

УДК 536.3+536.42

Радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной среде с фазовым переходом на границах разной поглотительной способности*

Н.А. Рубцов, С.Д. Слепцов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: rubtsov@itp.nsc.ru

Проведено численное исследование однофазной задачи Стефана в слое полупрозрачной среды с различными степенями черноты на правой, движущейся границе. Показано влияние оптических свойств облучаемой поверхности на формирование полей температур и плотностей потока излучения.

Ключевые слова: радиационно-кондуктивный теплообмен, фазовый переход первого рода, задача Стефана, плотность результирующего радиационного потока, коэффициенты отражения, пропускания, поглощения, степень черноты.

ВВЕДЕНИЕ

Однофазная задача Стефана в слое полупрозрачной среды моделирует сложные процессы нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачных футеровках стекловаренных печей и теплозащитных полупрозрачных для теплового излучения покрытиях технических устройств в процессе их оплавления (кристаллизации) и последующего уноса (подвода) при взаимодействии с окружающей средой (абляция–конденсация).

Математическая модель задачи сводится к уравнению радиационно-кондуктивного теплообмена в исследуемой полупрозрачной фазе с условием Стефана на границе фаз. В классическом решении однофазной задачи Стефана предполагается, что тепловой поток со стороны фазы с постоянной температурой равен нулю [1]. В практических задачах граничные условия задачи совпадают с условием Стефана, содержащим результирующий поток тепловой энергии (радиационный, кондуктивный и конвективный), отличный от нуля и меняющийся в процессе перемещения границы фаз. При этом указанная граница предполагается бесконечно тонкой и высокотеплопроводной. Тем самым реальная однофазная задача занимает промежуточное положение между одно- и двухфазной классическими задачами Стефана [2].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-08-00527-а).

ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ

В работе исследуется нагрев и последующее плавление бесконечного плоскопараллельного образца из полупрозрачной среды с коэффициентом объемного поглощения излучения α и теплопроводностью λ . Границы плоского образца частично поглощают, отражают и пропускают излучение таким образом, что $A_i + R_i + D_i = 1$, $i = 1, 2$, где A_i , R_i , D_i — значения полусферических коэффициентов поглощения, отражения и пропускания соответственно. При этом предполагается справедливость закона Кирхгофа: $A_i = \varepsilon_i$, где ε_i — степень черноты границ.

Решение краевой задачи включает в себя два этапа. Первый этап сводится к рассмотрению нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в процессе нагрева серого полупрозрачного образца с плоскопараллельными границами излучением и конвекцией. На втором этапе, при достижении правой границей образца температуры плавления, $T(L(t), t) = T_f$, рассматривается непосредственно задача Стефана. Образующаяся при этом на границе жидкая фаза сублимируется и уносится конвективным способом. Положение границы раздела фаз $L(t)$ определяется из решения краевой задачи, которое сводится к определению полей температур и плотностей потоков в слое твердой фазы, переменной от $x = 0$ до $x = L(t)$ толщины (рис. 1).

Таким образом, аблируемая поверхность, являясь фронтом фазового перехода, перемещается и, следовательно, температурное поле в слое оказывается функционалом времени и координаты, зависящей от времени, $T = T(x(t), t)$. Учитывая, что при этом $\partial T(x(t), t)/\partial t = \partial T(x(t), t)/\partial t + (\partial T(x(t), t)/\partial x)(\partial x(t)/\partial t)$, уравнение сохранения энергии принимает вид

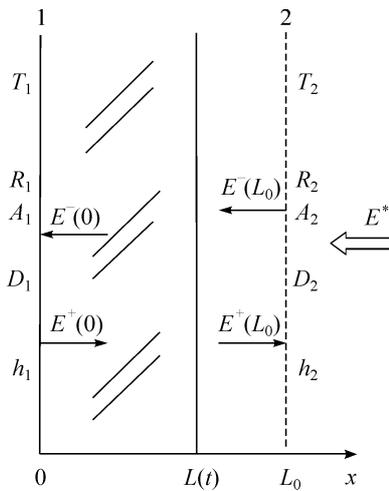
$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = c\rho \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - E \right). \quad (1)$$

