

Скорость ввода энергии значительно больше, чем при применении конденсаторной батареи, так как по оценкам СФР-граммы скорость распространения границы газового разряда достигает 5 км/с. Это означает, что газовый разряд может иметь большую яркостную температуру по сравнению с использованием Е-контра. Измеренная максимальная температура в этом случае достигает 60 000°С.

Кроме того, установлено, что при применении Е-контра доля коротковолнового излучения составляет 20% от всего излучения, а при питании разряда от взрывного электрического генератора увеличивается до 40%, что говорит о перспективности такого генератора для сдвига спектрального максимума излучения в более коротковолновую область.

Автор выражает благодарность В. А. Катулину и сотрудникам его группы за обсуждение постановки экспериментов и Ю. Н. Киселеву за предоставленные пироэлектрические датчики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Физматгиз, 1963.
2. Спитцер П. Физика полностью ионизованного газа.— М.: ИЛ, 1959.
3. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции.— М.: Физматгиз, 1963.
4. Александров А. Ф., Рухадзе А. А. Физика сильноточных электроразрядных источников света.— М.: Атомиздат, 1976.
5. Басов Н. Г., Борович Б. Л. и др. Излучение света при ЭВП.— ЖТФ, 1968, т. 38, № 6.
6. Басов Н. Г., Борович Б. Л. и др. Сильноточный разряд в газах.— ЖТФ, 1970, т. 40, № 3.
7. Азаркевич Е. И., Войтенко А. Е. и др. Взрывной электрический генератор.— ЖТФ, 1976, т. 46, № 9.
8. Ковальчук Б. М., Поталицын Ю. Ф. Быстродействующие многоэлектродные искровые разрядники.— В кн.: Мощные наносекундные импульсные источники ускоренных электронов/Под ред. Г. А. Месяца. Новосибирск: Наука, 1974.
9. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля.— М.: Мир, 1972.
10. Демидов М. И., Огурцова Н. Н. и др. Энергетическая калибровка излучения импульсного источника света ЭВ-45 (ЭВ-39) в ультрафиолетовой области спектра.— ЖПС, 1968, № 3.
11. Огурцова Н. Н., Подмошенский И. В., Демидов М. И. Импульсный источник света с излучением, подобным излучению абсолютно черного тела при температуре 40 000°.— Оптикomeханическая промышленность, 1960, № 1.
12. Цикулин М. А., Попов Е. Г. Излучательные свойства ударных волн в газах.— М.: Наука, 1977.
13. Киселев Ю. Н., Крохин В. З. Малоинерционные пироэлектрические приемники для регистрации излучения в диапазоне 40—1100 нм.— ПМТФ, 1976, № 4.

Поступила 4/XI 1985 г.

УДК 532.516

ТРЕХМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ НА ВЕРТИКАЛЬНО СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

Ю. Я. Трифонов, О. Ю. Цвелодуб

(Новосибирск)

Известно, что характер стекания пленки жидкости по вертикальной плоскости волновой уже при малых числах Рейнольдса. Это связано с тем, что течение пленки с плоской свободной поверхностью неустойчиво [1]. В эксперименте сначала на некотором расстоянии от места истечения жидкости образуются двумерные волны. Они быстро растут по амплитуде и выходят на режим, при котором фазовая скорость волн, их амплитуда и длина почти не меняются. Однако длина зоны двумерных стационарных бегущих волн обычно невелика — далее они разрушаются и становятся трехмерными [2]. Использование искусственно наложенных возмущений существенно расширяет диапазон волновых чисел, при которых возможны двумерные регулярные волны, которые также становятся трехмерными, хотя происходит это значительно дальше от входа, чем при естественном стекании [2, 3].

Теоретическое рассмотрение волнового стекания пленки жидкости в полной постановке чрезвычайно сложно, так как необходимо решать систему нелинейных уравнений Навье — Стокса с заранее неизвестной свободной границей. Поэтому для ее решения прибегают к различным упрощениям.

