3. **Костров Б. В.** Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду.— ПММ, 1966, т. 30, № 1.
4. **Афанасьев Е. Ф.** Некоторые однородные решения динамической теории упругости.— В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
5. **Broberg К. В.** The propagation of a brittle crack.— «Arkiv Fysik», 1960, vol. 18, N 2, p. 159—192.
6. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1966.
7. **Костров Б. В.** Распространение трещин с переменной скоростью.— ПММ, 1974, т. 38, № 3.

УДК 539.374

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ

В. М. Мирсалимов

(Липецк)

Задача теории упругости для пластины, ослабленной периодической системой отверстий, рассматривалась в ряде работ [1, 2]. С увеличением напряжений в пластине возле отверстий возникают пластические зоны. Расположение пластических областей носит периодический характер. Упругопластическая задача для тонкой пластины с одиночным отверстием решена в [3]. Периодическим упругопластическим задачам для тонкой пластины посвящен ряд работ [4, 5], в [4] для решения задачи использовался способ аппроксимации функции напряжений в пластической области бигармонической функцией. В отличие от работ [4, 5], где использовался метод возмущений, для решения упругопластической задачи применяется другой метод, позволяющий получать решение при любых относительных размерах области.

Пусть имеется пластина с одинаковыми круговыми отверстиями, имеющими радиус $R(R < 1)$ и центры в точках

$$P_m = m\omega,\ (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),\ \omega = 2.$$

Обозначим контур отверстия с центром в точке P_m через L_m, соответствующую упругопластическую границу через Γ_m, а внешность контуров Γ_m через D_z. К контуру отверстия L_m приложена постоянная нормальная нагрузка $\sigma_r = p$ и равная нулю касательная, составляющая $\tau_{r\theta} = 0$ (r, θ — полярные координаты), а в пластине имеют место постоянные средние напряжения $\sigma_x = \sigma_x^\infty$, $\sigma_y = \sigma_y^\infty$, $\tau_{xy} = 0$ (растяжение на бесконечности).

В качестве условия пластичности принимается условие Треска—Сен-Венана и предполагается, что в пластической области выполняется неравенство $\sigma_\theta \geqslant \sigma_r > 0$. Характеристики в пластической зоне будут радиальными прямыми, а напряжения равны [6]

$$\sigma_r = \sigma_s + (p - \sigma_s)R/r,\ \sigma_\theta = \sigma_s,\ \tau_{r\theta} = 0. \tag{1}$$

Здесь σ_s — предел текучести материала при простом растяжении. Для выполнения неравенства $\sigma_\theta \geqslant \sigma_r > 0$ нагрузка, очевидно, должна удовлетворять условию $p \leqslant \sigma_s$.

В упругой области напряжения определяются по формулам Колосова—Мусхелишвили [7]

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \tag{2}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[\bar z\Phi'(z) + \Psi(z)]\,e^{2i\theta}.$$

На неизвестном контуре Γ_m, разделяющем упругую и пластическую области, все напряжения непрерывны. Используя (1), (2), получим на контуре Γ_m условия

$$4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) = 2\sigma_s + R(p - \sigma_s)/r;$$

$$\bar z\Phi'(z) + \Psi(z) = R(\sigma_s - p)/2r]e^{-2i\theta}.$$

Перейдем на параметрическую плоскость ζ с помощью преобразования $z = \omega(\zeta)$. Аналитическая функция $z = \omega(\zeta)$ осуществляет конформное отображение области D_z на область D_ζ в плоскости ζ, являющуюся внешностью окружностей l_m радиуса λ, с центрами в точках P_m.

