

О ДЕЙСТВИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОГРУЖЕННЫЙ В МАГНИТНУЮ ЖИДКОСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР

УДК 537.84

А. Ф. Пшеничников, А. В. Лебедев

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614061 Пермь

1. Введение. Известно [1–5], что в магнитной жидкости, находящейся в переменном магнитном поле, возникают касательные напряжения, связанные с конечным временем релаксации намагниченности и ее пространственной неоднородностью. На границе жидкости намагниченность испытывает скачок, и касательные напряжения достигают наибольших значений. Под действием этих напряжений свободная граница приходит в движение, увлекая за собой прилежащие слои жидкости и формируя циркуляционное гидродинамическое течение (ротационный эффект). Несмотря на то что этот эффект наблюдался экспериментально еще в 1967 г. [6], количественное описание его остается неудовлетворительным.

Первые попытки расчета магнитных касательных напряжений на границе изотермической жидкости были предприняты в [1, 2] для течения Куэтта в зазоре между коаксиальными цилиндрами и в [7] для плоского слоя. Расчет сделан в приближении однородного магнитного поля. Это ограничивает область применимости решения слабомagnetными разбавленными растворами, а наличие микроскопических параметров, относящихся к отдельным коллоидным частицам, позволяет оценить скорость течения только по порядку величины. В [3, 5] задача решена с учетом пространственной неоднородности намагниченности и поля на основе уравнений феррогидродинамики из [8–10], а микроскопические параметры были исключены. Такой подход позволил более корректно сравнить расчетные и экспериментальные данные, но причины обнаруженного при этом 2–3-кратного расхождения между теорией и экспериментом оставались неясными.

В данной работе анализируются причины этих расхождений, приводятся более точное решение задачи с коаксиальными цилиндрами и новые экспериментальные данные. Выбранная геометрия задачи удобна как для теоретического анализа, так и для экспериментальных исследований. В частности, опыты со свободным и упругозакрепленным внутренним цилиндром позволяют определить скорость течения и оценить влияние подвижной границы на гидродинамику магнитной жидкости.

2. Постановка задачи. Пусть диэлектрическая магнитная жидкость заполняет зазор между вертикальными коаксиальными цилиндрами, длина которых велика по сравнению с их диаметрами. Намагниченность обоих цилиндров считается пренебрежимо малой по сравнению с намагниченностью жидкости. Внешнее магнитное поле однородно вдали от цилиндров, ориентировано перпендикулярно их оси и вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω . Задача состоит в отыскании момента сил, действующих на внутренний цилиндр, а также амплитуды и профиля гидродинамического течения. Основой для решения являются уравнения феррогидродинамики [8–10], включающие уравнение движения, записанное с учетом неравновесности намагниченности, уравнения Максвелла для магнитного поля и релаксационное уравнение для намагниченности.

В данной работе ограничимся случаем слабых полей. Это позволяет линеаризовать релаксационное уравнение, пренебречь внутренними источниками тепла, связанными с диссипацией энергии вращающегося поля, а течение жидкости считать медленным и стационарным. Систему уравнений феррогидродинамики в этих условиях запишем в виде

$$-\nabla p + \eta \Delta v + \mu_0 \left[(\mathbf{M} \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] = 0; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}); \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \chi_0 \mathbf{H}); \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость течения; $\mathbf{M}$ — намагниченность жидкости; $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ — напряженность и индукция поля; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; χ_0 — равновесная восприимчивость; τ — время релаксации магнитного момента частицы. Уравнение релаксации (2.3) записано с учетом того, что завихренность течения мала по сравнению с частотой вращения поля. Поэтому в правой части уравнения (2.3) отсутствует член, содержащий $\operatorname{rot} \mathbf{v}$. Условие слабой завихренности хорошо выполняется на практике и позволяет магнитную часть задачи решить независимо от гидродинамической.