Так, изучение двумерных длинноволновых возмущений при умеренных расходах удается свести к решению системы для мгновенных значений толщины пленки h и расхода q [4]:

$$(1) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + 1,2 \frac{\partial}{\partial x} (q^2/h) = -3\nu q/h^2 + gh + \frac{\sigma k}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости; g — ускорение свободного падения; σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Система (1) получается после интегрирования уравнений движения по координате y , перпендикулярной плоскости течения xz , с использованием предположения об автомодельности профиля продольной компоненты скорости

$$(2) \quad u = 1,5q/h(2y/h - y^2/h^2).$$

Количественно хорошо согласующиеся с экспериментом нестационарные решения этой системы построены в [5, 6], а стационарные бегущие волны найдены в [7—10].

Задавая наряду с (2) профиль компоненты скорости в z -направлении в виде полинома 2-й степени

$$(3) \quad w = 1,5Q/h(2y/h - y^2/h^2),$$

в [11] интегрированием системы уравнений Навье — Стокса получили систему, обобщающую (1) на случай трехмерных возмущений:

$$(4) \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + 1,2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{q^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{qQ}{h} \right) = -3\nu q/h^2 + gh + \frac{\sigma h}{\rho} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 1,2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{qQ}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{Q^2}{h} \right) = -3\nu Q/h^2 + \frac{\sigma h}{\rho} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial z \partial x^2} \right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

где Q — мгновенный расход в направлении z , остальные величины те же, что и в (1).

Отметим, что, хотя предположение (3) менее очевидно, чем (1) в плоском случае, и не имеет аналогичного экспериментального [12] и расчетного [13] подтверждений, для достаточно длинных в z -направлении возмущений оно не будет приводить к принципиально неверным результатам и может быть использовано в качестве модельного.

В [11] с использованием в качестве базисных функций для метода Галеркина до восьми членов двойного ряда Фурье численно рассматривались периодические по x и z нестационарные решения системы (4). Цель данной работы — нахождение стационарных бегущих волн.

С помощью замены $\bar{h} = h/h_0$, $\bar{q} = q/q_0$, $\bar{Q} = Q/q_0$, $\bar{x} = (We/3)^{1/2}x/h_0$, $\bar{z} = (We/3)^{1/2}z/h_0$, $\bar{t} = (We/3)^{1/2}h_0^2 t/q_0$, $p = (3We)^{1/2}/Re$, $F = (We/3)^{1/2}/Fr$ (q_0 — средневолновой расход по оси x , а h_0 — средняя толщина пленки, $We = \sigma h_0/\rho q_0^2$, $Re = q_0/\nu$, $Fr = q_0^2/gh_0^3$), опуская знак обезразмеривания, перепишем систему (4) в виде

$$(5) \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{t}} + 1,2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{q}^2}{\bar{h}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\bar{q}\bar{Q}}{\bar{h}} \right) = -p\bar{q}/\bar{h}^2 + F\bar{h} + 3\bar{h} \left(\frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} + \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}^2} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{t}} + 1,2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{q}\bar{Q}}{\bar{h}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\bar{Q}^2}{\bar{h}} \right) = -p\bar{Q}/\bar{h}^2 + 3\bar{h} \left(\frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{z}^3} + \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{z} \partial \bar{x}^2} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Линеаризуя систему (5) и представляя решение как

$$(6) \quad \begin{aligned} h_1 &= A \exp [i\alpha(x - ct) + i\beta z] + \text{к. с.}, \\ q_1 &= B_1 A \exp [i\alpha(x - ct) + i\beta z] + \text{к. с.}, \\ Q_1 &= D_1 A \exp [i\alpha(x - ct) + i\beta z] + \text{к. с.} \end{aligned}$$

(к. с. — комплексное сопряженное выражение), нетрудно показать, что возмущения с волновыми числами α и β , лежащими внутри (вне) полу-

круга (рис. 1, кривая 1)

$$(7) \quad (\alpha^2 + \beta^2)^2 = \alpha^2,$$

неустойчивы (устойчивы), так как имеют мнимую часть $c_i > 0$ ($c_i < 0$). Возмущения, у которых волновые числа α и β удовлетворяют (7), нейтральны, для них $c = 3$, а коэффициенты B_1 и D_1 в (6) выражаются следующим образом:

$$(8) \quad \begin{aligned} D_1 &= 3\alpha\beta/(1,8\alpha + ip), \\ B_1 &= 3 - \beta D_1/\alpha. \end{aligned}$$

Решение (6) отбрасывается от плоскопараллельного $h = 1$, $q = 1$, $Q = 0$ на плоскости волновых чисел α , β по линии (7) и справедливо в случае, когда A бесконечно мало.