Граничные условия уравнения энергии (1) в общем случае для произвольного момента времени $t \geq 0$ записываются следующим образом:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\delta} + h_1 (T - T_1) \Big|_{x-\delta} + |E_1| = 0, \quad x = 0, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x-\delta} + h_2 (T_2 - T) \Big|_{x+\delta} - |E_2| = \rho\gamma \frac{\partial L}{\partial t},$$

$$x = L(t).$$



Здесь $E = E(x, t)$ — плотность потока результирующего излучения в сечении x в момент времени t ; $E_1 = E_1(0, t)$, $E_2 = E_2(L_0(L(t)), t)$ — плотность потоков результирующего излучения на границе 1 ($x=0$) и 2 ($x=L_0, L(t)$) в момент времени $t \geq 0$; $|E_i| = E_i(x-\delta) - E_i(x+\delta)$, $i = 1, 2$ — перепад значений плотностей потоков результирующего излучения на границах сопряжения слой-среда, $x \pm \delta$ — координата,

Рис. 1. Геометрическая схема задачи.

бесконечно близко прилегающая к координате x , h_i — коэффициенты теплообмена с внешней средой, T_i — температура окружающей плоский слой среды, γ — скрытая теплота плавления, ρ_f — плотность при температуре фазового перехода T_f , индексы $i = 1, 2$ — соответствуют левой и правой средам (границам слоя-образца).

Радиационная составляющая $|E_i|$ граничных условий (2) учитывает процессы поглощения и собственного излучения границ образца, а потому:

$$[E_1] = A_1 [E^-(x+\delta) + \sigma_0 T_1^4] - \varepsilon_1 (1+n^2) \sigma_0 T^4(x, t), \quad x=0, \quad (3)$$

$$[E_2] = A_2 [E^+(x-\delta) + E^*] - \varepsilon_2 (1+n^2) \sigma_0 T^4(x, t), \quad x=L(t),$$

где n — показатель преломления среды.

Предполагается, что наличие фазового перехода на границе 2 не сказывается на оптических свойствах, а потому ε_i и D_i полагаем неизменными, а во втором уравнении системы (3) следует иметь в виду, что $T(x) \equiv T_f$, $x=L(t)$, $T > 0$. При рассмотрении первого этапа радиационно-кондуктивного нагрева образца во втором уравнении граничных условий (2) $T_f \equiv T(x)$, $x=L_0$, а правая часть этого уравнения зануляется.

Система уравнений (1)–(3) дополняется начальными условиями

$$T(x, 0) = f(x), \quad L(0) = L_0. \quad (4)$$

Радиационные граничные условия, записываемые относительно плотностей потоков эффективного излучения применительно к методу средних потоков, записываются следующим образом [2]:

$$E^+(x+\delta) = D_1 \sigma_0 T_1^4 + \left(1 + \frac{1-R_1}{n^2}\right) E^-(x+\delta), \quad x=0, \quad (5)$$

$$E^-(x-\delta) = \varepsilon_2 n^2 \sigma_0 T^4(x, t) + D_2 E^* + \left[1 - \frac{1-R_2}{n^2} - A_2 \left(\frac{1+n^2}{n^2}\right)\right] E^+(x-\delta), \quad x=L(t).$$

Здесь принято во внимание, что условие $A_i + R_i + D_i = 1$, записываемое для оптических свойств границ при внешнем (со стороны среды) облучении, выполняется и для условий внутреннего облучения границ — $A'_i + R'_i + D'_i = 1$. При этом в условиях квазиравновесного состояния излучающей системы можно полагать $A_i = A'_i$, а между D_i и D'_i использовать связь, вытекающую из условий оптической инвариантности потоков [3]:

$$(1-R'_i)n^2 = (1-R_i)n_0^2, \quad (6)$$

$$(1-R'_1 - A'_2)n^2 = (1-R_2 - A_2)n_0^2, \quad n_0 = 1.$$

Преобразование краевой задачи (1)–(4) к безразмерному виду связано с привлечением безразмерной переменной $\xi = x/L(t)$, впервые использованной в [4]. Такая переменная позволяет фиксировать координату фронта фазового перехода

в границах $0 \leq \xi \leq 1$. Система уравнений (1), (2) и (4), с учетом (3) преобразуется к следующей рассматриваемой краевой задаче:

