$

Здесь $a=\sqrt{h^2-R^2}\approx h$, значение $\gamma=0$ соответствует свободной поверхности. Уравнение Лапласа в принятой системе имеет вид

$$\varphi_{\gamma\gamma}+\varphi_{\beta\beta}=0.$$

В силу указанных выше условий в качестве поверхности цилиндрической полости можно выбрать координатную поверхность γ_0. Решение уравнения Лапласа имеет простой вид $\varphi=\varphi_0\cdot\gamma/\gamma_0$. Значение φ_0 найдется из кинематического условия $\zeta_t+\nabla\varphi\cdot\nabla\zeta=0$, где $\zeta=0(\gamma-\gamma_0=0)$ — уравнение границы полости. Коэффициенты Лямэ в принятой системе координат равны $H_{\gamma,\beta}=a\cdot(\mathrm{ch}\,\gamma+\cos\beta)^{-1}$. Тогда $\varphi_0=a^2\cdot d\gamma_0/dt\cdot\gamma_0\times$ $\times(\mathrm{ch}\,\gamma_0+\cos\beta)^{-2}$ и окончательное выражение для потенциала с учетом соотношения $\mathrm{ch}\,\gamma_0=(h/R)\gg 1$ примет вид

$$\varphi\simeq a^2\cdot d\gamma_0/dt\cdot\gamma\cdot\mathrm{ch}^{-2}\,\gamma_0. \qquad (6)$$

Отсюда

$$\nabla\varphi=H_\gamma^{-1}\cdot\varphi_\gamma=a\cdot\mathrm{ch}^{-2}\gamma_0\cdot(\mathrm{ch}\,\gamma+\cos\beta)\cdot\frac{d\gamma_0}{dt},$$

$$\varphi_t=a^2\cdot d^2\gamma_0/dt^2\cdot(\mathrm{ch}^{-2}\,\gamma_0)\cdot\gamma-2a^2\cdot(d\gamma_0/dt)^2\cdot(\mathrm{ch}^{-2}\,\gamma_0)\cdot\gamma.$$

В последнем выражении использовано соотношение $\mathrm{sh}\,\gamma_0\simeq\mathrm{ch}\,\gamma_0$, справедливое для $h\gg R$. Подставляя выражения для $\nabla\varphi$ и φ_t в интеграл Коши—Лагранжа и выполняя условие $\gamma=\gamma_0$, получим следующие уравнения пульсации полости:

в биполярной системе —

$$-a^2\cdot\gamma_0\cdot(\mathrm{ch}^{-2}\gamma_0)\cdot d^2\gamma_0/dt^2+2a^2\cdot(\mathrm{ch}^{-2}\gamma_0)\cdot(d\gamma_0/dt)^2\cdot(\gamma_0\cdot\mathrm{th}\,\gamma_0-1/4)=\omega,$$

в цилиндрической системе —

$$[R\cdot d^2R/dt^2+(dR/dt)^2]\cdot\ln(2h/R)-(dR/dt)^2/2=\omega, \qquad (7)$$

где использовано соотношение $\gamma_0=\ln(2h/R)$. Уравнение (7) другим способом впервые было получено в [4]. Вид его указывает, что динамика цилиндрической полости должна существенно зависеть от глубины погружения заряда.

Цилиндрический слой. К этой модели приводит вполне естественное предположение о том, что в реальных условиях пульсация полости затрагивает конечную массу окружающей ее жидкости. В этой модели величина внешнего радиуса цилиндрического слоя является неопределенной. Уравнение движения цилиндрического слоя идеальной несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{1}{2}\left[R\frac{d^2R}{dt^2}+\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right]\ln\frac{r_0^2-R_0^2+R^2}{R^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_0^2-R_0^2+R^2}-1\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\omega,$$

который существенно упростится при $r_0^2 \gg R^2$

$$[R\cdot d^2R/dt^2+(dR/dt)^2]\ln(r_0/R)-(dR/dt)^2/2=\omega, \qquad (8)$$

где r_0, R_0 — начальные значения внешнего радиуса слоя и радиуса полости.

Таким образом, имеем уравнения (5), (7), (8) для трех различных моделей, которые предстоит сравнить между собой и с экспериментальными данными. Существуют два основных параметра, по которым можно сравнить экспериментальные данные с расчетными: максимальная степень сжатия или расширения и период пульсации полости с продуктами детонации. Однако первый из них существенно зависит от величины излучаемой в виде волны сжатия энергии, что делает нецелесообразным сравнение по этому параметру приближенных моделей в рамках идеальной несжимаемой жидкости. Относительно периода пульсации из практики оценок для сферической симметрии [5] и частного результата работы [3] известно, что он достаточно точно определяется удвоенным временем схлопывания в несжимаемой жидкости пустой полости с начальным радиусом, соответствующим максимальной степени первого расширения полости с продуктами детонации. Последняя может быть определена экспериментальным путем или на основании данных [3].

