УДК 519.633.6

Обратная задача для модели развития популяции с учетом возраста организмов и миграционных потоков*

А.Ю. Щеглов[1,2], С.В. Нетесов[2]

[1]MSU-PPI University in Shenzhen, Shenzhen, 518172, China

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991

E-mails: shcheg@cs.msu.ru (Щеглов А.Ю.), sv954@yandex.ru (Нетесов С.В.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 1, Vol. 17, 2024.

Щеглов А.Ю., Нетесов С.В. Обратная задача для модели развития популяции с учетом возраста организмов и миграционных потоков // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 1. — С. 113–120.

Рассматривается обратная задача восстановления коэффициента в дифференциальном уравнении модели развития однородной биологической популяции организмов, структурированных по возрасту. В модели учитывается влияние миграционных потоков на изменение размера популяции. Устанавливаются условия, обеспечивающие единственность решения обратной задачи. Предлагается краткий обзор алгоритмов для численного решения обратной задачи.

DOI: 10.15372/SJNM20240109
EDN: ZWDQMJ

Ключевые слова: *обратная задача, возрастное структурирование, миграционные потоки, интегральное уравнение Вольтерра.*

Shcheglov A.Yu., Netessov S.V. The inverse problem for a age-structured population dynamics model with account to migration flows // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 1. — P. 113–120.

An inverse problem of reconstructing a coefficient in the differential equation of a model of development for a homogeneous biological population of organisms structured by age is considered. The model takes into account the impact of migration flows on population size changes. Conditions are established to ensure the uniqueness of the solution of the inverse problem. A brief overview of algorithms for the numerical solution of the inverse problem is provided.

Keywords: *inverse problem, age structuring, migration flows, Volterra integral equations.*

1. Введение

Начало математических исследований популяций с учетом роста организмов можно связать с работой Л. Эйлера [1]. Анализ популяций с возрастным структурированием получил развитие в большом цикле публикаций А.Д. Лотки (см., например, [2, 3]). В настоящее время модели биологических сообществ с возрастным структурированием

*Работа выполнена при частичной поддержке National Natural Science Foundation of China (проект № 12171036) и Beijing Natural Science Foundation (Key Project № Z210001).

привлекают к себе повышенное внимание [4–11] и используются при изучении развития популяций как микроорганизмов (клеток [7, 8], бактерий [5], вирусов [10, 11]), так и многих других биологических видов. Обратные задачи для популяционных моделей исследовались в работах [12–15].

Математическая модель динамики популяции с возрастной структурой и миграцией особей, выбираемая здесь для построения обратной задачи, была представлена в работе [9, с. 73] и формализуется в виде начально-краевой задачи

$$u_x(x,t)+u_t(x,t)+\mu(x)u(x,t)=m(x)\eta(t)-e(x)u(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u(0,t)=\int_0^l \beta(\xi)u(\xi,t)\,d\xi, \quad t\in[0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,l], \tag{3}$$

где $Q_T=\{(x,t)\colon 0<x<l, 0<t\leqslant T\}$ и $\overline{Q}_T$ — замыкание области Q_T. Функция $u(x,t)$ определяет число особей возраста x (или их плотность) в популяции в момент времени t; функции $\mu(x)$, $m(x)\eta(t)$ и $e(x)$ характеризуют интенсивность смертности, въездной миграции (иммиграции) и выездной миграции (эмиграции) соответственно; $\beta(x)$ — плотность репродуктивности (появления новорожденных у родителя возраста x); $\varphi(x)$ — начальное распределение особей в популяции. Неотрицательность всех функций является естественным модельным ограничением.

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x,t)$ по заданным значениям l, T и известным функциям $\mu(x)$, $m(x)$, $\eta(t)$, $e(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(x)$, $x\in[0,l]$ и $t\in[0,T]$.

