УДК 532.5

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НАГРЕВА

Б. Л. Смородин

Пермский государственный университет, 614600 Пермь

Для вращающегося слоя жидкости с границами низкой теплопроводности получено амплитудное уравнение, описывающее эволюцию вторичных конвективных движений при однородном нагреве и над тепловым пятном. Получена зависимость коэффициентов амплитудного уравнения от параметра вращения, числа Прандтля и неоднородности теплопотока. Для однородного подогрева рассмотрено влияние вращения на устойчивость нелинейных режимов. Для тепловых пятен различной формы исследованы границы устойчивости течений.

В горизонтальном слое жидкости с твердыми границами низкой теплопроводности неустойчивость равновесия жидкости при однородном подогреве связана с длинноволновыми возмущениями [1]. Нелинейные стационарные пространственно-периодические двумерные режимы конвекции в таком слое рассмотрены в [2] при небольших значениях надкритического нагрева. Исследование возникающих течений основывается на разложении по малому параметру ε, представляющему отношение толщины слоя h к характерному горизонтальному размеру конвективных структур L_* ($\varepsilon = h/L_*$). В случае неоднородного нагрева равновесие жидкости невозможно, возникает течение. Если при этом горизонтальный масштаб неоднородности подогрева (теплового пятна) велик, то масштаб индуцированного течения также велик, и можно вести исследование в длинноволновом пределе, используя разложение по малому параметру ε. Устойчивость конвективных течений, индуцированных неоднородным нагревом, исследована в [3].

Вращение слоя жидкости порождает коротковолновый механизм конвективной неустойчивости равновесия жидкости [4]. Конкуренция двух механизмов приводит к тому, что в случае быстрого вращения слоя жидкости с теплоизолированными границами опасными являются ячеистые возмущения, а при относительно небольших скоростях вращения реализуется длинноволновая неустойчивость [5].

В настоящей работе исследуется устойчивость длинноволновых конвективных течений во вращающемся горизонтальном слое жидкости с границами низкой теплопроводности для однородного и неоднородного нагрева.

1. Постановка задачи. Случай однородного нагрева. Пусть горизонтальный слой жидкости плотности ρ_0 вращается с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ вокруг вертикальной оси. На границах слоя задан стационарный однородный тепловой поток $Q = æ\,\partial T/\partial z$, где $æ$ — коэффициент теплопроводности жидкости. Исследуем возникновение конвекции в системе отсчета, связанной со слоем. Ось z декартовой системы направим вертикально вверх; координаты границ при этом $z = \pm h/2$, а оси x и y расположим в плоскости слоя.

Центробежными конвективными силами по сравнению с гравитационными будем пренебрегать. Это оправдано в случае, когда горизонтальный масштаб возникающих конвективных структур удовлетворяет условию

$$L \ll L_0 = g/\Omega^2, \tag{1.1}$$

где g — ускорение свободного падения.

Для атмосферы $\Omega \sim 7 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ и $L_0 \sim 2 \cdot 10^6$ км, в то время как размер тропического циклона $L \sim 1500$ км [6]. В экспериментах по моделированию крупномасштабных вихрей [7] наибольшей частоте вращения $\Omega \sim 0{,}4$ с$^{-1}$ соответствует $L_0 \sim 80$ м, а размер модели и наблюдаемой структуры $L \sim 0{,}3$ м. Таким образом, крупномасштабные структуры в атмосфере и в экспериментах, моделирующих атмосферные явления, удовлетворяют соотношению (1.1).

Рассмотрим слабонелинейные режимы конвекции, возникающие в результате эволюции конвективных валов (характеристики движения не зависят от y $(\partial/\partial y = 0)$). В случае твердых теплопроводных границ вдали от боковых стенок лабораторной модели надкритические конвективные режимы в виде валов [8] могут реализоваться. С другой стороны, в слое со свободной верхней и твердой нижней границами низкой теплопроводности линейная теория конвективной устойчивости для валов [9] и эксперимент [10] находятся в хорошем согласии.