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \xi \frac{\dot{s}}{s} \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{sN} \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial \theta(0, \eta)}{\partial \xi} + sBi_1 (\theta(0, \eta) - \theta_1) + \frac{s}{N} \left[A_1 \left(\Phi^- + \frac{\theta_1^4}{4} \right) - \varepsilon_1 (1+n^2) \frac{\theta^4(0, \eta)}{4} \right] = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \eta)}{\partial \xi} + sBi_2 (\theta_2 - \theta(1, \eta)) - \frac{s}{N} \left[A_2 (\Phi^+ (1, \eta) + F^*) - \varepsilon_2 (1+n^2) \frac{\theta^4(1, \eta)}{4} \right] = \frac{\dot{s}s}{St}, \quad (9)$$

$$\theta(\xi, 0) = f(\xi), \quad s(0) = 1. \quad (10)$$

Здесь $\theta = T/T_r$, $\xi = x/L(t)$, $\eta = \lambda t / (\rho c_p L_0^2)$, $N = \lambda / (4\sigma_0 T_r^3 L_0)$ — радиационно-кондуктивный параметр, $\Phi^\pm(\xi, \eta) = E^\pm(x, t) / (4\sigma_0 T_r^4)$ — безразмерная плотность потока излучения, $F^* = E^* / (4\sigma_0 T_r^4)$ — безразмерная плотность потока излучения, падающего на пластину с правой стороны, $Bi_i = h_i L_0 / \lambda$ — число Био, $\dot{s} = ds/d\eta$ — скорость распространения фронта плавления, $St = T_r c_p / \gamma$ — число Стефана, $T_r = T_f$ — определяющая температура, равная температуре фазового перехода, σ_0 — постоянная Стефана–Больцмана.

Входящие в уравнения (7)–(9) безразмерные плотности потоков излучения Φ^\pm , $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$, определяются из решения уравнения переноса излучения в плоском слое излучающей и поглощающей сред с известным распределением температур по слою.

Широкие возможности, в смысле простоты решения и эффективности получения результатов, представляет модифицированный метод средних потоков [5]. В рамках этого метода уравнение переноса излучения сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений для плоского слоя полупрозрачной среды. Дифференциальный аналог уравнения переноса для полусферических потоков Φ^\pm записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta)) + (m^+(\tau) \Phi^+(\tau, \eta) - m^-(\tau) \Phi^-(\tau, \eta)) &= n^2 \Phi_0, \\ \frac{d}{d\tau} (m^+(\tau) l^+(\tau) \Phi^+(\tau, \eta) - m^-(\tau) l^-(\tau) \Phi^-(\tau, \eta)) + (\Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta)) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные условия для системы уравнений (11) учитывают диффузный характер процессов отражения, пропускания и частичного поглощения (излучения) поверхностными слоями границ и записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi^+(0, \eta) &= A_1 n^2 \frac{\theta^4(0, \eta)}{4} + D_1 \frac{\theta_1^4}{4} + \left(1 - \frac{1-R_1}{n^2} \right) \Phi^-(0, \eta), \\ \Phi^-(1, \eta) &= A_2 n^2 \frac{\theta^4(1, \eta)}{4} + D_2 F^* + \left[1 - \frac{1-R_2}{n^2} - A_2 \left(\frac{1+n^2}{n^2} \right) \right] \Phi^+(1, \eta). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\Phi^{\pm}(\tau, \eta) = \frac{2\pi \int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I(\tau, \mu) \mu d\mu}{4\sigma_0 T_r^4}, \quad m^{\pm}(\tau) = \frac{\int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I(\tau, \mu) d\mu}{\int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I(\tau, \mu) \mu d\mu}, \quad l^{\pm}(\tau) = \frac{\int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu}{\int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I(\tau, \mu) \mu d\mu},$$

I — интенсивность излучения, μ — косинус угла между направлением распространения излучения и осью x , $\tau = \alpha L(t)$ — оптическая толщина слоя в момент времени t . Значения коэффициентов m^{\pm} , $\tau = \alpha L(t)$, l^{\pm} определяются из рекуррентного соотношения, полученного с помощью формального решения уравнения переноса излучения [5]. Значения A_i задаются, а величина R_i вычисляется по формуле Уолша–Данкла [6] по заданному коэффициенту преломления материала образца n , находящегося в непреломляющей среде.

