активации разрушения. Структурно-чувствительный коэффициент увеличивается по степенному закону с ростом размеров структурных неоднородностей материала (рис. 5). Так как $v$ имеет физический смысл размерного коэффициента перенапряжения межатомных связей, то, естественно, должен наблюдаться рост этого коэффициента с увеличением размеров структурных неоднородностей и уменьшением «живого» сечения материала, что и подтверждается рис. 5 и табл. 2.

Таким образом, определяя параметры $U_0$, $v$ и $d^*$, можно делать выводы о структуре композиционных материалов, их прочности и влиянии технологии изготовления на механические свойства.

Из всего вышесказанного следует, что предложенный метод регистрации импульсного электромагнитного излучения при разрушении композиционных материалов позволяет на стадии их изготовления и испытания оперативно определять основные константы прочности, внося своевременную коррекцию в технологию изготовления.

### ЛИТЕРАТУРА


1. Журков С.Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел // Вестн. АН СССР. — 1968. — № 3. — С. 46—52.
2. Журков С.Н., Куксенко В.С., Петров В.А. Физические основы прогнозирования механического разрушения // ДАН СССР. — 1981. — Т. 259, вып. № 6. — С. 1350—1353.
3. Томашевская И.С., Хамидуллин Я.Н. Возможность предсказания момента разрушения образцов горных пород на основе флуктуационного механизма роста трещин // ДАН СССР. — 1972. — Т. 207, вып. № 3. — С. 580—582.
4. Шемякин Е.И. О свободном разрушении твердых тел // ДАН СССР. — 1988. — Т. 300, вып. 5. — С. 1090—1094.
5. Мирошниченко М.И., Куксенко В.С. Излучение электромагнитных импульсов при зарождении трещин в твердых диэлектриках // ФТТ. — 1980. — Т. 22, вып. 5. — С. 1531—1533.
6. Дерягин Б.В., Кротова Н.А., Смилга В.П. Адгезия твердых тел. — М.: Наука, 1973.
7. Иванов В.В., Егоров П.В., Колпакова Л.А., Пимонов А.А. Динамика трещин и электромагнитное излучение нагруженных горных пород // ФТПРПИ. — 1988. — № 5. — С. 20—27.



*г. Кемерово* *Поступила 8/VII 1992 г., в окончательном варианте — 2/XI 1993 г.*


---


УДК 539.376



*М.Н. Кирсанов*


# ВЫПУЧИВАНИЕ ВЯЗКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ЖЕСТКОМ НАГРУЖЕНИИ

Проблеме выпучивания реологических конструкций посвящены многочисленные работы, обзор которых можно найти в [1, 2]. В большинстве случаев явление рассматривается при постоянных нагрузках. В настоящей работе изучается возможность выпучивания стержня в процессе наращивания сжимающей силы при заданной постоянной скорости деформирования. Используется теория особых точек [3], уточняющая псевдобифуркационный подход [4] в задачах выпучивания идеальных систем при ползучести.

Определяющее соотношение примем в виде [5]

$$\dot{p}p^{\alpha} = A\sigma^{n}, \tag{1}$$

где $p = \varepsilon - \sigma/E$ — деформация ползучести; $A$, $n$, $\alpha$ — параметры среды. Рассмотрим материал, в котором упругой деформацией $\sigma/E$ можно пренебречь, т.е. $E \to \infty$, $p = \varepsilon$.

Равновесие стержня длиной $l$ под действием нагрузки $T$ вблизи от прямолинейного положения подчинено уравнениям, следующим из гипотезы плоских сечений и уравнения моментов относительно нейтральной оси:

$$(2) \qquad \int\limits_{\Omega}\Delta pzd\Omega = Jv'', \int\Delta\sigma zd\Omega = -Tv.$$

Здесь $\Omega$, $J$ — площадь и момент инерции поперечного сечения; значком $\Delta$ помечено приращение соответствующей величины; $v$ — прогиб стержня; $v''$ — вторая производная прогиба по продольной координате $y$.