Используем в качестве единиц длины, времени, скорости, функции тока, температуры соответственно h, h^2/χ, χ/h, χ, $Qh/æ$ и запишем уравнение конвекции во вращающейся системе отсчета в безразмерном виде:

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial z}\right] = \Delta^2\Psi - \mathrm{Ra}\frac{\partial T}{\partial x} + D\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right] = \Delta v - D\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \left[\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z}\right] = \Delta T, \qquad (1.2)$$

$$\mathrm{Ra} = g\beta Q h^4/\nu\chi æ, \qquad D = 2\Omega h^2/\nu, \qquad \mathrm{Pr} = \nu/\chi.$$

Здесь Ψ — функция тока; v — скорость жидкости вдоль оси y; T — отклонение температуры от равновесного значения; Ra — число Рэлея; Pr — число Прандтля; D — параметр, характеризующий скорость вращения жидкости; β, χ и ν — коэффициенты теплового расширения, температуропроводности и кинематической вязкости жидкости.

Граничные условия имеют вид

$$z = \pm\frac{1}{2}: \qquad \Psi = 0, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0, \qquad v = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \qquad (1.3)$$

В соответствии с линейной теорией устойчивости равновесия жидкости во вращающемся слое с теплоизолированными границами [5] скорость вращения слоя определяет тип критических возмущений и порог конвекции $\mathrm{Ra}_0 = \mathrm{Ra}_0(D)$. В случае относительно медленного вращения $(D < D_* \cong 43)$ нарастают длинноволновые возмущения, при быстром вращении неустойчивость связана с ячеистыми возмущениями. В длинноволновом случае при $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_0$ будут нарастать возмущения с волновыми числами из интервала $[0; k_*]$, где $k_* = 2\pi/L_*$ — волновое число, соответствующее критическому значению Ra. Для малых значений $\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_0$ величина $k_* \sim (\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_0)^{1/2}$ мала, и может быть использована длинноволновая асимптотика. Если при этом масштаб $L_* \ll L_0$ (1.1), то условие пренебрежения центробежной силой в уравнении движения выполняется.

Изменим горизонтальный масштаб, используя малый параметр $\varepsilon = 1/L_*$:

$$x_n = \varepsilon x, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_n}. \qquad (1.4)$$

В дальнейшем будем опускать индекс n у горизонтальной координаты.

Исследуем процессы, имеющие различный временной масштаб с помощью метода многих масштабов [11]. Считаем, что функции Ψ, v, T зависят от набора переменных $t_n = \varepsilon^n t$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). В этом случае производная по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n}. \tag{1.5}$$

Можно показать, что оператор дифференцирования, как и в [2, 3], начинается с четвертого порядка малости. Разложим Ψ, v, T и параметр Ra в ряды по ε:

$$\mathrm{Ra} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathrm{Ra}_{2n}, \quad \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Psi_n, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n, \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n T_n. \tag{1.6}$$

Подставляя разложения (1.4)–(1.6) в (1.2), (1.3), в различных порядках разложения по ε получим системы дифференциальных уравнений. Потребуем ограниченности решений при $t \to \infty$ и $x \to \pm\infty$.

В нулевом порядке $\Psi_0 = 0$, $v_0 = 0$, а температура $T_0(x)$ не зависит от поперечной координаты z. В первом порядке возмущения температуры также не зависят от z: $T_1 = T_1(x)$, а для Ψ_1 и v_1 имеем

$$\Psi_1 = -\mathrm{Ra}_0 T_{0x} f_1(z), \qquad v_1 = -\mathrm{Ra}_0 T_{0x} f_2(z), \tag{1.7}$$

где

$$f_1(z) = a(\cos\lambda_1 z - \cos\lambda_1/2) + b(\cos\lambda_2 z - \cos\lambda_2/2);$$

$$f_2 = a(D/\lambda_1)\sin\lambda_1 z + b(D/\lambda_2)\sin\lambda_2 z - z/D; \quad a = i\lambda_2/[4D^2\sin(\lambda_1/2)]; \quad b = a^*;$$

$\lambda_{1,2} = \sqrt{\pm iD}$ — корни уравнения $\lambda^4 + D^2 = 0$; индексы $*$ и x обозначают комплексное сопряжение и производную по горизонтали.