Для поиска стационарных бегущих волн конечной амплитуды, являющихся решением системы (5), перейдем в ней к переменным $\xi = x - ct$, $z = z$:

$$(9) \quad \begin{aligned} -c \frac{\partial q}{\partial \xi} + 1,2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{q^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{qQ}{h} \right) &= -pq/h^2 + Fh + 3h \left(\frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial \xi \partial z^2} \right), \\ -c \frac{\partial Q}{\partial \xi} + 1,2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{qQ}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{Q^2}{h} \right) &= -pQ/h^2 + 3h \left(\frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial z \partial \xi^2} \right), \\ -c \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся поиском решений системы (9) (периодических по ξ и z), у которых h — симметричная относительно z функция.

Так как амплитуда нейтральных по линейной теории устойчивости возмущений бесконечно мала, ясно, что амплитуда стационарных волн с волновыми числами, лежащими вблизи кривой (7), будет конечна, но мала. Поэтому для таких волновых чисел ищем решение системы (9) в виде рядов по малому параметру:

$$\begin{aligned} h &= 1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots, \quad q = 1 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots, \\ Q &= \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots, \\ F &= F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots, \quad c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots \end{aligned}$$

Следуя [14], введем набор быстрых и медленных переменных:

$$\xi_0 = \xi, \quad \xi_n = \varepsilon^n \xi, \quad z_0 = z, \quad z_n = \varepsilon^n z, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из нулевого приближения по ε получим $F_0 = p$. Из (9) для первого приближения имеем линейную систему с решением в виде

$$(10) \quad \begin{aligned} h_1 &= A e^{i\alpha \xi_0} (a e^{i\beta z_0} + \bar{a} e^{-i\beta z_0}) + \text{к. с.}, \\ q_1 &= B_1 A e^{i\alpha \xi_0} (a e^{i\beta z_0} + \bar{a} e^{-i\beta z_0}) + \text{к. с.}, \\ Q_1 &= D_1 A e^{i\alpha \xi_0} (a e^{i\beta z_0} - \bar{a} e^{-i\beta z_0}) + \text{к. с.}, \end{aligned}$$

где α , β , B_1 , D_1 удовлетворяют (7), (8); $c_0 = 3$.

Из симметрии искомых решений вытекает, что A может быть функцией только ξ_1 , ξ_2 , ..., а a — зависеть от z_1 , z_2 , ... Определение их вида из рассмотрения высших приближений позволяет найти связь между поправками к волновым числам α и β и значением амплитуды первой гармоники. Но, зная, например, поправку к $\beta = \Delta\beta$, можно просто сказать, что найдено решение вблизи новой точки на кривой (7), у которой $\beta_1 = \beta + \Delta\beta$. Поэтому в (10) считаем $a = \text{const}$ и включаем ее в A , другими

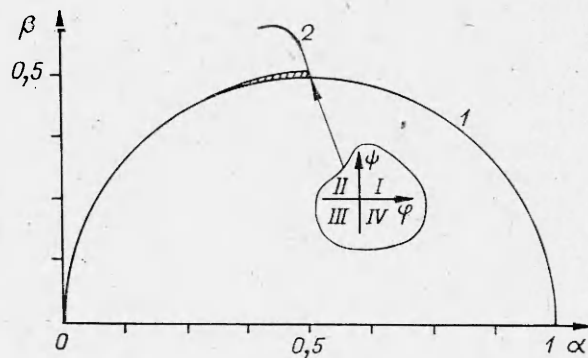


Рис. 1

словами, будем искать решения конечной амплитуды, жестко фиксируя значения волнового числа β . На кривой (7) это удастся сделать почти всюду, за исключением малых окрестностей нескольких выделенных точек.