Граничные условия для скорости стандартные. В цилиндрических координатах r, φ они имеют вид

$$v = \Omega R_1 \quad \text{при} \quad r = R_1, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2 \quad (2.5)$$

(R_1 и R_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно, Ω — угловая скорость вращения внутреннего цилиндра). Внешний цилиндр неподвижен. Согласно [8], тангенциальные напряжения в магнитной жидкости определяются тензором

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + H_i B_k + \frac{\mu_0}{2} (M_i H_k - M_k H_i).$$

Это выражение, а также непрерывность нормальной компоненты индукции и тангенциальной компоненты напряженности поля на границе жидкости позволяют записать граничное условие для касательных напряжений (при $r = R_1, R_2$) в виде

$$\sigma'_{ik} = \frac{\mu_0}{2} (M_i H_k - M_k H_i) + \eta \left(\frac{\partial n_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

(σ'_{ik} — механические напряжения в стенке цилиндра). В частности, если внутренний цилиндр вращается свободно ($\sigma'_{ik} = 0$), условие (2.6) определяет амплитуду гидродинамического течения.

3. Решение задачи и анализ результатов. Отметим вначале важную особенность приближения слабого поля: объемные магнитные силы в однородной жидкости имеют градиентный вид [3, 9]. Действительно, используя уравнения Максвелла (2.2) и известные векторные тождества [11], находим

$$\mathbf{F} = \mu_0 \left[(\mathbf{M} \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] = \frac{\mu_0}{2} [\nabla (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{M} + (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \operatorname{div} \mathbf{H}].$$

С другой стороны, из (2.2) и (2.3) при однородных χ_0 и τ (жидкость изотермична) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{M} = 0$. Таким образом, объемные магнитные силы приводят лишь к

перенормировке давления. Источником стационарного движения могут быть только касательные магнитные напряжения на подвижной границе.

С учетом сделанного замечания, уравнений (2.1), (2.4) и условия прилипания (2.5) получим простой куэттовский профиль течения

$$v(r) = \frac{\Omega R_1^2 (R_2^2 - r^2)}{r(R_2^2 - R_1^2)}, \quad (3.1)$$

где $v(r)$ — азимутальная компонента скорости; Ω определяется из условия (2.6). Тем самым вся задача сводится к расчету полей $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}$ внутри жидкости.

В случае длинных коаксиальных цилиндров уравнения Максвелла (2.2) и уравнение релаксации (2.3) допускают простое решение. В системе координат, вращающейся вместе с полем, оно имеет вид

$$H_r = C_1 \cos \varphi - \frac{C_2}{r^2} \cos(\varphi + \beta), \quad H_\varphi = -C_1 \sin \varphi - \frac{C_2}{r^2} \sin(\varphi + \beta), \quad (3.2)$$

$$M_r = \chi \left[C_1 \cos(\varphi + \delta) - \frac{C_2}{r^2} \cos(\varphi + \beta + \delta) \right], \quad M_\varphi = -\chi \left[C_1 \sin(\varphi + \delta) + \frac{C_2}{r^2} \sin(\varphi + \beta + \delta) \right].$$

Здесь $\tan \delta = \chi_2/\chi_1$; χ — модуль динамической восприимчивости, а действительная χ_1 и мнимая χ_2 части динамической восприимчивости описываются формулами Дебая:

$$\chi_1 = \chi_0/(1 + \omega^2 \tau^2), \quad \chi_2 = \chi_0 \omega \tau/(1 + \omega^2 \tau^2).$$

Константы β , C_1 и C_2 находятся из известных граничных условий для напряженности $\mathbf{H}$ и индукции $\mathbf{B}$. Опуская для краткости громоздкие промежуточные вычисления, запишем результат:

$$\frac{C_1}{\sqrt{4 + 4\chi_1 + \chi^2}} = \frac{C_2}{\chi R_1^2} = \frac{2H_0}{4 + 4\chi_1 + \chi^2 - \chi^2 R_1^2/R_2^2}, \quad \tan \beta = 2\chi_2/(\chi^2 + 2\chi_1). \quad (3.3)$$

Решение для внешней области имеет структуру, аналогичную (3.2), но с другими константами и фазами. Поле во внутреннем цилиндре однородно.