Во втором порядке

$$\Psi_2 = -\mathrm{Ra}_0 T_{1x} f_1(z), \qquad v_2 = -\mathrm{Ra}_0 T_{1x} f_2(z),$$

$$T_2 = -T_{0xx}\left[\frac{z^2}{2}(1 + \mathrm{Ra}_0 e) - \mathrm{Ra}_0\left(\frac{a\cos\lambda_1 z}{\lambda_1^2} + \frac{b\cos\lambda_2 z}{\lambda_2^2}\right)\right] - \tag{1.8}$$

$$- \mathrm{Ra}_0 (T_{0x})^2\left[\frac{a\sin\lambda_1 z}{\lambda_1} + \frac{b\sin\lambda_2 z}{\lambda_2} + ez\right] + \theta_2(x).$$

Здесь $e = -\mathrm{Im}(\lambda_1 \mathrm{ctg}(\lambda_2/2)/2D^2$; Im — мнимая часть. Удовлетворяя граничным условиям для температуры, запишем

$$\mathrm{Ra}_0 = D^2 R_d, \quad R_d = 2/[\mathrm{Im}(\lambda_1 \mathrm{ctg}(\lambda_2/2)) - 2]. \tag{1.9}$$

Уравнения для Ψ_3, v_3, T_3 имеют громоздкий вид и здесь не приводятся. В четвертом порядке получим дифференциальное уравнение для температуры:

$$T_4'' = -T_{2xx} + \Psi_{3x} + \Psi_2' T_{1x} + \Psi_1' T_{2x} - \Psi_{1x} T_2' + \frac{\partial T_0}{\partial t_4},$$

интегрирование которого поперек слоя дает уравнение эволюции возмущений для T_0:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + A\frac{\partial^4 T_0}{\partial x^4} + \frac{\mathrm{Ra}_2}{\mathrm{Ra}_0}\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} - B\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial T_0}{\partial x}\right)^3\right) = 0. \tag{1.10}$$

Линеаризуя уравнение (1.10), для нейтральных возмущений найдем $\mathrm{Ra}_2 = A\mathrm{Ra}_0$.

Чётность собственных функций задачи в различных порядках разложения приводит к тому, что коэффициенты A и B зависят только от параметра вращения D:

$$A = \frac{(7+5R_d)(\sin d - \operatorname{sh} d)}{64\, d^5(\operatorname{ch} d - \cos d)} - \frac{(3+R_d)(1-\cos d \operatorname{ch} d)}{32\, d^4(1 - 2\cos d \operatorname{ch} d + 0{,}5\,(\cos 2d + \operatorname{ch} 2d))} - \frac{R_d+1}{48\, d^4},$$

$$B = \frac{d^2}{4} R_d^2 \Big(\frac{3\sin d \operatorname{sh} d}{(\operatorname{ch} d - \cos d)^2} - \frac{5(\sin d + \operatorname{sh} d)}{2d(\operatorname{ch} d - \cos d)} + \frac{\operatorname{ch} d + \cos d}{\operatorname{ch} d - \cos d} \Big).$$

Здесь $d = (D/2)^{1/2}$.