В рамках обратной задачи при заданных значениях $l>0$ и $T>0$ и функциях $\mu(x)$, $m(x)$, $e(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(x)$, $x\in[0,l]$, требуется восстановить две функции $\eta(t)$ и $u(x,t)$ по известному значению $a\in(0,l]$ и заданной дополнительно функции

$$g(t)=u(a,t), \quad t\in[0,T]. \tag{4}$$

2. Прямая задача и условия ее разрешимости

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$\mu(x),e(x)\in C[0,l], \qquad m(x),\beta(x),\varphi(x)\in C^1[0,l], \qquad \eta(t)\in C[0,T],$$

$$\mu(x),m(x),e(x),\beta(x),\varphi(x),\eta(t)\geqslant 0 \quad \forall x\in[0,l],\ t\in[0,T], \quad \varphi(0)=\int_0^l\beta(s)\varphi(s)\,ds,$$

то существует единственное решение $u(x,t)\in C^1\left(\overline{Q}_T\right)$ *прямой задачи* (1)–(3).

Доказательство. Представленное ниже доказательство аналогично изложенному для схожей теоремы [15], касающейся модели без учета миграционных потоков.

Интегрирование дифференциального уравнения (1) с использованием решений его характеристической системы с учетом условия (3) дает [16] формулу для решения прямой задачи (1)–(3) на части области определения искомой функции $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\widehat{u}(x,t)=\varphi(x-t)e^{-\int_{x-t}^{x}(\mu(s)+e(s))\,ds}+$$
$$\int_0^t m(\tau+x-t)\eta(\tau)e^{-\int_{\tau+x-t}^{x}(\mu(s)+e(s))\,ds}\,d\tau, \quad 0<t<x\leqslant l, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5}$$

При введении функции $\psi(t) = u(0,t)$, $t \in [0,T]$, и интегрировании уравнения (1) на его характеристиках для остальных точек (x,t) из области $\overline{Q}_T$ для решения $u(x,t)$ имеем [16] формулу

$$u(x,t) = \psi(t-x)e^{-\int_0^x (\mu(s)+e(s))\,ds} +$$
$$\int_{t-x}^{t} m(\tau - t + x)\eta(\tau)e^{-\int_{\tau-t+x}^{x}(\mu(s)+e(s))\,ds}\,d\tau, \quad 0 < x \leqslant \min\{l,t\},\ \ 0 < t \leqslant T, \qquad (6)$$

в которой функция $\psi(t)$, $t \in [0,T_1]$, где $T_1 = \min\{l,T\}$, является решением построенного на основе условия (2) и формул (5), (6) интегрального уравнения

$$\psi(t) = \int_0^t K(t,s)\psi(s)\,ds + H_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1 = \min\{l,T\}, \qquad (7)$$

где для $t \in [0,T_1]$,

$$K(t,s) = \beta(t-s)e^{-\int_0^{t-s}(\mu(\xi)+e(\xi))d\xi}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1, \qquad (8)$$

$$H_1(t) = \int_0^t \beta(s)\int_{t-s}^{t} m(\tau - t + s)\eta(\tau)e^{-\int_{\tau-t+s}^{s}(\mu(\xi)+e(\xi))\,d\xi}\,d\tau\,ds + \int_t^l \beta(s)\widehat{u}(s,t)\,ds. \qquad (9)$$

Получаем, что задача (1)–(3) редуцируется [16, теорема 4.2.2] для $t \in [0,T_1]$ к интегральному уравнению Вольтерра II рода (7) относительно функции $\psi(t)$ с вычислением значений решения $u(x,t)$ по формулам (5), (6). При выполнении условий теоремы 1 единственное решение $\psi(t) \in C\,[0,T_1]$ уравнения (7) существует [17] и для него, исходя из уравнения (7) при $t = 0$, выполняется условие

$$\psi(0) = \varphi(0) = \int_0^l \beta(s)\varphi(s)\,ds. \qquad (10)$$

Сравнивая с учетом равенства (10) значения функции $u(x,t)$ при $t = x \in [0,T_1]$, вычисляемые по формулам (5) и (6), получаем, что $u(x,t)\ |_{x=t-0} = u(x,t)\ |_{x=t+0}$, $t \in (0,T_1)$. Следовательно, при выполнении условий теоремы после решения уравнения (7) имеем вычисляемые по формулам (5) и (6) значения $u(x,t) \in C\left(\overline{Q}_{T_1}\right)$.