Для определения трех аналитических функций $\varphi(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$ и $\omega(\zeta)$ получаем нелинейную краевую задачу на l_m

$$4\,\mathrm{Re}\,\varphi(\zeta) = 2\sigma_s + R(p - \sigma_s)/\sqrt{\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}}; \tag{3}$$

$$\overline{\omega(\zeta)}/\omega'(\zeta)\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = R(\sigma_s - p)\overline{\omega(\zeta)}/2\omega(\zeta)\sqrt{\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}}. \tag{4}$$

Искомые функции ищем в виде рядов

$$\varphi(\zeta) = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4} + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\rho^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!}; \tag{5}$$

$$\psi(\zeta) = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\rho^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!} - \tag{6}$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}s^{(2k+1)}(\zeta)}{(2k+1)!};$$

$$\omega(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\rho^{(2k-1)}(\zeta)}{(2k+1)!}, \tag{7}$$

где

$$\rho(\zeta) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\omega}\zeta\right)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2;$$

$$s(\zeta) = \sum_m{}' \left[\frac{P_m}{(\zeta - P_m)^2} - \frac{2\zeta}{P_m^2} - \frac{1}{P_m}\right] \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m = 0$. Приведем теперь зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты выражений (5)—(7). Из условий симметрии относительно координатных осей находим, что

$$\mathrm{Im}\,\alpha_{2k+2} = \mathrm{Im}\,\beta_{2k+2} = \mathrm{Im}\,A_{2k+2} = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из условия равенства нулю главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D_ζ, следует, что

$$\alpha_0 = (\pi^2/24)\beta_2\lambda^2.$$

В силу выполнения условий периодичности система граничных условий (3), (4) на l_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) заменяется двумя функциональными уравнениями, например, на контуре l_0.

Для составления уравнений относительно остальных коэффициентов функций $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности точки $\zeta = 0$

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{\zeta^{2k+2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k}\zeta^{2j}; \tag{8}$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2}(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{\zeta^{2k+2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}\lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k}\zeta^{2j} - \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)\alpha_{2k+2}\lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2k+2) r_{j,k}\zeta^{2j}; \tag{9}$$

$$\omega(\zeta) = \zeta - \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)} \frac{1}{\zeta^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2}\lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}\zeta^{2j+1}}{(2j+1)}, \tag{10}$$

$$r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)!\, g_{j+k+1}}{(2j)!\,(2k+1)!\,2^{2j+2k+2}},\quad g_{j+k+1} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j+2k+2}}.$$

Разложив правые части (3), (4) в ряды Лорана, подставив в граничные условия (3), (4) на контуре $l_0(\zeta = \lambda\, e^{i\theta})$ вместо $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ их разложения (8)—(10) и сравнив коэффициенты при $e^{2ik\theta}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно α_{2k}, β_{2k}, A_{2k}. Ниже приводятся уравнения первого приближения

$$aX - a_1Y - A_2Z = B\left[kb + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)b_1\right],$$

$$aY - A_2X = B\left(\frac{1}{2}b_1k + k_1b\right),$$

$$aZ + a_1X = B\left(k_2b + \frac{1}{2}b_1k\right),\quad 2\alpha_2(1 + \lambda^4 r_{1,0}) = -Bb_1,$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) - \sigma_s + 2(\alpha_0 + \alpha_2\lambda^2 r_{0,0}) = -Bb,$$

$$\lambda^2\left[d\left(b^2 + \frac{1}{2}b_1^2\right) + 2d_1bb_1\right] = 1,\quad dbb_1 + d_1\left(b^2 + \frac{1}{2}b_1^2\right) = 0,$$

$$X = 2\alpha_2A_2 + \frac{2}{3}\alpha_2A_2\lambda^8 r_{1,0}^2 + a\beta_2 + A_2\beta_4\lambda^4 r_{1,0} + A_2\gamma_0,$$

$$Y = -2\alpha_2 a + a\beta_4 + A_2\beta_2,\quad a = 1 + A_2\lambda^2 r_{0,0},$$

$$Z = 2a\alpha_2\lambda^4 r_{1,0} + a\gamma_0 + A_2\gamma_1 + A_2\beta_2\lambda^4 r_{1,0},$$