При $D = 0$ значения коэффициентов A и B определены в [2]: $A = A_0 = 17/462$, $B = 10/7$, $\mathrm{Ra}_2 = 2040/77$. С ростом скорости вращения D коэффициент A и, следовательно, Ra_2 монотонно убывают, достигая нуля при $D = D_* = 43{,}5$, а коэффициент при нелинейном слагаемом B медленно уменьшается, изменяясь в интересующем нас интервале ($D < D_*$) на 4 %. Значение D_*, найденное в результате численного исследования устойчивости равновесия, несколько ниже: $D_* = 42$ [5]. Для построения амплитудного уравнения, описывающего вторичные конвективные движения, при $D = D_*$ необходимо рассматривать высшие порядки разложения по ε. В дальнейшем будем изучать только случай $D < D_*$ и пользоваться уравнением (1.10), которое, вводя новые масштабы $t = \tau/A$, $T_0 = \vartheta(A/B)^{1/2}$, перепишем в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\Big(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big)^3\Big) = 0. \qquad (1.11)$$

Производная $\partial\vartheta/\partial x \equiv N$, согласно (1.7), определяет интенсивность конвективного движения. В стационарном случае $\partial/\partial\tau = 0$ и вместо (1.11) получим

$$\frac{\partial^3 N}{\partial x^3} + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N^3}{\partial x} = 0. \qquad (1.12)$$

Используя N_x в качестве интегрирующего множителя, запишем решение (1.12) в виде эллиптической функции Якоби:

$$N = \Big(\frac{2s^2}{1+s^2}\Big)^{1/2} \operatorname{sh}[(1+s^2)^{-1/2}x]. \qquad (1.13)$$

Модуль эллиптической функции s находится с учетом условия периодичности при отсутствии среднего горизонтального теплового потока:

$$N(x+L) = N(x), \qquad \int_0^L N dx = 0.$$

Он связан с размером конвективных структур L соотношением $L = 4K(s)\sqrt{1+s^2}$ ($K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода). Рост размера конвективной ячейки L сопровождается ростом амплитуды конвективного движения N: $N \to 1$ при $L \to \infty$.

Исследование устойчивости двумерных пространственно-периодических вторичных движений в неподвижном слое с теплоизолированными границами относительно нормальных возмущений вида $\tilde{N}(x)\exp(-\alpha_0\tau)$ [2] показало, что все подобные движения неустойчивы: $\alpha_0 < 0$. Здесь α_0 — инкремент возмущений в покоящейся жидкости. Уравнение для эволюции возмущений во вращающемся слое преобразованием масштабов может быть сведено к случаю покоя. Отмечая, что $t = \tau/A_0$ для $D = 0$ и $t = \tau/A$ для $D \neq 0$, приведем соотношение, связывающее инкременты возмущений для вращающегося и неподвижного слоев жидкости: $\alpha = \alpha_0 A_0/A$. Поскольку коэффициент A в длинноволновой области положителен, то и во вращающемся слое все двумерные пространственно-периодические движения типа (1.13) неустойчивы ($\alpha < 0$).

2. Случай неоднородного нагрева. Рассмотрим случай слабонеоднородного нагрева. Неоднородность нагрева считаем малой второго порядка, что позволяет получить замкнутые уравнения для эволюции возмущений температуры ϑ. Граничные условия для температуры перепишем в виде $z = \pm 1/2$: $\partial T/\partial z = \varepsilon^2 q(x)$ ($q(x)$ — отклонение теплового потока от среднего значения, измеренное в единицах Q). Значение $q < 0$ соответствует теплопотоку выше критического в случае однородного нагрева. Изменение в граничных условиях приводит к появлению в (1.8) дополнительного слагаемого для возмущений температуры во втором порядке ($T_2 + qz$), что изменяет вид уравнения для ϑ:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial^4\vartheta}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)^3 + q(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Исследуем границу устойчивости возмущений ($\partial/\partial t = 0$) для различных типов неоднородности подогрева. Интегрируя линеаризованное уравнение (2.1) и принимая во внимание затухание N на бесконечности, получим

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - q(x)N = 0. \tag{2.2}$$

Пусть функция $q(x)$ имеет вид ступеньки, причем тепловой поток превышает критическое значение в ограниченной области:

$$q(x) = \left[\begin{array}{ll} -\gamma^2, & |x| < l, \\ \gamma^2, & |x| > l. \end{array}\right.$$