Из условий теоремы и формул (8), (9) следует дифференцируемость по аргументу t функций $K(t,s)$ и $H_1(t)$. Из этого следует непрерывная дифференцируемость правой части уравнения (7). Следовательно, непрерывна производная $\psi'(t)$ левой части (7). Получаемые при дифференцировании по x формулы (6) при $t \in (0,T_1)$ значения производной $u_x(x,t)\ |_{x=t-0}$ совпадают при условиях теоремы и равенстве (10) с получаемыми при дифференцировании формулы (5) значениями производной $u_x(x,t)\ |_{x=t+0}$, $t \in (0,T_1)$, т. е. $u_x(x,t)\ |_{x=t-0} = u_x(x,t)\ |_{x=t+0}$, $t \in (0,T_1)$. Аналогично устанавливается равенство $u_t(x,t)\ |_{x=t-0} = u_t(x,t)\ |_{x=t+0}$, $t \in (0,T_1)$. В итоге имеем решение $u(x,t) \in C^1\left(\overline{Q}_{T_1}\right)$, и в случае $T \in (0,l]$ теорема 1 доказана.

При $T > l$ однозначное решение $u(x,t)$ со значением $t = T_1 = l$ используем как начальное условие для начально-краевой постановки, аналогичной задаче (1)–(3), с аргументом $t \in [l,T_2]$, где $T_2 = \min\{2l,T\}$, и устанавливаем однозначную разрешимость задачи (1)–(3) для аргументов $(x,t) \in \overline{Q}_{T_2}$. Затем, продлевая область изменения переменной t последовательно на отрезки $[(j-1)l, jl]$, $j = 3,4,\ldots,N$, где $N = \arg\max_{j\in\mathbb{N}}((j-1)l < T \leqslant jl)$, и при этом $T_N = T$, и устанавливая однозначную разрешимость задачи (1)–(3) последовательно на областях $\overline{Q}_{T_j}$, $j = 2,3,\ldots,N$, получаем за N однотипных шагов единственное решение $u(x,t) \in C^1\left(\overline{Q}_T\right)$ задачи (1)–(3) на всей области его определения $\overline{Q}_T = \overline{Q}_{T_N}$. Теорема 1 доказана. □

3. Обратная задача

Определение. Решением обратной задачи (1)–(4) пусть называются две функции $\eta(t)$ и $u(x,t)$ такие, что

$$\eta(t) \in C[0,T], \quad \eta(t) \geqslant 0 \ \forall t \in [0,T], \quad u(x,t) \in C^1\left(\overline{Q}_T\right),$$

при заданной функции $g(t)$ для известного значения $a \in (0,l]$ и при заданных функциях $\mu(x)$, $m(x)$, $e(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$g(t) \in C[0,T], \ \ \mu(x), e(x) \in C[0,l], \ \ m(x), \beta(x), \varphi(x) \in C^1[0,l], \ \ g(0) = \varphi(a), \tag{11}$$

$$\mu(x), m(x), e(x), \beta(x), \varphi(x), g(t) \geqslant 0 \ \ \forall x \in [0,l], \ \ t \in [0,T], \ \ \varphi(0) = \int_0^l \beta(s)\varphi(s)\,ds, \tag{12}$$

выполняются уравнения (1)–(3) и дополнительное условие (4).

Теорема 2. *При известных значениях* $l > 0$, $T > 0$, $a \in (0,l]$ *и заданных функциях* $\mu(x)$, $m(x)$, $e(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(x)$, $g(t)$, *удовлетворяющих условиям* (11), (12) *и*

$$g(t) \in C^1[0,T], \qquad m(a) > 0, \tag{13}$$

обратная задача (1)–(4) *может иметь не более одного решения.*

Доказательство. Пусть при выполнении условий (11)–(13) пара функций $\eta_1(t)$, $u_1(x,t)$ и другая пара функций $\eta_2(t)$, $u_2(x,t)$ являются двумя решениями обратной задачи (1)–(4). Из формулы (5) при $x = a$ и условия (4) следует, что функция $\eta(t)$ из любого решения $\eta(t)$, $u(x,t)$ обратной задачи удовлетворяет линейному интегральному уравнению Вольтерра I рода при $t \in [0,t_1]$, где $t_1 = \min\{a,T\}$:

$$\int_0^t e^{-\int_{\tau+a-t}^{a}(\mu(s)+e(s))\,ds} m(\tau+a-t)\eta(\tau)\,d\tau = g(t) - \varphi(a-t)e^{-\int_{a-t}^{a}(\mu(s)+e(s))\,ds}. \tag{14}$$