$$a_1 = \frac{1}{3}A_2\lambda^4 r_{1,0},\quad B = \frac{1}{2}R(\sigma_s - p),$$

$$k = a^2 - A_2^2 + \frac{1}{3} A_2^2 \lambda^8 r_{1,0}^2, \quad k_1 = aA_2\left(1 + \frac{1}{3}\lambda^4 r_{1,0}\right),$$

$$k_2 = aA_2(\lambda^4 r_{1,0} - 1), \quad d = a^2 + A_2^2\left(1 + \frac{1}{9} r_{1,0}^2 \lambda^8\right),$$

$$d_1 = -aA_2\left(1 - \frac{1}{3}\lambda^4 r_{1,0}\right),$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty\right) + \beta_2\lambda^2 r_{0,0} + \beta_4\lambda^4 r_{0,1} - 4\alpha_2\lambda^2 r_{0,0},$$

$$\gamma_1 = \beta_2\lambda^4 r_{1,0} + \beta_4\lambda^6 r_{1,1} - 8\alpha_2\lambda^4 r_{1,0}.$$

Результаты расчета в первых двух приближениях при $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = q$ даны в таблице, где $a_* = 2B$. На фиг. 1 представлены зависимости параметра λ от величины приложенной нагрузки q/σ_s при $p = 0$ для некоторых значений радиуса отверстия $R = 0,5$; $0,4$; $0,3$; $0,2$; $0,1$ (кривые *1*—*5*).

Положив в (10) $\zeta = \lambda e^{i\theta}$, получим уравнение упругопластической границы

$$r = |\omega(\lambda e^{i\theta})| = f(\theta).$$

В первом приближении

$$r^2 = \lambda^2 (d + 2d_1 \cos 2\theta).$$

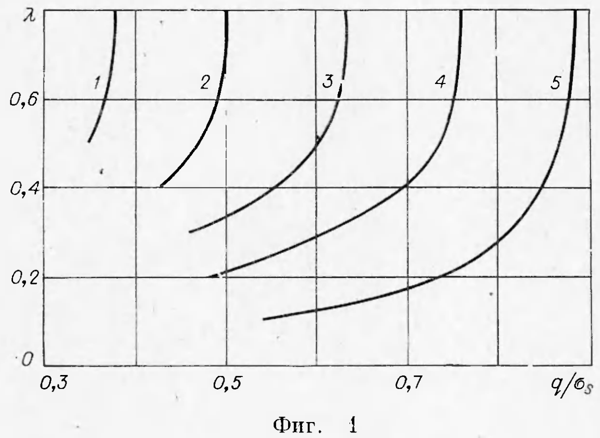
При этом

$$r_{\max} = \lambda\left[1 + A_2\left(-1 + \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,0}}{2j+1}\lambda^{2j}\right)\right]; \tag{11}$$

$$r_{\min} = \lambda\left[1 + A_2\left(1 + \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j r_{j,0}}{2j+1}\lambda^{2j}\right)\right].$$

На фиг. 2 упругопластическая граница представлена для случая $R = 0,3$, $p = 0$, $q/\sigma_s = 0,627$ ($\lambda = 0,7$, $r_{\max} = 0,85$, $r_{\min} = 0,419$).

Из условия $r_{\min} \geqslant R$ определяется наименьшая нагрузка, при которой контур отверстия целиком охватывается пластической зоной. Соотношение (11) при $r_{\max} \leqslant 1$ позволяет найти наибольшую нагрузку, при которой пластические зоны касаются одна другой. До сих пор предполагалось, что нагрузка p удовлетворяет неравенству $0 \leqslant p \leqslant \sigma_s$.