В качестве параметра ε можно взять значение A . Нетрудно показать, что из требования отсутствия вековых членов во втором приближении

$$c_1 = 0, \partial A / \partial \xi_1 = 0, F_1 = 0.$$

С учетом этого для второго приближения приходим к системе

$$(11) \quad -c_0 \frac{\partial q_2}{\partial \xi_0} + 1,2 \left[\frac{\partial}{\partial \xi_0} (2q_2 - h_2 + (q_1 - h_1)^2) + \frac{\partial}{\partial z_0} (Q_2 + Q_1 (q_1 - h_1)) \right] = \\ = -p (q_2 - 3h_2 + 3h_1^2 - 2q_1 h_1) + F_2 + \\ + 3 \left(\frac{\partial^3 h_2}{\partial z_0^3} + h_1 \frac{\partial^3 h_1}{\partial z_0^3} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial z_0 \partial z_0^2} + h_1 \frac{\partial^3 h_1}{\partial z_0 \partial z_0^2} \right), \\ -c_0 \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_0} + 1,2 \left[\frac{\partial}{\partial \xi_0} (Q_2 + Q_1 (q_1 - h_1)) + \frac{\partial Q_1^2}{\partial z_0} \right] = -p (Q_2 - 2h_1 Q_1) + \\ + 3 \left(\frac{\partial^2 h_2}{\partial z_0^2} + h_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^3 h_2}{\partial z_0 \partial z_0^2} + h_1 \frac{\partial^3 h_1}{\partial z_0 \partial z_0^2} \right), \\ -c_0 \frac{\partial h_2}{\partial \xi_0} + \frac{\partial q_2}{\partial \xi_0} + \frac{\partial Q_2}{\partial z_0} = 0,$$

решая которую, найдем

$$(12) \quad h_2 = A_2 A^2 e^{i2\alpha \xi_0} (e^{i2\beta z_0} + e^{-i2\beta z_0}) + A_3 |A|^2 (e^{i2\beta z_0} + e^{-i2\beta z_0}) + \\ + A_4 A^2 e^{i2\alpha \xi_0} + \text{к. с.}, \\ q_2 = B_2 A^2 e^{i2\alpha \xi_0} (e^{i2\beta z_0} + e^{-i2\beta z_0}) + B_3 |A|^2 (e^{i2\beta z_0} + e^{-i2\beta z_0}) + \\ + B_4 A^2 e^{i2\alpha \xi_0} + \text{к. с.}, \\ Q_2 = D_2 A^2 e^{i2\alpha \xi_0} (e^{i2\beta z_0} - e^{-i2\beta z_0}) + \text{к. с.},$$

где

$$(13) \quad A_2 = -[1,2(\alpha(B_1 - 1) + \beta D_1)^2 + 1,5\alpha^2 + 1,5i\alpha p] / 9\alpha^2, \\ D_2 = [-24i\alpha\beta A_2 - 2,4i(\alpha(B_1 - 1) + \beta D_1)D_1 + 2pD_1 - 3i\alpha\beta] / (p - 3,6i\alpha), \\ B_2 = c_0 A_2 - \beta D_2 / \alpha, \\ A_3 = (2,4\beta |D_1|^2 - ip(D_1 - \bar{D}_1) - 3\alpha\beta) / 24\beta^3, \\ B_3 = 3A_3 + 3 - 25,2\alpha\beta^2 / (p^2 + 3,24\alpha^2), \\ A_4 = (2,4\alpha(B_1 - 1)^2 + 3\alpha^2 - ip(3 - 2B_1)) / 3\alpha(1 - 4\alpha^2), \quad B_4 = c_0 A_4.$$

В силу выбора при обезразмеривании системы (4) в качестве характерных масштабов средневолнового расхода q_0 и средней толщины h_0 и из условия отсутствия секулярных членов из первого уравнения в (11) имеем

$$F_2 = 4p(3 - B_1 - \bar{B}_1) |A|^2.$$

Из условия отсутствия вековых членов в третьем приближении получим

$$(14) \quad 6i\alpha(1 - 2\alpha) \frac{\partial A}{\partial \xi_2} + \{p[12i\beta(D_1 + \bar{D}_1) - 45i\alpha + 6i\alpha(A_2 + A_4 + 2A_3) - \\ - 4i\beta(\bar{D}_1 A_4 + 2D_1 A_3)] + 9,6[\alpha^2(B_3 - A_3 + A_2 + A_4 - 4,5) - \beta^2 |D_1|^2 - \\ - \alpha\beta(\bar{D}_1 A_4 - D_1(A_3 - B_3 - 3) + \bar{D}_1)] + (6\alpha^4 + 42\beta^4)A_3 + 21\alpha^2 A_2 + \\ + (21\alpha^4 + 3\beta^4)A_4\} |A|^2 A - c_2(3,6\alpha^2 + i\alpha p) A = 0.$$