Малые приращения напряжений и деформаций удовлетворяют линеаризированному уравнению

$$(3) \qquad p^{\alpha}\Delta\dot{p} + \alpha p^{\alpha-1}\dot{p}\Delta p = An\sigma^{n-1}\Delta\sigma.$$

Умножим (3) на $z$, проинтегрируем по площади поперечного сечения $\Omega$ и с учетом (1), (2) и замены $T = \sigma\Omega$ получим

$$(4) \qquad pJ\dot{v}'' + \alpha\dot{p}Jv'' = -np\dot{p}\Omega v.$$

Уравнению (4) удовлетворяют функции

$$(5) \qquad v = U_0\sin\mu y,\ \dot{v} = U_1\sin\mu y,\ \mu = j\pi/l.$$

Подстановка (5) в (4) дает

$$(6) \qquad \dot{p}(np/D - \alpha)U_0 - pU_1 = 0,$$

где $D = J\mu^2/\Omega$. Программу деформирования зададим линейной:

$$(7) \qquad p = kt$$

($k = \mathrm{const}$ — скорость деформирования). Уравнение (6) перепишем в виде

$$(8) \qquad (\tau - \alpha)U_0 - tU_1 = 0.$$

Введем безразмерное время

$$(9) \qquad \tau = ktn/D.$$

Соотношение (8) выделяет в качестве особой точки процесса значение $\tau = \tau_1 = \alpha$ (критерий Работнова — Шестерикова [6]). Действительно, возмущение, задающее значение начального прогиба $U_0$ до момента $\tau_1$, дает прогиб, уменьшающийся сразу же после момента возмущения и увеличивающийся, если $\tau > \tau_1 = \alpha$, о чем можно судить по знаку скорости прогиба $U_1$.

Для анализа ускорения прогиба стержня и его высших производных по времени в момент возмущения поднимем порядок определяющего соотношения. Ограничимся для краткости изложения третьим порядком производной. Этого достаточно, чтобы выяснить возникающие закономерности. Продифференцируем (1) 2 раза по времени:

$$(10) \qquad \ddot{p}p^{\alpha} + \alpha p^{\alpha-1}\dot{p}^2 = An\sigma^{n-1}\dot{\sigma};$$

$$(11) \qquad p^{(3)}p^{\alpha} + 3\alpha\dot{p}\ddot{p}p^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)\dot{p}^3p^{\alpha-2} = An(\sigma^{n-1}\ddot{\sigma} + (n-1)\sigma^{n-2}\dot{\sigma}^2).$$

По аналогии с тем, как из (1) было получено уравнение для амплитуд (8), выведем из (10) и (11) уравнения для величин $U_i$, вводимых по формуле $v^{(i)} = U_i\sin\mu y$ ($i = 0, 1, 2,\ldots$), где $v^{(i)}$ — производная по времени порядка $i$.

Вариация (10) и (11) дает

$$(12) \qquad t^2\Delta\ddot{p} + 2\alpha t\Delta\dot{p} + \alpha(\alpha-1)\Delta p = nkt^2[(n-1)\dot{\sigma}\Delta\sigma/\sigma + \Delta\dot{\sigma}]/\sigma;$$

$$(13) \qquad t^3\Delta p^{(3)} + 3\alpha t^2\Delta\ddot{p} + 3\alpha(\alpha-1)t\Delta\dot{p} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\Delta p =$$

$$= nkt^3[(n-1)(n-2)\dot{\sigma}^2\Delta\sigma/\sigma^2 + \ddot{\sigma}\Delta\sigma/\sigma + 2(n-1)\dot{\sigma}\Delta\dot{\sigma}/\sigma + \Delta\ddot{\sigma}].$$

При $p = kt$ из (1) следует

$$k^{\alpha+1}t^{\alpha} = A\sigma^n. \tag{14}$$

Продифференцировав это равенство дважды, получим

$$\dot{\sigma} = \frac{\alpha}{n}\frac{\sigma}{t}, \quad \ddot{\sigma} = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{\alpha}{n} - 1\right)\frac{\sigma}{t^2}.$$