Дифференцируя равенство (14) по $t \in [0,t_1]$, получаем уравнение

$$\eta(t) = \int_0^t G(t,\tau)\eta(\tau)\,d\tau + H_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{15}$$

где ядро $G(t,\tau)$ и неоднородность $H_2(t)$ линейного уравнения (15) имеют вид

$$G(t,\tau) = \left[\frac{m'(\xi) + \big(\mu(\xi)+e(\xi)\big)m(\xi)}{m(a)} e^{-\int_\xi^a(\mu(s)+e(s))\,ds}\right]\Bigg|_{\xi=\tau+a-t}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1, \tag{16}$$

$$H_2(t) = \frac{g'(t)}{m(a)} + \left[\frac{\varphi'(\xi) + \big(\mu(\xi)+e(\xi)\big)\varphi(\xi)}{m(a)} e^{-\int_\xi^a(\mu(s)+e(s))\,ds}\right]\Bigg|_{\xi=a-t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{17}$$

При выполнении условий (11)–(13) теоремы 2 определяемые формулами (16), (17) функции $G(t,\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$, и $H_2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, являются непрерывными. Следовательно, линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода (15) имеет [17] единственное решение $\eta(t)$ для $t \in [0,t_1]$. Соответственно, функции $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ из различных решений обратной задачи совпадают: $\eta_1(t) = \eta_2(t) = \overline{\eta}(t)$ при $t \in [0,t_1]$. Отсюда (по теореме 1 с $T = t_1$) существует единственное решение прямой задачи (1)–(3) $u(x,t) \in C^1\left(\overline{Q}_{t_1}\right)$.

Тогда и функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ совпадают: $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ на множестве $\overline{Q}_{t_1}$, в том числе и при $x = 0$: $u_1(0,t) = u_2(0,t) = \psi(t)$ для $t \in [0, t_1]$. Следовательно, при исходных значениях T и a таких, что $T \leqslant a$, т. е. при $t_1 = \min\{a, T\} = T$, теорема 2 доказана.

Если же исходные a и T таковы, что $a < T$, то тогда при $t \in [a, \min\{2a, T\}]$, т. е. при $t \in [(j-1)a, t_j]$, $t_j = \min\{ja, T\}$, со значением $j = 2$, а затем последовательно и для $j = 3, 4, \ldots, n$, где $n = \mathrm{entier}(T/a) + 1$, а $\mathrm{entier}(x)$ — целая часть числа x, в силу формулы (6) и условия (4) любое решение $\eta(t)$, $u(x,t)$ обратной задачи удовлетворяет уравнению Вольтерра I рода для функции $\eta(t)$ при $j = 2, 3, \ldots, n$ для $t \in [(j-1)a, t_j]$:

$$\int_{t-a}^{t} e^{-\int_{\tau-t+a}^{a}(\mu(s)+e(s))\,ds} m(\tau - t + a)\eta(\tau)\,d\tau = g(t) - \psi(t-a)e^{-\int_0^a(\mu(s)+e(s))\,ds}. \tag{18}$$

Дифференцируя равенство (18) по $t \in [(j-1)a, t_j]$ с $j = 2, 3, \ldots, n$ и учитывая, что при $t \in [(j-2)a, (j-1)a]$ для предыдущего значения $(j-1)$ функция $\eta(t)$ восстанавливается однозначно в форме $\overline{\eta}(t)$, получаем уравнение (при $j = 2, 3, \ldots, n$)

$$\eta(t) = \int_{(j-1)a}^{t} G(t,\tau)\eta(\tau)\,d\tau + H_3(t), \qquad t \in [(j-1)a, t_j]\,, \tag{19}$$