Здесь уместно отметить, что реальные ферроколлоиды существенно полидисперсны и для каждой фракции частиц характерно свое время релаксации магнитного момента. Спектр времен обычно очень широкий (несколько порядков [12]), поэтому для каждой фракции частиц необходимо писать и свое релаксационное уравнение. Однако, проделав такую операцию и просуммировав вклады различных фракций в намагниченность, снова получим уравнения (3.2) с тем только отличием, что χ_1 и χ_2 не описываются уже уравнениями Дебая, и для их вычисления необходимо задать функцию распределения по временам релаксации. Этот факт, однако, не приводит к каким-либо затруднениям, так как техника измерения динамической восприимчивости хорошо отработана, и производить расчет χ_1 и χ_2 нет необходимости.

Подстановка (3.1)–(3.3) в (2.6) при $\sigma'_{ik} = 0$ дает

$$\Omega = K(1 - R_1^2/R_2^2)/4\eta; \quad (3.4)$$

$$K = -\frac{16\mu_0\chi_2(1 + \chi_1)H_0^2}{(4 + 4\chi_1 + \chi^2 - \chi^2 R_1^2/R_2^2)^2}. \quad (3.5)$$

Здесь K — удельный (приходящийся на единицу объема) момент магнитных сил, действующих на внутренний цилиндр. Знак минус в правой части (3.5) означает, что этот момент

направлен против вращения внешнего поля. В ту же сторону (против поля) вращается и внутренний цилиндр.

В разбавленных растворах с малой концентрацией магнитной фазы взаимодействия между коллоидными частицами несущественны, и равновесная восприимчивость χ_0 растет с концентрацией n частиц по линейному закону. В концентрированных же растворах зависимость $\chi_0(n)$ близка к параболической [12]. Быстрый рост восприимчивости с концентрацией частиц приводит к тому, что зависимость $K(n)$ оказывается немонотонной (формула (3.5)). При малых концентрациях вращающий момент увеличивается за счет роста χ_2 , а при больших концентрациях уменьшается вследствие быстрого увеличения знаменателя. Главную роль при этом играет размагничивающее поле образца. Результаты [1, 2, 9] получены в пренебрежении размагничивающими полями и совпадают с нашими в пределе $\chi \rightarrow 0$. В [3, 5] размагничивающее поле образца учтено, однако результаты для K отличаются от (3.5) членами, квадратичными по χ . В случае разбавленных растворов ($\chi < 1$) соответствующая добавка невелика, но при высокой концентрации магнитной фазы она может привести к 2-5-кратному расхождению в результатах. Что и наблюдается.

Главная причина расхождения результатов данной работы и [3, 5] заключена, по нашему мнению, в исходных уравнениях и допущениях. При решении задачи в [3, 5] релаксационное уравнение было опущено и заменено предположением о постоянстве угла между векторами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}$. Это предположение хорошо согласуется с уравнением (2.3), если магнитное поле поляризовано по кругу, т. е. для образцов в виде сплошного цилиндра или шара. Однако для магнитной жидкости в зазоре между коаксиальными цилиндрами характерна уже эллиптическая поляризация магнитного поля, при которой приближение жесткой связи между $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}$ и уравнение релаксации (2.3) приводят к различным результатам.

4. Экспериментальные результаты и их сравнение с теоретическими. Опыты проводились со стеклянными цилиндрами по методике, описанной в [3]. Диаметр внешнего цилиндра 33 мм, высота 200 мм. Внутренний цилиндр имел форму ареометра. Он находился в жидкости во взвешенном состоянии так, что на поверхность выступал только тонкий капилляр с нанесенными на него метками. Диаметр цилиндра 4,5 мм, а высота $h = 60$ мм. При измерении момента магнитных сил внутренний цилиндр подвешивался на тонкой упругой ленте из бериллиевой бронзы. В качестве рабочей жидкости использовались коллоидные растворы магнетита в жидких углеводородах, приготовленные в лабораторных условиях стандартным методом химического осаждения. Вязкость растворов измерялась на ротационном вискозиметре типа «Реотест-2». Измерение динамической восприимчивости проводилось мостом взаимной индуктивности в слабом (200 А/м) плоскополяризованном магнитном поле по методике [13] и на частотах, которые использовались в опытах с вращающимся полем. Последнее создавалось с помощью скрещенных катушек Гельмгольца. Напряженность вращающегося поля в различных опытах варьировалась от 0 до 5 кА/м, а частота вращения — от 120 до 1000 Гц.