Как показывает расчет, при определении времени схлопывания можно с достаточной степенью точности в уравнениях (7), (8) под знаком логарифма положить $R=R_0$. Тогда после замены переменных $R=yR_0$ и $t=\tau\sqrt{\rho/p_\infty}\cdot R_0$ указанные уравнения для пустой полости можно записать в виде

$$\begin{gathered}[y\cdot d^2y/d\tau^2+(dy/d\tau)^2]\cdot 2-(dy/d\tau)^2/2=-1,\\ [y\cdot d^2y/d\tau^2+(dy/d\tau)^2]\ln(2h/R_0)-(dy/d\tau)^2/2=-1,\\ [y\cdot d^2y/d\tau^2+(dy/d\tau)^2]\ln(r_0/R_0)-(dy/d\tau)^2/2=-1,\end{gathered} \qquad (9)$$

здесь R_0 соответствует максимальному радиусу полости с продуктами детонации при первом расширении. Последние два уравнения имеют простое решение: $\tau=\sqrt{(1-y^2)\cdot\ln b}$, где $b=r_0/R_0$ (цилиндрический слой) или $b=2h/R_0$ (полость в полупространстве), а y изменяется от 1 до 0. Время схлопывания пустой полости в соответствии с уравнениями (9) определится как $\tau_1=\sqrt{2/3}\Gamma(7/6)\cdot\Gamma(1/2)/\Gamma(5/3)=1{,}485$ и $\tau_{2,3}=\sqrt{\ln b}$. Тогда выражения для безразмерных периодов пульсации T запишутся как

$$T_1=2{,}97,\ T_2=2\sqrt{\ln(2h/R_0)},\ T_3=2\sqrt{\ln(r_0/R_0)}. \qquad (10)$$

С целью проверки (10) проведены экспериментальные исследования по определению периода пульсации цилиндрической полости с продуктами детонации. Измерялся интервал времени между моментом прихода к датчику давления фронта ударной волны и моментом записи максимального давления первой пульсации для случаев взрыва ДШ-гексогена диаметром $d=0{,}65$, 1,65 и 3 мм в диапазоне глубин погружения зарядов 0,21÷3,5 м от свободной поверхности. Диаметр заряда и глубина взрыва выбирались из расчета возможности четкого определения предполагаемой зависимости периода пульсации от глубины взрыва. В каждом эксперименте взрывался заряд длиной 1,5 м, датчик помещался на средней линии заряда в 50 см от него. Точность определения периода не хуже 1 мс. Экспериментальные данные периода пульсации t_* сведены в таблицу.

d, мм	h, мм	t_*, мс	t_1	t_2	$\ln(r_0/R_0)$
0,65	0,21	13,2÷14,2	13,03 (12,9)	13,28 (13,15)	2,26÷2,62
	2,10	13,0÷13,8	(11,84)	18,69 (17,00)	2,20÷2,47
1,65	0,54	31÷32	33,08 (32,27)	33,41 (32,60)	1,94÷2,06
	2,10	29÷30	(30,07)	42,32 (38,50)	1,7 ÷1,8
3,00	0,54	58	(58,68)	52,12 (50,85)	2,05
	2,10	57÷57,5	60,15 (54,68)	70,27 (63,90)	1,98÷2,01
	3,50	54÷55	(51,85)	76,02 (65,50)	1,78÷1,84

Как видно из таблицы, глубина погружения заряда не влияет на период пульсации (в смысле выражения для T_2), тогда как, согласно T_2, период должен возрастать при увеличении h. Максимальный относительный разброс экспериментальных значений приходиться на самый тонкий заряд, что связано с малостью амплитуды его первой пульсации, а в связи с этим — и с трудностью определения точного положения ее максимума. Это вполне естественно, так как, например, исходная потенциальная энергия жидкости, часть которой идет на излучение первой пульсации в процессе схлопывания полости с продуктами детонации, в случае заряда $d=0{,}65$ мм примерно в 20 раз меньше, чем для заряда $d=3$ мм.

