УДК 539.3

О ЗАДАЧЕ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: itsvel@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача теории упругости для тела, на части поверхности которого одновременно заданы векторы перемещений $\boldsymbol{u}$ и нагрузок $\boldsymbol{p}$, а на остальной части условия не определены. Для случая двусвязной области, когда векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{p}$ задаются на одной из ее границ (внутренней или внешней), обоснован итерационный метод решения, основанный на сведении исходной задачи к последовательности смешанных задач.

Ключевые слова: условно-корректная задача, двусвязная упругая область, итерационный метод решения.

Задача определения напряженно-деформированного состояния в теле по переопределенным условиям на части его поверхности (где известны векторы перемещений $\boldsymbol{u}$ и нагрузок $\boldsymbol{p}$) и неопределенным условиям на другой части в [1, 2] получила название задачи $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$. Эта задача является условно-корректной и в случае изотропной упругой области сводится к последовательному решению задачи Коши для уравнения Лапласа [2], которая, как известно, корректна в классе ограниченных по модулю решений [3]. Следовательно, задача $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ также корректна в классе ограниченных по модулю решений. Для решения последней в работе [4] предложен итерационный процесс, приводящий на каждой итерации к смешанной задаче. Как показали численные эксперименты, такой алгоритм обладает достаточно высокой разрешающей способностью и помехоустойчивостью. Однако в [4] не доказана сходимость последовательных приближений к решению задачи $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$. В данной работе такое доказательство приводится для двусвязной упругой области в случае задания векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{p}$ на ее внутренней (внешней) границе при неизвестных условиях на внешней (внутренней) границе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругое тело, занимающее пространственную двусвязную область v с внутренней и внешней границами S_1 и S_2, удовлетворяющими необходимым условиям гладкости [5], подчиняющуюся закону Гука

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn}, \qquad \sigma_{kl} = b_{klmn}\varepsilon_{mn}. \tag{1.1}$$

Здесь и далее ε_{kl}, σ_{kl}, a_{klmn}, b_{klmn} — компоненты тензоров деформаций, напряжений, упругих податливостей и упругих модулей; индексы k, l принимают значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам k, l проводится суммирование.

Деформации ε_{kl} выражаются через компоненты u_k вектора перемещений $\boldsymbol{u}$ по соотношениям Коши

$$\varepsilon_{kl} = (1/2)(u_{k,l} + u_{l,k}), \tag{1.2}$$

где индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей координате.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00673).

Массовые силы отсутствуют, поэтому уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_{kl,l} = 0. \tag{1.3}$$

Перемещения и нагрузки известны на одной из границ области v, например, на границе S_1, т. е.

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_*, \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_* \qquad \text{на} \quad S_1, \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{p} = \{p_k\}$; $p_k = \sigma_{kl} n_l$, n_k — компоненты единичного вектора внешней к S_1 нормали; $\boldsymbol{u}_* = \{u_{k*}\}$, $\boldsymbol{p}_* = \{p_{k*}\}$ — заданные на S_1 функции. Будем считать, что $u_{k*} \in H^{1/2}(S_1)$ и $p_{k*} \in H^{-1/2}(S_1)$ (используемые здесь и далее пространства определены в [5]).

Следует отметить, что задача (1.1)–(1.4), сформулированная для определения напряженно-деформированного состояния в области v, возникает и при рассмотрении линейно-упругой (вязкоупругой) области, содержащей физически нелинейное включение, в котором за счет подбора нагрузок на внешней границе области нужно создать необходимое напряженно-деформированное состояние (например, однородное) [6, 7] или получить необходимую текущую или остаточную форму включения, т. е. соответствующие перемещения точек его границы [8].