Для дополнительной проверки качества установки и оценки погрешности измерений проведены контрольные опыты по измерению моментов сил, действующих на образец магнитной жидкости в виде сплошного цилиндра. Магнитная жидкость при этом заливалась в круглую пробирку диаметром $d = 3,9$ мм и высотой $h = 61$ мм. Момент сил, действующий на неподвижный цилиндр, может быть выражен из (2.6), (3.2), (3.3) при $R_1 = 0$ и

H_0 , кА/м	K_0 , Н/м ² (эксперимент)	K_0 , Н/м ² (расчет)
0,31	0,0044	0,0041
0,61	0,017	0,016
0,92	0,040	0,037
1,23	0,071	0,065
1,54	0,108	0,102
1,84	0,155	0,147
2,15	0,211	0,200
2,46	0,278	0,261
2,76	0,347	0,330
3,07	0,436	0,407
3,84	0,674	0,636
4,61	0,960	0,916

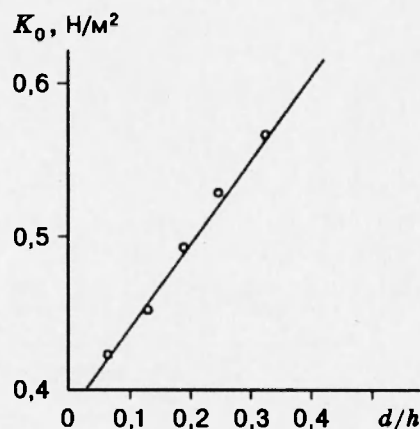


Рис. 1

$v = 0$:

$$K_0 = \frac{4\mu_0\chi_2 H_0^2}{4 + 4\chi_1 + \chi^2} = \mu_0\chi_2 H_1^2 \quad (4.1)$$

(H_1 — напряженность поля внутри жидкости). За счет размагничивающего фактора величина H_1 была, как правило, в несколько раз меньше, чем внешнее поле H_0 .

Типичные результаты контрольных опытов приведены в таблице. Опыты проведены на частоте вращения 400 Гц при $\chi_1 = 5,13$ и $\chi_2 = 0,437$ (высококонцентрированная жидкость) и различной величине поля. Как и следовало ожидать, момент магнитных сил растет с напряженностью поля по квадратичному закону, однако рассчитанное по (4.1) значение K_0 меньше экспериментального на $5 \div 8\%$. Главной причиной этого расхождения являются концевые эффекты, не учитываемые в теории. Их относительный вклад имеет, очевидно, порядок d/h и может быть определен более точно в опытах с образцами различной длины.

Результаты таких опытов, полученные в данной работе при $H_1 = 860$ А/м, приведены на рис. 1 (точки). Как видно из рисунка, вращающий момент растет с отношением d/h по закону, близкому к линейному (линия). Значение K_0 , соответствующее пределу $h \rightarrow \infty$, получается экстраполяцией осредненной прямой на ось ординат и на 9% ниже значения, отвечающего $h = 61$ мм. Если теперь ввести соответствующую поправку в экспериментальные данные таблицы, то значения K_0 будут в среднем только на 3% ниже расчетных. Это расхождение следует признать уже несущественным, так как погрешность измерения χ_2 из формулы (4.1) также находится в пределах $3 \div 5\%$.