Для сравнения с данными эксперимента запишем выражения периодов пульсации T_1 и T_2 в размерном виде, предварительно заменив R_0 через его связь с радиусом заряда R_*. Расчет [3] и эксперимент показывают, что степень первого максимального расширения полости с продуктами детонации, определяемая отношением R_0/R_*, есть величина постоянная, не зависит от R_* и лежит в диапазоне 130÷140 для исследованных типов ДШ со скоростью детонации 7,7 км/с и плотностью ВВ 1,55 г/см^3. Приняв $R_0/R_*=135$, запишем выражения для периодов t_1 и t_2 в соответствии с первыми двумя моделями

$$t_1 = 401 R_* \sqrt{\rho p_\infty^{-1}},$$
$$t_2 = 270 R_* \sqrt{\rho p_\infty^{-1} [\ln(2h/R_*) - 4{,}91]}. \tag{11}$$

Результаты расчета по (11) представлены в таблице. В скобках показаны значения периодов, рассчитанные в предположении, что давление на бесконечности равно гидростатическому давлению на глубине взрыва. Из сравнения t_* с t_1 и t_2 следует вывод, что выражение для t_1 (и T_1) вполне реально. выражение для t_2 (и T_2) использовать нецелесообразно.

Как отмечалось выше, в модели цилиндрического слоя внешний радиус слоя не определен. Эта неопределенность может быть разрешена на основе экспериментальных данных по периоду пульсации полости, полагая $T_3=t_*$, для заряда с известным R_*. Из (10) несложно найти

$$\ln(r_0/R_0) = p_\infty \rho^{-1} t_*^2 10^{-6} (270 R_*)^{-2}, \qquad (12)$$

где t_* — экспериментальное значение периода первой пульсации цилиндрической полости с продуктами детонации для случая взрыва заряда радиусом R_* (в см), $\rho=1$ г/см^3, $p_\infty=10^6$ г/(см$\cdot$с^2).

Полученные из (12) значения $\ln(r_0/R_0)$ представлены в таблице. Оказывается, что они колеблются около 2: среднее значение всех рассчитанных величин $\ln(r_0/R_0)$ равно 2,054, среднее значение по данным для глубины взрыва $h=2{,}1$ м составляет 2,02. Отсюда следует, что пульсация цилиндрической полости затрагивает слой жидкости с максимальным радиусом около $10^3\,R_*$.

Отметим, что полученное на основе экспериментальных результатов независимо от других моделей значение $\ln(r_0/R_0)$ приводит третье уравнение в (9) к первому, что, по-видимому, еще раз подтверждает реальность модели Кирквуда—Бете и приближения Рича—Гиннела [5].

В заключение заметим, что согласно первой модели выражение для потенциала имеет вид $\varphi=r^{1/2}\cdot\Phi(t)$. Значение $\Phi(t)$ найдется из кинематического условия $dR/dt=-\partial\varphi/\partial r|_{r=R}$ и окончательно $\varphi=2R^{3/2}\cdot dR/dt\times$ $\times r^{-1/2}$. Кинетическая энергия жидкости в этом случае определяется выражением $E=-\rho/2\cdot\int\int\varphi\cdot\partial\varphi/\partial n\cdot dS=2\pi\rho R^2\cdot(dR/dt)^2$ (в точной постановке имеем $E=\pi\rho R^2(dR/dt)^2\ln(r/R)$). Закон сохранения энергии для пульсирующей цилиндрической полости запишется как условие равенства $E+V+\Pi=E_0+V_0$, где E, V — текущие кинетическая энергия жидкости и потенциальная энергия газа внутри полости, Π — работа против сил внешнего давления, E_0, V_0 — начальные значения энергий E и V (все — на единицу длины). При $E_0=0$ закон сохранения энергии в случае цилиндрической симметрии для идеальной несжимаемой жидкости при принятой выше замене переменных имеет в общем случае вид

$$2y^2(dy/d\tau)^2+P(y^{2-2\gamma_1}-1)/(\gamma_1-1)=1-y^2,$$

где P — начальное давление в полости, отнесенное к p_∞. В случае пустой полости имеем

$$2y^2(dy/d\tau)^2=1-y^2.$$

Отсюда следует простое решение при $dy/d\tau|_{\tau=0}=0$

$$\tau=\sqrt{2(1-y^2)},$$

и выражение для периода пульсации полости с продуктами детонации может быть определено как удвоенное время схлопывания $2\tau_{\max}$, т. е. $T=2\sqrt{2}\simeq 2{,}83$, что практически соответствует выражению для T_1 (10).

Институт гидродинамики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
14/XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Кедринский. ФГВ, 1972, 8, 1.
2. К. А. Наугольных, Н. А. Рой. Электрический взрыв в воде. М., «Наука», 1971.
3. В. К. Кедринский.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 8. Новосибирск, изд. ИГ СО АН СССР, 1971.
4. В. М. Кузнецов.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 14. Новосибирск, изд ИГ СО АН СССР, 1973.
5. Р. Коул. Подводные взрывы. М., ИЛ, 1950.