Решения краевой задачи сводятся к определению температуры $\theta(\xi, \eta)$ и плотностей потоков результирующего излучения $\Phi(\xi, \eta)$ в области $G = \{0 \leq \xi \leq 1, 0; 0 \leq \eta \leq \eta_1\}$, представляющей собой плоский слой твердой фазы. Положение фронта фазового перехода $s(\eta)$ меняется от 1 до 0. Краевая задача (7)–(10) решается конечно-разностным методом, нелинейная система неявных разностных уравнений — методом прогонки и итераций. При решении радиационной задачи используются итерации, на каждом шаге которых краевая задача (11)–(12) решается методом матричной факторизации. Быстрая сходимость такого метода решения позволяет получать результаты с высокой степенью точности.

АНАЛИЗ

В процессе численного моделирования определялись температурное поле и поле плотности потока излучения в полупрозрачной серой среде. Теплофизические свойства материала образца близки к свойствам стекла: плотность — $\rho = 2000$ кг/м³, коэффициент теплопроводности — $\lambda = 1$ Вт/(м·К), температуропроводность — $a = 10^{-6}$ м²/с, температура плавления — $T_f = 1000$ К, скрытая теплота фазового перехода — $T_f = 1000$ кДж/кг, показатель преломления материала — $n = 1,5$, объемный коэффициент поглощения излучения в материале — $\alpha = 10$ м⁻¹. Начальная толщина образца $L_0 = 0,1$ м, начальная оптическая толщина $\tau_0 = \alpha L_0 = 1$ отражает оптимальный характер объемного взаимодействия излучения с материалом образца. Падающий поток $E^* = 2,0 \cdot 10^5$ Вт, температура среды, окружающая левую границу, составляет $T_1 = 300$ К, температура газа, окружающая правую сторону, $T_2 = 900$ К. Коэффициенты теплоотдачи на границах на первом этапе процесса $h_{1,2} = 8$ Вт/(м²·К), что соответствует естественной конвекции на вертикальной стене. На втором этапе на правой границе полагаем $h_2 = 1$ Вт/(м²·К), т. к. абляция оттесняет пограничный слой, поэтому свободная конвекция переходит в теплопроводность, которая моделируется формулой Ньютона с малыми значениями коэффициента теплоотдачи.

Коэффициенты отражения поверхностей на обеих границах $R_{1,2} = 0,1$. При моделировании задачи радиационно-кондуктивного теплообмена степень черноты границ полагаем равным $\epsilon_{1,2} = 0$, при переходе на задачу Стефана значение степени

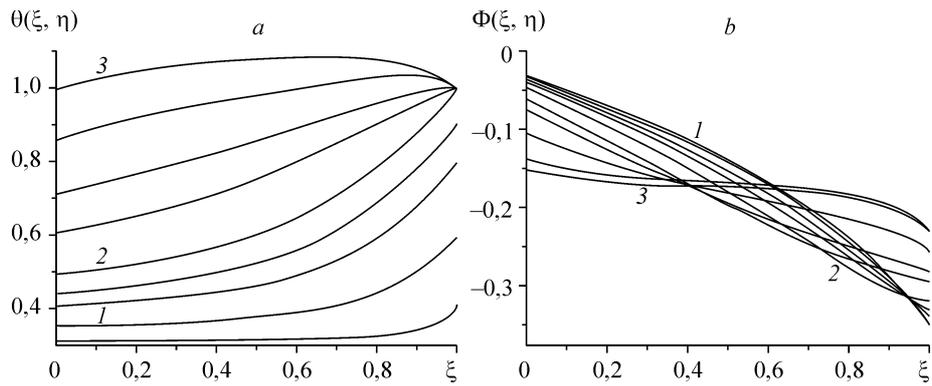


Рис. 2. Температурное поле (а) и поле плотностей потоков результирующего излучения (b) (степень черноты $\varepsilon_2 = 0,01$).

Начало теплообмена (1), начало (2) и конец (3) фазового перехода.