Результаты опытов с неподвижными коаксиальными цилиндрами и сопоставление с расчетом приведены на рис. 2, где линия отвечает формуле (3.5), а точки — экспериментальным данным. Измеренные в опытах моменты сил, действующие на внутренний цилиндр, превышали расчетные значения в среднем на 8% , но после введения поправок на концевые эффекты расхождение уменьшилось до $3 \div 4\%$. Аналогичные результаты были получены нами на частоте вращения внешнего поля 120, 200 и 1000 Гц. Таким образом, ситуация полностью аналогична той, что наблюдалась в опытах с образцом в виде сплошного цилиндра. Что касается формулы для вращающего момента, полученной в [3, 5] для магнитного поля, поляризованного по кругу, то она дает завышенные в 3 раза резуль-

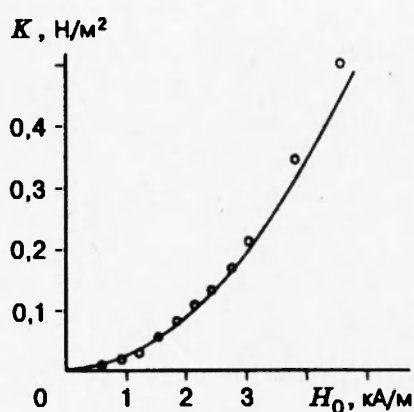


Рис. 2

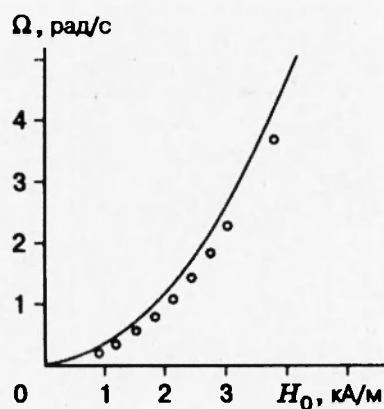


Рис. 3

таты. Соответствие этой формулы экспериментальным данным, отмеченное в одном из опытов [3], оказалось случайным и связано с методической ошибкой, допущенной в [3] при обработке результатов.

Угловая скорость вращения внутреннего цилиндра при закрепленном внешнем приведена на рис. 3 для образца с эффективной вязкостью $\eta = 0,0172 \text{ Па} \cdot \text{с}$ и различной напряженностью внешнего поля. Здесь линия соответствует формуле (3.4), точность которой оказалась существенно ниже, чем точность формулы (3.5) для вращающего момента (точки — экспериментальные данные). Расчетное значение скорости вращения цилиндра на $15 \div 20 \%$ выше экспериментального. Наиболее вероятной причиной этого расхождения, на наш взгляд, является слабая неньютоновость концентрированных магнитных жидкостей. Действительно, их эффективная вязкость на начальном участке реологической кривой может существенно превышать вязкость, измеренную на стандартном вискозиметре [14]. В опытах с коаксиальными цилиндрами реализовалось как раз течение с малыми скоростями сдвига (не более 10 с^{-1}), это на два порядка меньше, чем при вискозиметрических измерениях. Кроме того, с ростом скорости вращения внутреннего цилиндра в наших опытах относительное отклонение расчетного значения Ω от экспериментального монотонно убывает, что тоже можно интерпретировать как следствие уменьшения эффективной вязкости с увеличением скорости сдвига.

Амплитуда внешнего поля H_0 в наших опытах не превышала $4 \div 5 \text{ кА/м}$. Это ограничение связано с тем, что время релаксации, входящее в уравнение (2.3), можно считать постоянным только в слабых полях: параметр Ланжевена ($\xi = \mu_0 m H / kT$, m — магнитный момент однодоменной коллоидной частицы, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура) должен быть мал по сравнению с единицей [8]. При $\xi \geq 1$ линейное уравнение (2.3) необходимо заменить на более общее. Для магнетитовых жидкостей магнитный момент m имеет порядок $10^{-19} \text{ А} \cdot \text{м}^2$, и условие $\xi < 0,1$ дает оценку для максимальной напряженности поля внутри жидкости и границы применимости формул (3.4), (3.5): $H_1 < 1 \text{ кА/м}$. Хотя внешнее поле H_0 может быть при этом в 2–4 раза выше, оно все равно не должно превышать нескольких килоампер на метр. Как видно из таблицы и рис. 2, 3, большинство наших опытов проведено в условиях, которые можно назвать предельно допустимыми в рамках сделанных приближений. Дальнейшее увеличение поля сделало бы сопоставление экспериментальных и теоретических результатов некорректным.