С учетом последних выражений выведем из (12) и (13)

$$\alpha(\tau - \alpha + 1)U_0 + (\tau - 2\alpha)U_1 t - U_2 t^2 = 0; \tag{15}$$

$$\alpha(\alpha - 1)(\tau - \alpha + 2)U_0 + \alpha(2\tau - 3\alpha + 3)U_1 t + \tag{16}$$

$$+ (\tau - 3\alpha)U_2 t^2 - U_3 t^3 = 0.$$

Уравнения (8), (15) образуют систему для переменных $U_0$, $U_1$, $U_2$. Пусть в результате некоторого возмущения стержень получил заданную начальную величину ускорения амплитуды прогиба $U_2$. Прогиб $U_0$ и его скорость $U_1$ выражаются через $U_2$ с помощью решения системы уравнений (8), (15):

$$U_0 = t^2U_2B_0/B_2,\ U_1 = tU_2B_1/B_2$$

$$(B_0 = 1,\ B_1 = \tau - \alpha,\ B_2 = \tau^2 - 2\alpha\tau + \alpha(\alpha + 1)).$$

Аналогично, если задана величина $U_3$, начальные значения $U_0$, $U_1$, $U_2$ выражаются через $U_3$ из решения системы (8), (15), (16). Запишем ее в матричном виде

$$\begin{vmatrix} \tau - \alpha & -t & 0 \\ \alpha(\tau - \alpha + 1) & (\tau - 2\alpha)t & -t^2 \\ \alpha(\alpha - 1)(\tau - \alpha + 2) & \alpha(2\tau - 3\alpha + 3)t & t^2(\tau - 3\alpha) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^3U_3 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Из решения (17) имеем

$$U_0 = t^3U_3B_0/B_3,\ U_1 = t^2U_3B_1/B_3,\ U_2 = tU_3B_2/B_3,$$

где $B_3 = \tau^3 - 3\alpha\tau^2 + 3\alpha(\alpha + 1)\tau - \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)$ — определитель матрицы системы.

Особая точка порядка $N$ $\tau_N$ соответствует равенству нулю определителя системы порядка $N$. Начальные значения амплитуд $U_0, U_1, \dots, U_{N-1}$, как видно из решений при $N = 2$ и $N = 3$, неограниченно растут. Полином $B_2$ корней не имеет, следовательно, особой точки второго порядка в этой задаче не существует. Особая точка третьего порядка может быть найдена численно из решения уравнения $B_3 = 0$. Продолжая далее процесс построения полиномов по рассмотренной схеме, выведем

$$B_4 = \tau^4 - 4\alpha\tau^3 + 6\alpha(\alpha + 1)\tau^2 - 4\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\tau +$$

$$+ \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3).$$

Легко проверить общую формулу

$$B_N = \sum_{i=0}^{N} (-1)^{N+i}\tau^i C_i^N (\alpha)_{N-i},$$

где $C_i^N$ — биноминальные коэффициенты; $(\alpha)_j = \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + j - 1)$ — символ Похгаммера; $(\alpha)_0 = 1$. Кроме того, при поиске корней может быть полезна следующая дифференциальная зависимость:

$$B'_N = NB_{N-1}.$$

Численный счет показывает, что четные полиномы корней не имеют, корни нечетных монотонно растут с увеличением $\alpha$ и упорядочены по порядкам полиномов (см. рисунок).

Особой точке порядка $N$ соответствует критическое время $t_N$, определяемое зависимостью (9):

$$t_N = \frac{\tau_N}{kn} D. \tag{18}$$

Напряжение в стержне возрастает за это время от нуля до величины, которую найдем из (14):

$$\sigma = \left(\frac{k}{A}\right)^{1/n} \left(\frac{\tau_N D}{n}\right)^{\alpha/n}.$$

Полученное решение можно использовать, например, для оценки безопасной в отношении выпучивания скорости приложения нагрузки в опыте на выпучивание при постоянной нагрузке $\sigma_*$. Для того чтобы еще на стадии роста нагрузки от нуля до рабочего значения $\sigma_*$ не произошло выпучивания, время наращивания усилия должно быть меньше, чем время, соответствующее первой особой точке $t_1$. Отсюда, согласно (14) и (18), имеем

$$k > A\sigma_*^n \left(\frac{\alpha D}{n}\right)^{-\alpha}.$$

Сравним предлагаемый подход с результатами, следующими из некоторых известных условных критериев устойчивости при ползучести. Заметим сразу, что эти критерии разрабатывались для случая постоянной нагрузки и среды, обладающей некоторым модулем упругости $E$. Перенос условных критериев на анализ нагружения $p = kt$ мгновенно-жесткого материала в какой-то степени формален.