Фиг. 1

λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
			Первое приближение				
β_2/α_*	2,50727	1,68811	1,29244	1,06681	0,92563	0,83308	0,77382
β_4/α_*	—0,07198	—0,09189	—0,10138	—0,10706	—0,11571	—0,13014	—0,14761
A_2	—0,05883	—0,11561	—0,17187	—0,22093	—0,25989	—0,28991	—0,31452
α_2/a	0,07513	0,10157	0,11876	0,12818	0,13271	0,13273	0,14011
b	5,01421	3,37443	2,58053	2,12735	1,85017	1,67710	1,57037
b_1	—0,30073	—0,40774	—0,48074	—0,52512	—0,56103	—0,60252	—0,62014
			Второе приближение				
β_2/a_*	2,50727	1,68814	1,29249	1,06696	0,92584	0,83377	0,77478
β_4/a_*	—0,07198	—0,09197	—0,10147	—0,10755	—0,11686	—0,13224	—0,15362
β_6/a_*	0,01456	0,03887	0,06877	0,09723	0,12270	0,15036	0,18855
A_2	—0,05883	—0,11568	—0,17291	—0,22288	—0,26456	—0,29878	—0,32379
A_4	—0,00576	—0,02163	—0,04516	—0,06745	—0,08735	—0,11922	—0,18572
α_2/a_*	0,07513	0,10161	0,11893	0,12873	0,13418	0,13853	0,14297
α_4/a_*	—0,00089	—0,00268	—0,00572	—0,01013	—0,01548	—0,02051	—0,02361
b	5,01421	3,37446	2,58064	2,12881	1,85116	1,67844	1,57724
b_1	—0,30073	—0,40783	—0,48082	—0,52827	—0,56507	—0,60706	—0,66258
b_2	0,00356	0,01066	0,02256	0,03929	0,05821	0,07292	0,07486

Пусть теперь нагрузка p изменяется в пределах $0 \geqslant p \geqslant -\sigma_s$. В этом случае напряжения в пластической зоне при условии текучести Треска—Сен-Венана определяются формулами [6] при $R \leqslant r \leqslant R\exp(-p/\sigma_s)$

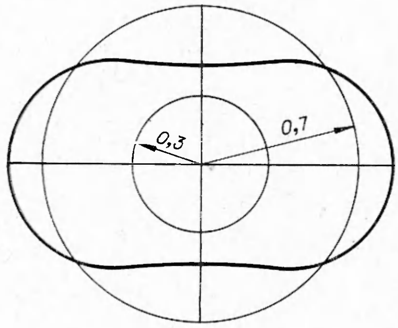
$$\sigma_r = p + \sigma_s \ln(r/R), \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

$$\sigma_\theta = p + \sigma_s + \sigma^s \ln(r/R), \quad \sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s;$$

при $r \geqslant R \exp(-p/\sigma_s)$

$$\sigma_r = \sigma_s - (\sigma_s/r)R \exp(-p/\sigma_s),$$

$$\sigma_\theta = \sigma_s, \quad \tau_{r\theta} = 0.$$



Фиг. 2

Отметим, что все полученные ранее решения упругопластической задачи будут справедливы в этом случае лишь при условии, что упругопластическая граница целиком охватывает круг радиуса $R \exp(-p/\sigma_s)$. При этом везде в решениях достаточно формально заменить p на нуль, а R на $R \exp(-p/\sigma_s)$.

Автор благодарит Л. А. Галина и Г. П. Черепанова за внимание к работе.

Поступила 20 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шерман Д. И.** Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости.— В кн.: Труды Всесоюз. съезда по теорет. и прикладной механике. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1962.
2. **Григолюк Э. И., Фильштинский А. А.** Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
3. **Черепанов Г. П.** Об одном методе решения упругопластической задачи.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
4. **Хома И. Ю.** Концентрация напряжений в тонкой пластине, ослабленной бесконечным числом круговых отверстий, при упругопластических деформациях.— В кн.: Труды IV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964.
5. **Мирсалимов В. М., Мехти-заде Э. М.** Упругопластическая задача для тонкой пластины, ослабленной бесконечным рядом круглых отверстий.—В кн.: Исследования по некоторым вопросам конструктивной теории функций и дифференциальных уравнений. Баку, изд. Азинефтехима, 1973.
6. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М., «Высш. школа», 1969.
7. **Мусхелишвили И. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.