где ядро $G(t,\tau)$ уравнения (19) с аргументами (t,τ), удовлетворяющими неравенствам $(j-1)a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_j$, определяется формулой (16), и неоднородность $H_3(t)$ уравнения (19) имеет вид (при $j = 2, 3, \ldots, n$)

$$H_3(t) = \int_{t-a}^{(j-1)a} \left[\frac{m'(\xi) + \big(\mu(\xi) + e(\xi)\big)m(\xi)}{m(a)} e^{-\int_\xi^a(\mu(s)+e(s))\,ds} \right]\Bigg|_{\xi=\tau+a-t} \overline{\eta}(\tau)\,d\tau +$$

$$\frac{g'(t)}{m(a)} + \frac{m(0)\overline{\eta}(t-a) - \psi'(t-a)}{m(a)} e^{-\int_0^a(\mu(s)+e(s))\,ds}, \quad (j-1)a \leqslant t \leqslant t_j. \tag{20}$$

Последовательно для каждого значения $j = 2, 3, \ldots, n$ в силу условий (11)–(13) ядро $G(t,\tau)$, $(j-1)a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_j$, и правая часть $H_3(t)$, $(j-1)a \leqslant t \leqslant t_j$, уравнения (19), определяемые формулами (16), (20), являются непрерывными функциями. Следовательно, линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода (19) имеет [17] единственное решение $\eta(t)$, $t \in [(j-1)a, t_j]$, непрерывно продолжающее функцию $\overline{\eta}(t)$, построенную при меньших j на отрезке $[0, (j-1)a]$. Соответственно, функции $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ из двух решений обратной задачи (1)–(4), как решения уравнения (19) при текущем j, имеют совпадающие значения: $\eta_1(t) = \eta_2(t) = \overline{\eta}(t)$ при $t \in [(j-1)a, t_j]$. Отсюда (по теореме 1 для $T = t_j$) существует единственное решение прямой задачи (1)–(3) $u(x,t) \in C^1\big(\overline{Q}_{t_j}\big)$. Тогда и функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ имеют совпадающие значения: $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ на множестве $\overline{Q}_{t_j}$. Доказательство завершается при $j = n$ и $t_n = T$, что дает равенства $\eta_1(t) = \eta_2(t)$, $t \in [0,T]$, и $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$, и опровергает сделанное в начале доказательства предположение о существовании двух различных решений обратной задачи (1)–(4). Теорема 2 доказана. □

Приближенное решение обратной задачи (1)–(4) проводится последовательным численным решением линейного интегрального уравнения Вольтерра II рода (15) с получением приближения функции $\eta(t)$ при $t \in [0, t_1] = [0, \min\{a, T\}]$ и уравнения (7) для $t \in [0, t_1]$ с формулами (5), (6) для восстановления функции $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}_{t_1}$, сначала на первом шаге с $j = 1$, затем для последующих шагов с $j = 2, 3, \ldots, n$, $n = \mathrm{entier}(T/a) + 1$, численно решаются линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода (19) с получением приближения функции $\eta(t)$ при $t \in [(j-1)a, t_j]$ и уравнение (7) с формулами (5), (6) для восстановления функции $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}_{t_j} \setminus \overline{Q}_{t_{j-1}}$.

Численное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра II рода (15), (7), (19) может осуществляться стандартными методами [17]. При этом, учитывая сведение вычислений к решению уравнений Вольтерра II рода (15), (19) с неоднородностями, содержащими производные заданных функций, некорректный характер обратной задачи (1)–(4) непосредственно связан с проблемой неустойчивости численного дифференцирования заданной в форме дополнительного условия функции $g(t)$, а также, возможно, заданных исходных функций $\varphi(x)$, $m(x)$, $\beta(x)$, в том случае, если их значения известны в виде приближений непрерывными функциями с заданными погрешностями.

Альтернативой численному решению линейных интегральных уравнений Вольтерра II рода (15), (7), (19) с приближенно вычисленными значениями производных исходных функций может быть решение вместе с уравнениями Вольтерра II рода (7) линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода (14), (18), для которых, исходя из свойств ядер интегральных уравнений, разработаны специальные виды регуляризирующих алгоритмов (см., например, [18–22]).