Представляя решение (14) в виде $A = A_0 e^{i\varphi \xi_2}$ и выделяя мнимую и реальную части, находим выражения для поправок к волновому числу α и фазовой скорости:

$$(15) \quad \varphi = f_1(\alpha, \beta, p) |A_0|^2, \quad c_2 = f_2(\alpha, \beta, p) |A_0|^2.$$

Явный вид функций f_1 и f_2 ввиду их громоздкости не приводим.

Анализируя выражения (13)–(15), нетрудно показать, что для достаточно малых значений $|A_0|$ члены второго приближения малы по сравнению с членами первого при всех α и β , лежащих на кривой (7), за исключением окрестностей точек $\alpha = 1, \beta = 0$; $\alpha = 0, \beta = 0$; $\alpha = \beta = 0,5$. Действительно, из (13) видно, что при подходе к этим точкам некоторые из коэффициентов в (12) стремятся к бесконечности, поэтому здесь полученные решения неприменимы. Эти точки требуют особого рассмотрения. Для остальных точек кривой (7) расчеты по (15) показывают, что если $0,5 < \alpha < 1$, то при любых значениях p $c_2 < 0, \varphi < 0$. Последнее означает, что волновой режим ответвляется в область линейной неустойчивости — мягкий тип ветвления. Для возмущений, у которых α лежит в интервале $(0; 0,5)$, ситуация более сложная — при достаточно больших значениях $p \geq 1$ поправка φ на всем интервале отрицательна. Это говорит о том, что для таких α волновые векторы стационарных бегущих волн малой, но конечной амплитуды лежат вне области неустойчивости. При уменьшении p (что соответствует росту Re) величина отрицательной поправки по модулю уменьшается, и при $p^* = 0,81159$ для $\alpha^* = 0,29$ (соответственно $\beta^* = 0,454$) она становится равной нулю. С дальнейшим уменьшением p появляется и растет интервал α , для которых $\varphi > 0$, т. е. снова ветвление в область неустойчивости. Поправка к фазовой скорости в окрестности $\alpha \approx 0,5$ (но $\alpha < 0,5$) для любых значений p всегда положительна. Но при движении по дуге (7) в сторону меньших α величина c_2 уменьшается, проходя через нуль в точке α_+ . С ростом p α_+ уменьшается, а при $p \rightarrow 0$ $\alpha_+ \rightarrow 0,5$.

При приближении к точке $\alpha = 0, \beta = 0$ по кривой (7) для любых конечных значений $p < p^*$, начиная с $\alpha_* < \alpha^*$, периодические слабонелинейные режимы снова ответвляются наружу от области неустойчивости. Значение α_* падает с уменьшением p . В окрестности точки $\alpha = 0, \beta = 0$ волновые режимы с амплитудами $\sim \varepsilon$ возможны, если составляющие волнового вектора имеют порядка малости $\beta \sim \varepsilon, \alpha \sim \varepsilon^2$. Кроме того, необходимо, чтобы компоненты волнового вектора, при котором происходит смена типа ветвления, имели такие же порядки. Последнее возможно, если порядок малости параметра $p \geq \varepsilon^2$.

При получении решения в окрестности точки $\alpha = 1, \beta = 0$ учитывается, что для нейтральных возмущений с составляющими волнового вектора, лежащими на кривой (7), при $\beta \ll 1$ $\alpha \approx 1 - \beta^2$. Соответственно и поправка для α при нахождении решения с амплитудой $\sim \varepsilon$ должна быть более высокого порядка малости, чем для β . Поэтому в выражении для первого приближения можно написать

$$h_1 = A e^{i\xi_0} + \text{к. с.}, \quad q_1 = 3h_1, \quad Q_1 = 0,$$

где A — функция медленных координат z_1, ξ_2, \dots

Второе приближение имеет вид

$$h_2 = A_2 A^2 e^{i2\xi_0} + \text{к. с.}, \quad q_2 = 3h_2, \quad A_2 = -0,7 - ip/6,$$

$$Q_2 = B_2 \frac{\partial A}{\partial z_1} e^{i\xi_0} + \text{к. с.}, \quad B_2 = -3/(p - 1,8i),$$