черноты на правой облучаемой поверхности меняем в пределах $\varepsilon_2 = [0,01 \div 0,1]$. Такой подход позволяет смоделировать ситуацию, при которой поверхностные слои материалов, претерпевающих фазовые переходы 1-го рода, меняют свои оптические свойства.

На рис. 2 представлена кинетика полей температур и плотностей потоков результирующего излучения в слое при слабом поглощении ($\varepsilon_2 = 0,01$) правой подвижной границы.

Температурное поле в процессе нагрева оказывается монотонным (см. рис. 2, а), при этом правая граница слоя достигает температуры фазового перехода в условиях неравномерного прогрева. По излучению пластина оказывается теплоотдающей по всей ее толщине с максимальным значением на правой границе (см. рис. 2, б).

На втором этапе в начальный момент энергия тратится на выравнивание температуры по слою и последующему перегреву вначале в области правой границы, а затем и по всему слою (см. рис. 3, а). Максимального значения перегрев достигает при значении безразмерной толщины слоя $s = 0,9$ (см. рис. 3, а, кривая 2), когда фиксируется начало движения фронта фазового перехода. Поле значений

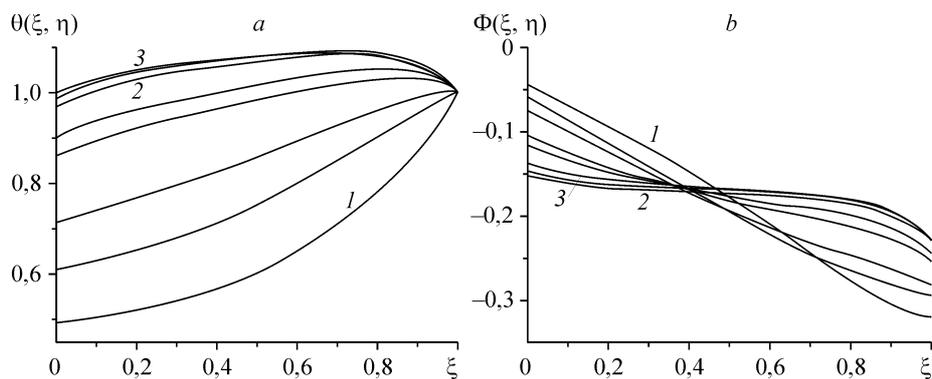


Рис. 3. Температурное поле (а) и поле плотностей потоков результирующего излучения (b) при фазовом переходе (степень черноты $\varepsilon_2 = 0,01$).

а — $S = 1,0$ (1), $0,9$ (2), $0,68$ (3), начало фазового перехода (1), начало движения фронта (2), конец фазового перехода (3), б — начало теплообмена (1), начало (2) и конец (3) фазового перехода.

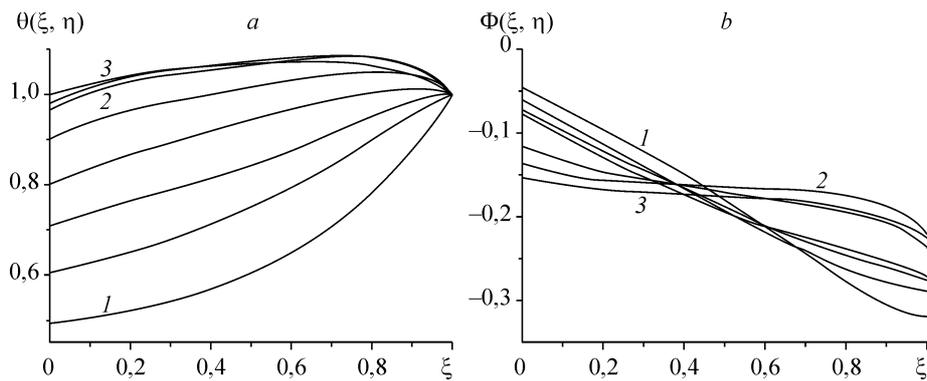


Рис. 4. Температурное поле (а) и поле плотностей потоков результирующего излучения (b) при фазовом переходе (степень черноты $\varepsilon_2 = 0,025$).
 $S = 1$ (1), 0,9 (2), 0,56 (3), начало фазового перехода (1), начало движения фронта (2), конец фазового перехода (3).