2. Итерационный метод решения задачи (1.1)–(1.4). Для решения задачи $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ (для односвязной области v с границей $S = S_1 \cup S_2$, на части S_1 которой заданы условия (1.4)) в работе [4] предложен и апробирован следующий итерационный процесс. На нулевой итерации ($n = 0$) полагается $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_*$ на S_1, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0$ на S_2 ($\boldsymbol{u}^0$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, например $\boldsymbol{u}^0 = 0$). Из решения этой смешанной задачи определяются напряженно-деформированное состояние в области v и векторы $\boldsymbol{u}^0$ и $\boldsymbol{p}^0$ на всей границе $S = S_1 \cup S_2$. Затем на части S_1 границы на нечетных итерациях выбирается первое условие в (1.4), на четных — второе условие в (1.4), а на части S_2 границы — соответственно нагрузки и перемещения, найденные на предыдущей итерации. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}^{2n-1} = \boldsymbol{u}_* \quad \text{на} \quad S_1, \qquad \boldsymbol{p}^{2n-1} = \boldsymbol{p}^{2n-2} \quad \text{на} \quad S_2, \\ \boldsymbol{p}^{2n} = \boldsymbol{p}_* \quad \text{на} \quad S_1, \qquad \boldsymbol{u}^{2n} = \boldsymbol{u}^{2n-1} \quad \text{на} \quad S_2, \qquad n = 1, 2, \dots . \end{gathered} \tag{2.1}$$

Как отмечено выше, сходимость данного итерационного процесса к решению задачи $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ в [4] не доказана.

Покажем, что для рассматриваемой двусвязной области последовательность решений $\boldsymbol{u}^n$ смешанных задач (1.1)–(1.3), (2.1) сходится к решению исходной задачи (1.1)–(1.4). Для этого необходимо сделать одно уточнение: будем предполагать, что на нулевой итерации вектор $\boldsymbol{u}^0 = \{u_k^0\}$ на S_2 выбран не произвольно, а так, что $u_k^0 \in H^{1/2}(S_2)$. Отсюда следует, что решение $\boldsymbol{u}^0$ в области v смешанной задачи существует, причем $u_k^0 \in H^1(v)$ [5]. Тогда из (2.1) с учетом сделанных выше предположений относительно функций $\boldsymbol{u}_*$ и $\boldsymbol{p}_*$ в формуле (1.4) следует, что для вектора перемещений $\boldsymbol{u}^n = \{u_k^n\}$ на любой итерации $u_k^n \in H^1(v)$, поскольку на S_2 выполняются условия $u_k^n \in H^{1/2}(S_2)$ или $p_k^n \in H^{-1/2}(S_2)$.

Для поля перемещений введем норму

$$\|\boldsymbol{u}\| = \Big(\int\limits_v b_{klmn} u_{k,l} u_{m,n} \, dv \Big)^{1/2},$$

которая эквивалентна норме $\|\boldsymbol{u}\|_{H^1(v)}$ [5, 8]. Вследствие (1.1)–(1.3) и известного уравнения виртуальных работ имеет место равенство

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \int\limits_v \varepsilon_{kl} \sigma_{kl} \, dv = \int\limits_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dS, \qquad S = S_1 \cup S_2. \tag{2.2}$$

Рассмотрим числовую последовательность $\{a_n\}$, $a_n = \|\Delta \boldsymbol{u}^n\|^2$, $\Delta \boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, общий член которой на основании (2.2) и вытекающего из (2.1) равенства $\Delta \boldsymbol{u}^n \cdot \Delta \boldsymbol{p}^n|_{S_2} = 0$ можно представить в виде

$$a_n = \int\limits_{S_1} \Delta \boldsymbol{u}^n \cdot \Delta \boldsymbol{p}^n \, dS \geqslant 0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.3}$$

Из (2.1) и (2.3) найдем

$$a_{2n-1} = \int\limits_{S_1} (\boldsymbol{p}_* - \boldsymbol{p}^{2n-1}) \cdot (\boldsymbol{u}^{2n} - \boldsymbol{u}_*) \, dS, \qquad a_{2n} = \int\limits_{S_1} (\boldsymbol{p}_* - \boldsymbol{p}^{2n+1}) \cdot (\boldsymbol{u}^{2n} - \boldsymbol{u}_*) \, dS,$$
$$a_{2n+1} = \int\limits_{S_1} (\boldsymbol{p}_* - \boldsymbol{p}^{2n+1}) \cdot (\boldsymbol{u}^{2n+2} - \boldsymbol{u}_*) \, dS. \tag{2.4}$$

Отсюда получим

$$a_{2n} - a_{2n-1} = \int\limits_{S_1} (\boldsymbol{p}^{2n-1} - \boldsymbol{p}^{2n+1}) \cdot (\boldsymbol{u}^{2n} - \boldsymbol{u}_*) \, dS = \int\limits_{S} (\boldsymbol{p}^{2n-1} - \boldsymbol{p}^{2n+1}) \cdot (\boldsymbol{u}^{2n} - \boldsymbol{u}^{2n-1}) \, dS,$$