*Критерий касательного модуля* [7]. Исключив время $t$ из равенства (14) и закона нагружения (7), получим уравнение изохронной кривой $kp^\alpha = A\sigma^n$. Продифференцируем его по $p$. Найдем касательный модуль $E_к = \alpha\sigma/(np)$. Критическое время определится по формуле Эйлера с модулем $E_к$ вместо $E$: $\sigma = E_к D$. Отсюда вытекает

$$t_{Шнл} = \frac{\alpha}{nk} D.$$

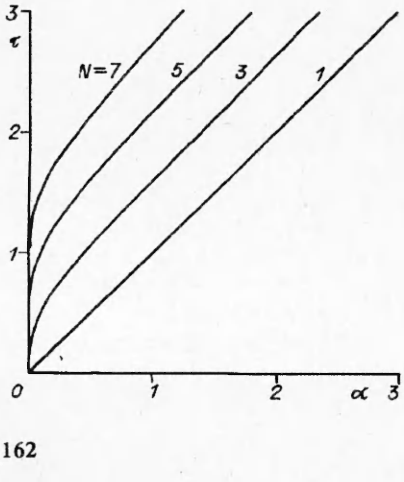
*Критерий критической деформации* [8]. Для упругого стержня деформация, соответствующая эйлеровой нагрузке $\sigma_э$, имеет вид $\varepsilon = \sigma_э/E = D$. В нашем случае $p = D$, откуда сразу же следует

$$t_{Дж} = \frac{D}{k}.$$

Критическое время здесь не зависит от свойств среды.

*Критерий релаксации возмущения* [9]. При равновесии стержня в отклоненном состоянии под действием некоторой возмущающей нагрузки (момента $m$) второе уравнение (2) должно быть заменено на

$$\int_\Omega \Delta\sigma z d\Omega = -Tv - m. \tag{19}$$



В качестве критического принимается время, когда при постоянном прогибе $v$ момент $m$, удерживающий это состояние, уменьшится до нуля. Учитывая, что $v$ = const, из (2), (3), (19) при $\dot{p} = k$ получим уравнение для амплитуды $M$ возмущающего момента ($m = M\sin\mu y$):

$$M = U_0 T(D\alpha/(tnk) - 1).$$

Момент уменьшается от бесконечно большого значения при $t = 0$ до нуля за время

$$t_{\text{Ив}} = \frac{\alpha}{nk} D,$$

совпадающее по величине с $t_{\text{Шнл}}$ и с особой точкой первого порядка $t_1$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Колмановский В.Б.** Устойчивость вязкоупругих тел и конструкций // Итоги науки и техники. Мех. деф. твердого тела. — М.: ВИНИТИ, 1987. — Т. 19.
2. **Куршин Л.М.** Устойчивость при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 3.
3. **Кирсанов М.Н., Клюшников В.Д.** Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Изв. РАН. МТТ. — 1993. — № 3.
4. **Клюшников В.Д.** Лекции по устойчивости деформируемых систем. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
5. **Работнов Ю.Н.** Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966.
6. **Работнов Ю.Н., Шестериков С.А.** Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ. — 1957. — Т. 21, № 3.
7. **Shanley F.R.** Weight-strength analysis of aircraft structures. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co, 1952.
8. **Gerard G.** A creep buckling hypothesis // J. Aeron. Sci. — 1956. — V. 23, N 9.
9. **Иванов Г.В.** Об устойчивости равновесия сжато-изогнутых тонких стержней при неупругих деформациях // ПМТФ. — 1961. — № 3.



*г. Воронеж* *Поступила 26/VII 1993 г.*


---


УДК 539.374; 534.1



*А.Г. Иванов, В.А. Огородников, Г.Я. Карпенко, А.Д. Ковтун, А.А. Демидов, Л.А. Толстикова*


# О ВЛИЯНИИ СДВИГОВОЙ ПРОЧНОСТИ НА РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ТОРМОЖЕНИИ СХОДЯЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК

В [1] рассмотрены вопросы развития детерминированных возмущений у цилиндрических оболочек, заполненных воздухом и разгоняемых продуктами взрыва. Было установлено, что сдвиговая прочность материала оболочки заметным образом влияет на форму и амплитуду возмущений на стадии разгона оболочки к оси симметрии. Представляет интерес случай, когда сжимаемая оболочкой полость заполнена частично или, как, например, в [2], полностью более плотной, чем воздух, средой. При этом появляется возможность для изучения процессов торможения и последую-