плотностей потоков результирующего излучения заметно выравнивается, а процесс фазового перехода завершается при $s = 0,68$.

Характер распределения температур и плотностей результирующего излучения по толщине пластины сохраняется при увеличении поглощательной (излучательной) способности правой границы, претерпевающей фазовый переход до значений $\varepsilon_2 = 0,025, 0,05$ (рис. 4, 5). При этом фазовый переход завершается, соответственно, при $s = 0,56$ (см. рис. 4) и $0,31$ (см. рис. 5).

По достижении поглощательной (излучательной) способности правой границы значения $\varepsilon_2 = 0,1$ характер полей температур заметно меняется (рис. 6, а, б). При этом уменьшается перегрев в области правой границы слоя (см. рис. 5, с). Меняется термическое состояние необогреваемой границы. Если ранее при $\varepsilon_2 = 0,01 \div 0,05$ температура левой границы слоя достигала предельного значения $\theta(0, \eta) \sim 1,0$, при котором слой до конца не проплавляется, то в рассматриваемом случае температура перераспределяется в сторону большего перегрева области, примыкающей к фронту фазового перехода, значения $\theta(0, \eta) < 1,0$, а сам фазовый переход заканчивается при значении $s = 0,26$.

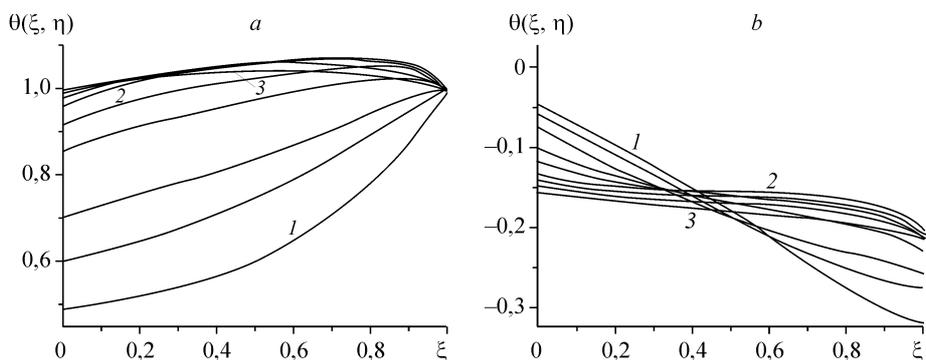


Рис. 5. Температурное поле (а) и поле плотностей потоков результирующего излучения (b) при фазовом переходе (степень черноты $\varepsilon_2 = 0,05$).
 $S = 1,0$ (1), 0,9 (2), 0,31 (3), начало фазового перехода (1), начало движения фронта плавления (2), конец фазового перехода (3).