а требование отсутствия вековых членов в третьем приближении приводит к уравнению

$$c_2(3,6 + ip)A + 6 \frac{\partial^2 A}{\partial z_1^2} + 6i \frac{\partial A}{\partial \xi_2} = (p^2 - 35,82 - 30,3ip) |A|^2 A.$$

Представляя $A = A_0 e^{i\varphi z} (e^{i\psi z_1} + e^{-i\psi z_1})$, получаем

$$(16) \quad c_2 = -60,6|A_0|^2, \quad \psi^2 + \varphi = -(p^2 + 73,26)|A_0|^2/3.$$

Отсюда следует, что, как и для всех $\alpha > 0,5$, в окрестности точки $\alpha = 1$, $\beta = 0$ слабонелинейные волновые режимы ответвляются внутрь области неустойчивости и их фазовая скорость меньше $c_0 = 3$. При $\psi = 0$ выражения (16) определяют значения поправок для плоских волн.

При нахождении решения в окрестности $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$ заметим, что (так как для волны с этим волновым вектором одна из кратных гармоник ($\alpha = 1$, $\beta = 0$) имеет волновой вектор, тоже лежащий на нейтральной кривой (7)) в первом приближении вместо (10) имеем

$$\begin{aligned} h_1 &= A e^{i\xi/2} (a e^{iz/2} + \bar{a} e^{-iz/2}) + N e^{i\xi} + \text{к. с.}, \\ q_1 &= B_1 A e^{i\xi/2} (a e^{iz/2} + \bar{a} e^{-iz/2}) + 3N e^{i\xi} + \text{к. с.}, \\ Q_1 &= D_1 A e^{i\xi/2} (a e^{iz/2} - \bar{a} e^{-iz/2}) + \text{к. с.} \end{aligned}$$

Здесь A и N — медленно меняющиеся функции от переменной ξ , а a — от z . Вообще говоря, aA и N могут быть разных порядков малости. Используя аналогично [15] в качестве малых параметров отклонения компонент волнового числа от точки $(0,5; 0,5)$, ищем решение в виде

$$A = A_0 e^{i\varphi z}, \quad a = a_0 e^{i\psi z}, \quad N = N_0 e^{i2\varphi z}.$$

Без ограничения общности A_0 и a_0 можно считать вещественными. Приравнявая нулю секулярные члены в последующем приближении, после выполнения несложных, но громоздких выкладок для определения $A_0 a_0$, N_0 и поправки к фазовой скорости c_1 находим систему

$$(17) \quad (6\varphi - c_1(3,6 + ip))N_0 + (2,4(2 - D_1)^2 + 1,5 + 2ip(3 - 2D_1)) \times \\ \times (A_0 a_0)^2 = 0,$$

$$6\varphi + 3\varphi^2 - c_1(4,8 + ip) + (4,8(1 - \bar{D}_1) + 3 + 2ip(3 - 2\bar{D}_1))N_0 = 0,$$

решая которую, видим, что на плоскости волновых чисел в областях, где $\varphi\psi < 0$ (II и IV квадранты в системе координат с центром в точке $\alpha = \beta = 0,5$ и осями, направленными в сторону возрастания α и β , см. рис. 1), существует два решения. Для одного из них значение поправки к фазовой скорости c_0 , $c_1 > 0$, для другого $c_1 < 0$. В квадрантах I и III существует по одному решению с $c_1 > 0$ и $c_1 < 0$ соответственно.

При сопоставлении результатов, даваемых расчетами по (15) и (17), становится ясно, что имеется, по крайней мере, два типа слабонелинейных решений системы (9). Область существования первого лежит для $\alpha \geq 0,5$ ниже кривой (7), а в окрестности $\alpha = \beta = 0,5$ занимает $II-IV$ квадранты. Само решение с поправкой к фазовой скорости $c_1 < 0$, мягко ответвляясь от плоскопараллельного для $\alpha > 0,5$ по кривой (7), при непрерывном изменении волновых чисел обходит точку $\alpha = \beta = 0,5$ снизу, при $\alpha < 0,5$ выходит в область линейной устойчивости, имея конечную амплитуду на кривой (7). При $\alpha \rightarrow 0,5$, $\beta \rightarrow 0,5$, но $\alpha < 0,5$, $\beta > 0,5$ это решение исчезает. В дальнейшем о таких волновых режимах будем говорить как о волнах первого типа.