поскольку $\boldsymbol{u}^{2n-1} = \boldsymbol{u}_*$ на S_1 и $\boldsymbol{u}^{2n-1} = \boldsymbol{u}^{2n}$ на S_2. Вследствие тождества Бетти и равенств $\boldsymbol{u}^{2n-1} = \boldsymbol{u}^{2n+1} = \boldsymbol{u}_*$ на S_1 и $\boldsymbol{p}^{2n} = \boldsymbol{p}^{2n+1}$ на S_2 имеем

$$a_{2n} - a_{2n-1} = \int\limits_{S} (\boldsymbol{u}^{2n-1} - \boldsymbol{u}^{2n+1}) \cdot (\boldsymbol{p}^{2n} - \boldsymbol{p}^{2n-1}) \, dS = -\|\boldsymbol{u}^{2n-1} - \boldsymbol{u}^{2n+1}\|^2.$$

Аналогично с использованием (2.4) и равенств $\boldsymbol{p}^{2n} = \boldsymbol{p}^{2n+2} = \boldsymbol{p}_*$ на S_1 и $\boldsymbol{p}^{2n} = \boldsymbol{p}^{2n+1}$, $\boldsymbol{u}^{2n+1} = \boldsymbol{u}^{2n+2}$ на S_2 получим

$$a_{2n+1} - a_{2n} = \int\limits_{S_1} (\boldsymbol{p}_* - \boldsymbol{p}^{2n+1}) \cdot (\boldsymbol{u}^{2n+2} - \boldsymbol{u}^{2n}) \, dS = \int\limits_{S} (\boldsymbol{p}^{2n} - \boldsymbol{p}^{2n+1}) \cdot (\boldsymbol{u}^{2n+2} - \boldsymbol{u}^{2n}) \, dS =$$
$$= \int\limits_{S} (\boldsymbol{u}^{2n} - \boldsymbol{u}^{2n+1}) \cdot (\boldsymbol{p}^{2n+2} - \boldsymbol{p}^{2n}) \, dS = -\|\boldsymbol{u}^{2n} - \boldsymbol{u}^{2n+2}\|^2.$$

Таким образом, при любых n имеем

$$a_n = a_{n-1} - \|\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^{n-1}\|^2. \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что последовательность (2.3) является убывающей и ограниченной снизу ($a_n \geqslant 0$). Значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$. Тогда из (2.5) получим $\lim\limits_{n\to\infty} \|\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^{n-1}\| = 0$, т. е. $\boldsymbol{u}^{n+1} \to \boldsymbol{u}^{n-1}$ в v и $\boldsymbol{u}^{n+1} \to \boldsymbol{u}^{n-1}$, $\boldsymbol{p}^{n+1} \to \boldsymbol{p}^{n-1}$ на S.

В силу (2.1) на части S_2 границы на нечетных итерациях имеем $\boldsymbol{u}^{2n+1} \to \boldsymbol{u}^{2n-1} = \boldsymbol{u}^{2n}$, $\boldsymbol{p}^{2n+1} = \boldsymbol{p}^{2n}$; на четных — $\boldsymbol{u}^{2n} = \boldsymbol{u}^{2n-1}$, $\boldsymbol{p}^{2n} = \boldsymbol{p}^{2n+1} \to \boldsymbol{p}^{2n-1}$.

Таким образом, $\Delta \boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n \to 0$ и $\Delta \boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}^{n+1} - \boldsymbol{p}^n \to 0$ на S_2 при $n \to \infty$.

Рассматривая задачу $(\Delta \boldsymbol{u}^n, \Delta \boldsymbol{p}^n)$ для области v, на внешней границе S_2 которой известны (из решения задачи (1.1)–(1.3), (2.1)) векторы $\Delta \boldsymbol{u}^n$ и $\Delta \boldsymbol{p}^n$, причем $\Delta u_k^n \in H^{1/2}(S_2)$ и $\Delta p_k^n \in H^{-1/2}(S_2)$, а деформации $\Delta \varepsilon_{kl}^n$ и напряжения $\Delta \sigma_{kl}^n$ связаны законом Гука (1.1), приходим к выводу, что $\Delta u_k^n \in H^1(v) \to 0$, так как $\Delta u_k^n \to 0$ и $\Delta p_k^n \to 0$ на S_2. Следовательно, $\Delta \boldsymbol{p}^n \to 0$ и $\Delta \boldsymbol{u}^n \to 0$ на S_1, т.е. $\boldsymbol{p}^n \to \boldsymbol{p}_*$ и $\boldsymbol{u}^n \to \boldsymbol{u}_*$, что и требовалось доказать.