Таким образом, полученные в данной работе результаты показывают, что уравнения феррогидродинамики (2.1)–(2.4) с граничным условием (2.6) могут служить хорошей основой для расчета течений магнитной жидкости в переменных магнитных полях и вполне адекватно описывают поведение реальных ферроколлоидов. В слабом поле трудноопределяемые микроскопические параметры, относящиеся к отдельным коллоидным частицам (параметр Ланжевена и время релаксации магнитного момента), исключаются из рассмотрения. Вращающий момент, действующий на погруженный в магнитную жидкость диэлектрический цилиндр, и амплитуда течения выражаются при этом через мнимую и вещественную части динамической восприимчивости и вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными значениями. Более точное сопоставление экспериментальных и теоретических результатов требует уже больших усилий по разработке новой методики измерения магнитной восприимчивости и по снятию реологической кривой при предельно малых скоростях сдвига и выходит за рамки данной работы. В случае магнитного поля произвольной напряженности необходимо рассматривать нелинейное уравнение релаксации, учитывать возможную непотенциальность объемных магнитных сил, широкий спектр времен релаксаций и их зависимость от поля. Аналитическое решение задачи в такой общей постановке, по-видимому, невозможно.

Авторы выражают благодарность К. И. Морозову за обсуждение результатов. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00408а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Цеберс А. О. Межфазные напряжения в гидродинамике жидкостей с внутренними вращениями // Магнит. гидродинамика. 1975. № 1. С. 79–82.
2. Цеберс А. О. Моментные напряжения и гидродинамика магнитной жидкости в однородных вращающихся магнитных полях // Магнит. гидродинамика. 1978. № 4. С. 9–13.
3. Лебедев А. В., Пшеничников А. Ф. О движении магнитной жидкости во вращающемся магнитном поле // Магнит. гидродинамика. 1991. № 1. С. 7–12.
4. Rosensweig R. E., Popplewell J., Johnston R. J. Magnetic fluid motion in rotating field // J. Magn. and Magn. Mater. 1990. V. 85. P. 171–180.
5. Lebedev A. V., Pshenichnikov A. F. Rotational effect: The influence of free or solid moving boundaries // J. Magn. and Magn. Mater. 1993. V. 122. P. 227–230.
6. Moskowitz R., Rosensweig R. E. Nonmechanical torqued driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field // Appl. Phys. Lett. 1967. V. 11, N 10. P. 301–306.
7. Вислович А. Н. О воздействии вращающегося поля на ферромагнитную суспензию в слое со свободной границей // Письма в журн. техн. физики. 1975. Т. 1, вып. 16. С. 744–748.
8. Шлиомис М. И. Магнитные жидкости // Успехи физ. наук. 1974. Т. 112, вып. 3. С. 427–458.
9. Баштовой В. Г., Берковский Б. М., Вислович А. Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. М.: ИВТАН, 1985.
10. Shliomis M. I., Lyubimova T. P., Lyubimov D. V. Ferrohydrodynamics: an essay on the progress of ideas // Chem. Eng. Comm. 1988. V. 67. P. 275–290.
11. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.

12. Shliomis M. I., Pshenichnikov A. F., Morozov K. I., Shurubor I. Yu. Magnetic properties of ferrocolloids // J. Magn. and Magn. Mater. 1990. V. 85. P. 40–46.
13. Пшеничников А. Ф. Дисперсия магнитной восприимчивости магнитных коллоидов // Неравновесные процессы в магнитных суспензиях. Свердловск, 1986.
14. Гилев В. Г. Экспериментальное исследование реологических свойств магнитных жидкостей: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь: ПГУ, 1987.

Поступила в редакцию 16/III 1995 г.