Решение уравнения (2.2) для данного теплового пятна имеет вид

$$N = c_1 \cos\gamma x (x < l), \quad N = c_2 \exp(-\gamma x)(x > l).$$

Требуя непрерывности N и $\partial N/\partial x$ на границе теплового пятна ($x = l$), определим границы устойчивости на плоскости параметров l и γ: $\gamma l = \pi/4 + \pi n$ ($n = 0, 1, 2\ldots$). Область устойчивости лежит между первой гиперболой ($n = 0$) и осью $\gamma = 0$. Чем меньше степень перегрева γ, тем больше должен быть размер теплового пятна l, вызывающего неустойчивость.

Уравнение для горизонтального теплопотока N (2.2) с квадратичным тепловым пятном $q(x) = q_0(x^2 - 1)$ ($q_0 > 0$) сводится к задаче о квантово-механическом осцилляторе. Собственное значение параметра q_0, соответствующее первому уровню неустойчивости, равно единице. При $q_0 < 1$ решение, связанное с неоднородностью теплопотока, устойчиво и $\vartheta \to 0$. Решение, описывающее горизонтальный теплопоток N на границе устойчивости ($q_0 = 1$), имеет вид $N = \exp(-x^2/2)$.

Для теплового пятна $q(x) = \gamma^2(\mathrm{sh}^2\gamma x - 1)/(\mathrm{ch}^2\gamma x)$ с минимумом при $x = 0$ и уровнем демпфирования на бесконечности γ^2 решение можно найти, пользуясь аналогией с уравнением Шредингера с модифицированным потенциалом Пешля — Теллера [12]. Для величины N имеем решения солитонного типа:

$$N = C/(\mathrm{ch}\gamma x), \tag{2.3}$$

при этом $\vartheta(x) = (C/\gamma)\mathrm{arctg}\,\mathrm{sh}\,\gamma x$. Амплитуда солитона C — произвольная постоянная.

Нелинейное стационарное уравнение для горизонтального теплопотока $\partial^2 N/\partial x^2 - q(x)N - N^3 = 0$ также имеет солитонное решение (2.3), но вид теплового пятна должен быть другим: $q(x) = (\gamma^2\,\mathrm{sh}^2\,\gamma x - h^2)/(\mathrm{ch}^2\,\gamma x)$. Амплитуда солитона (2.3) в этом случае полностью определяется $C = \sqrt{h^2 - \gamma^2}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00389).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
2. **Непомнящий А. А.** Об устойчивости пространственно-периодических конвективных движений в горизонтальном слое с теплоизолированными границами // Гидродинамика. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1976. Вып. 9. С. 53–59.
3. **Любимов Д. В., Черепанов А. А.** Устойчивость конвективного течения, вызванного неоднородным нагревом // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1991. С. 17–26.
4. **Chandrasekhar S.** Hydrodinamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Claredon Press, 1961.
5. **Смородин Б. Л.** Конвективная устойчивость горизонтального вращающегося слоя жидкости при фиксированном теплопотоке на границах // Вестн. Перм. ун-та. Физика. 1994. Вып. 2. С. 110–119.
6. **Хаин А. П.** Математическое моделирование тропических циклонов. Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
7. **Богатырев Г. П.** Возбуждение циклонического вихря или лабораторная модель тропического циклона // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51, вып. 11. С. 557–559.
8. **Rossby H. T.** A study of Benard convection with and without rotation // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. P. 309–335.
9. **Мугинов Р. Р., Смородин Б. Л.** О влиянии силы Кориолиса на возникновение конвекции в слое при фиксированном теплопотоке на границах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 3. С. 42–46.
10. **Бубнов Б. М., Сенаторский А. О.** Экспериментальное исследование возникновения конвекции в плоском вращающемся слое жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 6. С. 177–179.
11. **Найфэ А. Х.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
12. **Флюгге З.** Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 31/I 1996 г.,
в окончательном варианте — 5/VI 1996 г.