Следует отметить, что если при каком-либо значении n имеет место равенство $a_n = a_{n-1}$, т. е. согласно (2.5) $\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^{n-1}$ в v, то это означает, что уже на нулевой итерации получено точное решение задачи $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$, т. е. "угадано" значение $\boldsymbol{u}^0$ вектора перемещений на S_2. Действительно, пусть, например, $\boldsymbol{u}^{2n+1} = \boldsymbol{u}^{2n-1}$ в v. Тогда из (2.1) на границе S_2 на $(2n-1)$-й итерации получим $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{2n-1} = \boldsymbol{p}^{2n-2}$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{2n-1}$; на $(2n)$-й — $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{2n} = \boldsymbol{u}^{2n-1}$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{2n}$; на $(2n+1)$-й — $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{2n+1} = \boldsymbol{u}^{2n-1}$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{2n+1} = \boldsymbol{p}^{2n-1} = \boldsymbol{p}^{2n}$, т. е. на четной и нечетной итерациях имеем $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{2n-1}$ и $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{2n-1}$ на S_2. В силу единственности решения задачи $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ (при заданных на S_2 векторах $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{p}$) получаем $\boldsymbol{p}^{2n-1} = \boldsymbol{p}_*$, $\boldsymbol{u}^{2n-1} = \boldsymbol{u}_*$ на S_1, при этом найденные значения $\boldsymbol{u}^{2n-1}$ и $\boldsymbol{p}^{2n-1}$ на S_2 соответствуют точному решению. Так как во всех предыдущих (и последующих) приближениях эти величины ($\boldsymbol{u}^{2n-1}$ или $\boldsymbol{p}^{2n-1}$) содержатся в граничных условиях на S_2 (например, $\boldsymbol{p}^{2n-2} = \boldsymbol{p}^{2n-1}$ на S_2), то, поднимаясь "вверх" по итерациям, на каждом шаге будем получать точное решение указанной задачи, в том числе при $n = 0$.

Отметим также, что если доопределить граничные условия на S_1 аналогичными условиями на S_2, т. е. вместо (2.1) принять

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{2n-1} &= \boldsymbol{u}_* \quad \text{на} \quad S_1, \qquad \boldsymbol{u}^{2n-1} = \boldsymbol{u}^{2n-2} \quad \text{на} \quad S_2, \\ \boldsymbol{p}^{2n} &= \boldsymbol{p}_* \quad \text{на} \quad S_1, \qquad \boldsymbol{p}^{2n} = \boldsymbol{p}^{2n-1} \quad \text{на} \quad S_2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

то итерационный процесс будет расходиться. (Этот факт отмечается в работе [4], но доказательство не приводится.) Действительно, для последовательности $a_n = \|\Delta \boldsymbol{u}^n\|^2$ в этом случае также имеют место формулы (2.4), но из (2.6) и тождества Бетти следует, что при любых n справедливо равенство $a_n = a_{n-1} + \|\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^{n-1}\|^2$, т. е. в правой части (2.5) знак меняется на противоположный и последовательность $\{a_n\}$ становится возрастающей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шваб А. А.** Неклассическая упругопластическая задача // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1988. № 1. С. 140–146.
2. **Шваб А. А.** Некорректные статические задачи теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 6. С. 98–106.
3. **Лаврентьев М. М.** О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20. С. 819–842.
4. **Дверес М. Н., Фомин А. В.** Об аналогии методов решения контактных задач определения напряженного состояния // Машиноведение. 1985. № 6. С. 76–81.
5. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
6. **Цвелодуб И. Ю.** Об одной обратной задаче для упругой среды, содержащей физически нелинейное включение // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 3. С. 424–430.
7. **Цвелодуб И. Ю.** Об одной пространственной обратной задаче для физически нелинейной неоднородной среды // Прикл. математика и механика. 2005. Т. 69, вып. 2. С. 290–295.
8. **Цвелодуб И. Ю.** Обратные задачи неупругого деформирования неоднородных сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 2. С. 61–69.

Поступила в редакцию 29/VI 2005 г.