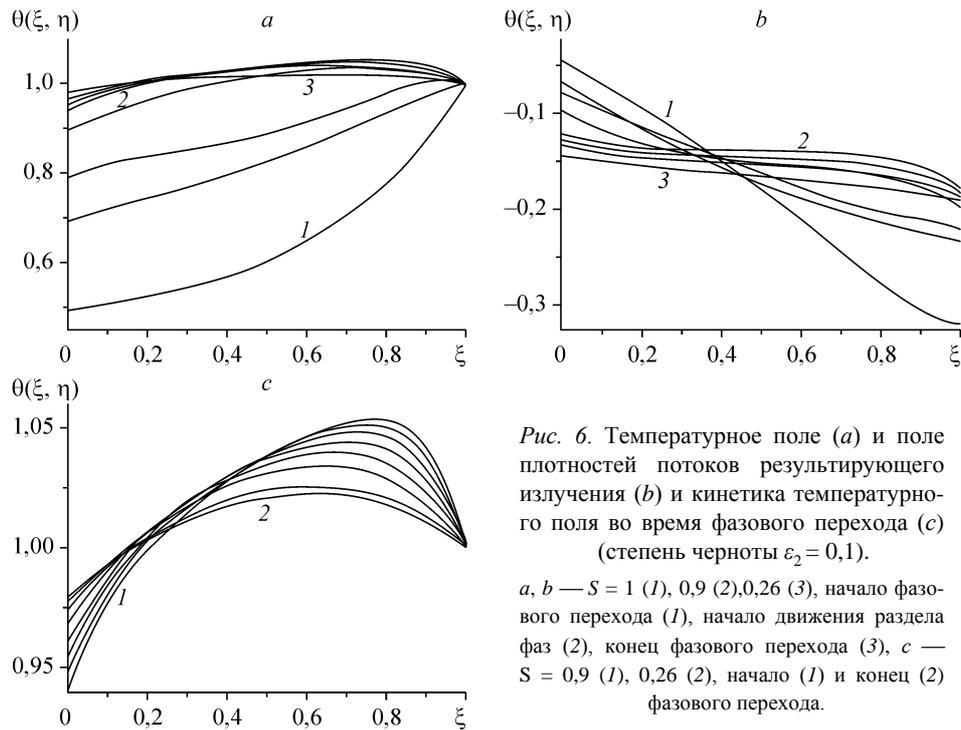


Рис. 6. Температурное поле (а) и поле плотностей потоков результирующего излучения (б) и кинетика температурного поля во время фазового перехода (с) (степень черноты $\varepsilon_2 = 0,1$).
 а, б — $S = 1$ (1), 0,9 (2), 0,26 (3), начало фазового перехода (1), начало движения раздела фаз (2), конец фазового перехода (3), с — $S = 0,9$ (1), 0,26 (2), начало (1) и конец (2) фазового перехода.

Заметным образом меняется динамика перемещения фронта раздела фаз. С ростом поглощательной (излучательной) способности правой границы процессы фазового перехода существенно замедляются (рис. 7).

ВЫВОДЫ

Результаты численных экспериментов свидетельствуют о существенном влиянии на процесс плавления даже незначительных отклонений степени черноты движущейся поверхности ($\varepsilon_2 = 0,01 \div 0,1$), претерпевающей фазовый переход, от своего первоначального значения $\varepsilon_2 \equiv 0$, принимаемого в процессе радиационно-кондуктивного нагрева пластины. Указанное обстоятельство является принципиально важным при построении реальной модели фазового перехода, учитывающей структурные изменения материала во фронте фазового превращения. В условиях искусственного зачернения движущейся границы полупрозрачная пластина может рассматриваться как эффективная тепловая защита.

Анализ результатов расчета показал, что по мере роста степени черноты движущейся границы пластины наблюдается сильный перегрев твердой фазы со стороны падающего потока, процесс плавления отодвигается в сторону уменьшения толщины остающегося слоя. Последнее свидетельствует о необходимости учета динамики оптических свойств границ пластины [7] на заключительном этапе ее оплавления.

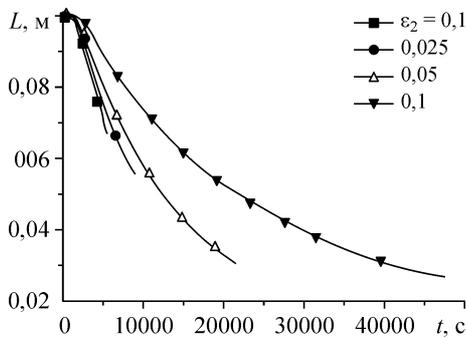


Рис. 7. Динамика фронта плавления при разных значениях степени черноты ε_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 39 с.
2. Рубцов Н.А. К решению однофазной задачи Стефана в слое полупрозрачного материала // Теплофизика и аэромеханика, 2005. Т. 12, № 3. С. 471–482.
3. Рубцов Н.А. К определению граничных условий радиационного теплообмена на плоской поверхности раздела двух сред // Теплофизика и аэромеханика. 2003. Т. 10, № 1. С. 87–102.
4. Landau H.G. Heat conduction in a melting solid // Quart. Appl. Math. 1950. Vol. 8. P. 81–94.
5. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А. Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. 197 с.
6. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 616 с.
7. Рубцов Н. А., Слепцов С. Д. Анализ свойств теплового излучения осесимметричных полупрозрачных систем с проницаемыми границами // Теплофизика и аэромеханика, 2008. Т. 15, № 4. С. 711–719.

Статья поступила в редакцию 17 апреля 2009 г.