Литература

1. **Euler L.** Recherches generales sur la mortalite et la multiplication du genre humaine // Histoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres. — 1760. — Vol. 16. — P. 144–164.
2. **Lotka A.J.** Elements of Mathematical Biology. — New York: Dover Publication, 1924.
3. **Lotka A.J.** Population analysis: a theorem regarding the stable age distribution // Proc. of the Royal Society. — 1927. — Vol. 115A, № 1. — P. 700–721.
4. **Espenshade T.J., Bouvier L.F., Arthur W.B.** Immigration and the stable population model // Demography. — 1982. — Vol. 19, № 1. — P. 125–133.
5. **Gyllenberg M.** Nonlinear age-dependent population dynamics in continuously propagated bacterial cultures // Math. Biosci. — 1982. — Vol. 62. — P. 45–74.
6. **Bacaer N.** The asymptotic behavior of the McKendrick equation with immigration // Math. Popul. Stud. — 2003. — Vol. 10. — P. 1–20.
7. **Shaoli Wang, Jianhong Wu, Libin Rong.** A note on the global properties of an age-structured viral dynamic model with multiple target cell populations // Math. Biosci. Eng. — 2017. — Vol. 14, № 3. — P. 805–820.
8. **Krzyzanski W., Wiczling P., Gebre A.** Age-structured population model of cell survival // J. Pharmacokinet Pharmacodyn. — 2017. — Vol. 44, № 4. — P. 305–316.
9. **Iannelli M., Milner F.** The Basic Approach to Age-Structured Population Dynamics. Models, Methods and Numerics. — Cham: Springer, 2017.
10. **Semendyaeva N.L., Orlov M.V., Tang Rui, Yang Enping.** Analytical and numerical investigation of the SIR mathematical model // Comput. Math. and Modeling. — 2022. — Vol. 33, № 3. — P. 284–299.
11. **Lu Gao, Yuanshun Tan, Jin Yang, Changcheng Xiang.** Dynamic analysis of an age structure model for oncolytic virus therapy // Math. Biosci. Eng. — 2023. — Vol. 20, № 2. — P. 3301–3323.
12. **Denisov A.M., Makeev A.S.** Iterative methods for solving an inverse problem for a population model // J. Comp. Math. and Math. Physics. — 2004. — Vol. 44, № 8. — P. 1404–1413.

13. **Perthame B., Zubelli J.** On the inverse problem for a size-structured population model // Inverse Problems. — 2007. — Vol. 23, № 3. — P. 1037–1052.

14. **Makeev A.S.** Application of Tikhonov's regularization method to solve inverse problems for two population models // Comput. Math. and Modeling. — 2007. — Vol. 18, № 1. — P. 1–9.

15. **Shcheglov A.Yu.** Uniqueness of the solution of the inverse problem for a model of the dynamics of an age-structured population // Math. Notes. — 2022. — Vol. 111, № 1. — P. 139–146.

16. **Денисов А.М., Разгулин А.В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МАКС Пресс, 2009.

17. **Polyanin A.D., Manzhirov A.V.** Handbook of Integral Equations. — CRC Press, 1998.

18. **Sergeev V.O.** Regularization of the Volterra equation of the first kind // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1971. — Vol. 197, № 3. — P. 531–534.

19. **Апарцин А.С., Бакушинский А.Б.** Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // Дифференциальные и интегральные уравнения. — Иркутск: Изд-во Иркутского гос. ун-та, 1972. — Вып. 1. — С. 248–258.

20. **Denisov A.M.** On approximate solution of Volterra equation of the first kind // J. Comp. Math. and Math. Physics. — 1975. — Vol. 15, № 4. — P. 237–239.

21. **Magnitskii N.A.** A method of regularizing Volterra equations of the first kind // J. Comp. Math. and Math. Physics. — 1975. — Vol. 15, № 5. — P. 221–228.

22. **Карчевский А.Л.** Решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода типа свертки методом квадратурных сумм // Сиб. журн. индустр. математики. — 2020. — Т. 23, № 3. — С. 40–52. Перевод: Karchevsky A.L. Solution of the convolution type Volterra integral equations of the first kind by the quadrature-sum method // J. Appl. Ind. Math. — 2020. — Vol. 14, № 3. — P. 503–512.

Поступила в редакцию 18 сентября 2023 г.
После исправления 5 октября 2023 г.
Принята к печати 27 октября 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Euler L.** Recherches generales sur la mortalite et la multiplication du genre humaine // Histoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres. — 1760. — Vol. 16. — P. 144–164.

2. **Lotka A.J.** Elements of Mathematical Biology. — New York: Dover Publication, 1924.

3. **Lotka A.J.** Population analysis: a theorem regarding the stable age distribution // Proc. of the Royal Society. — 1927. — Vol. 115A, № 1. — P. 700–721.

4. **Espenshade T.J., Bouvier L.F., Arthur W.B.** Immigration and the stable population model // Demography. — 1982. — Vol. 19, № 1. — P. 125–133.

5. **Gyllenberg M.** Nonlinear age-dependent population dynamics in continuously propagated bacterial cultures // Math. Biosci. — 1982. — Vol. 62. — P. 45–74.

6. **Bacaer N.** The asymptotic behavior of the McKendrick equation with immigration // Math. Popul. Stud. — 2003. — Vol. 10. — P. 1–20.

7. **Shaoli Wang, Jianhong Wu, Libin Rong.** A note on the global properties of an age-structured viral dynamic model with multiple target cell populations // Math. Biosci. Eng. — 2017. — Vol. 14, № 3. — P. 805–820.

8. **Krzyzanski W., Wiczling P., Gebre A.** Age-structured population model of cell survival // J. Pharmacokinet Pharmacodyn. — 2017. — Vol. 44, № 4. — P. 305–316.

9. **Iannelli M., Milner F.** The Basic Approach to Age-Structured Population Dynamics. Models, Methods and Numerics. — Cham: Springer, 2017.
10. **Semendyaeva N.L., Orlov M.V., Tang Rui, Yang Enping.** Analytical and numerical investigation of the SIR mathematical model // Comput. Math. and Modeling. — 2022. — Vol. 33, № 3. — P. 284–299.
11. **Lu Gao, Yuanshun Tan, Jin Yang, Changcheng Xiang.** Dynamic analysis of an age structure model for oncolytic virus therapy // Math. Biosci. Eng. — 2023. — Vol. 20, № 2. — P. 3301–3323.
12. **Denisov A.M., Makeev A.S.** Iterative methods for solving an inverse problem for a population model // J. Comp. Math. and Math. Physics. — 2004. — Vol. 44, № 8. — P. 1404–1413.
13. **Perthame B., Zubelli J.** On the inverse problem for a size-structured population model // Inverse Problems. — 2007. — Vol. 23, № 3. — P. 1037–1052.
14. **Makeev A.S.** Application of Tikhonov's regularization method to solve inverse problems for two population models // Comput. Math. and Modeling. — 2007. — Vol. 18, № 1. — P. 1–9.
15. **Shcheglov A.Yu.** Uniqueness of the solution of the inverse problem for a model of the dynamics of an age-structured population // Math. Notes. — 2022. — Vol. 111, № 1. — P. 139–146.
16. **Denisov A.M., Razgulin A.V.** Obyknovennye differencial'nye uravneniya. — M.: Izd-vo MAKS Press, 2009.
17. **Polyanin A.D., Manzhirov A.V.** Handbook of Integral Equations. — CRC Press, 1998.
18. **Sergeev V.O.** Regularization of the Volterra equation of the first kind // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1971. — Vol. 197, № 3. — P. 531–534.
19. **Apartsyn A.S., Bakushinskii A.B.** Priblizhennoe reshenie integral'nykh uravnenii Vol'terra I roda metodom kvadraturnykh summ // Differencial'nye i integral'nye uravneniya. — Irkutsk: Izd-vo Irkutskogo gos. un-ta, 1972. — Vyp. 1. — S. 248–258.
20. **Denisov A.M.** On approximate solution of Volterra equation of the first kind // J. Comp. Math. and Math. Physics. — 1975. — Vol. 15, № 4. — P. 237–239.
21. **Magnitskii N.A.** A method of regularizing Volterra equations of the first kind // J. Comp. Math. and Math. Physics. — 1975. — Vol. 15, № 5. — P. 221–228.
22. **Karchevsky A.L.** Reshenie integral'nogo uravneniya Vol'terra pervogo roda tipa svertki metodom kvadraturnykh summ // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2020. — T. 23, № 3. — S. 40–52. Perevod: Karchevsky A.L. Solution of the convolution type Volterra integral equations of the first kind by the quadrature-sum method // J. Appl. Ind. Math. — 2020. — Vol. 14, № 3. — P. 503–512.