Решения второго типа ответвляются от плоскопараллельного по кривой (7) для значений $\alpha < 0,5$ при $p > p^*$ всюду в область линейной устойчивости, а при $p < p^*$ существует интервал по α с мягким типом ветвления ($\alpha_* < \alpha < \alpha_{**} < 0,5$). Область существования этих решений в окрестности $\alpha = \beta = 0,5$, включает в себя II , I и IV квадранты.

Для нахождения волновых режимов с волновыми числами, заметно отличающимися от нейтральных, система (9) решалась численно. Решение искалось в виде конечных сумм от двойных рядов Фурье

$$(18) \quad h = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N H_{mn} e^{i\alpha m \xi + i\beta n z}, \quad q = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N q_{mn} e^{i\alpha m \xi + i\beta n z}.$$

При получении большинства излагаемых ниже результатов $M = N = 3$, для некоторых значений параметров расчеты проводились с $M = 7$, $N = 3$. Метод решения использует процедуры фурье-преобразования и аналогичен изложенному в [8, 10] для плоских волн. Сначала решения искались вблизи нейтральной кривой, где в качестве начального приближения хорошо работают аналитические результаты. Продвижение по волновым числам от кривой (7) осуществлялось по непрерывности. Ниже представлены результаты, полученные для

$$p = 1 > p^*, \quad p = 0,5 < p^*.$$

На рис. 2 приведены зависимости квадрата амплитуды стационарных волн $A^2 = |h_{\max} - h_{\min}|^2$ от волнового числа α при горизонтальном сечении области линейной неустойчивости на уровне $\beta = 0,48$. Линии 1, 2 соответствуют $p = 1; 0,5$, индексы a, b относятся к волнам первого и второго типа.

Для $\alpha > 0,5$ характерный вид волн первого типа показан на рис. 3, a , где $p = 0,5$, $F = 0,498$, $\alpha = 0,55$, $\beta = 0,48$, $c = 2,923$, $A = 0,212$. При $\alpha \leq 0,5$ эти волны становятся более «нелинейными» — их амплитуда, как видно, начинает быстро нарастать. Типичный для них вид приведен на рис. 3, b , где $p = 0,5$, $F = 0,492$, $\alpha = 0,45$, $\beta = 0,48$, $c = 2,772$, $A = 0,302$.

Для этих значений α по мере их дальнейшего уменьшения гармоника H_{20} растет быстрее по сравнению со всеми остальными. Это, по-видимому, связано с тем, что, попав при переходе через линию $\alpha = 0,5$ в область линейной неустойчивости, гармоника H_{20} с уменьшением величины волнового числа α при фиксированном β единственная из всех продолжает углубляться в эту область.

Для расчета волн такого типа с $\alpha \leq 0,4$ требуется большее число гармоник. Так, для вариантов, рассчитанных с $M = N = 3$ и $M = 7$, $N = 3$ в суммах (18) при $0,5 \leq \alpha \leq 0,64$, различия в толщинах и фазовых скоростях составляли $\sim 1\%$, а для $\alpha = 0,4$ решения отличались на $\sim 10\%$, хотя их качественное поведение оставалось таким же.

Как видно из рис. 2, волны второго типа при значении параметра $p = 1$ (кривая 1б) ответвляются в область устойчивости, при $p = 0,5$ (кривая 2б) наблюдается мягкий режим ветвления (здесь $\alpha_n = 0,36$ принадлежит нейтральной кривой (7)). Эти результаты находятся в полном

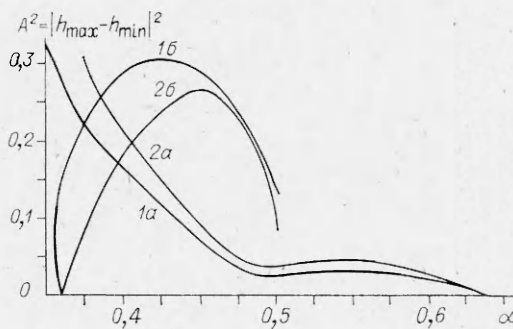


Рис. 2

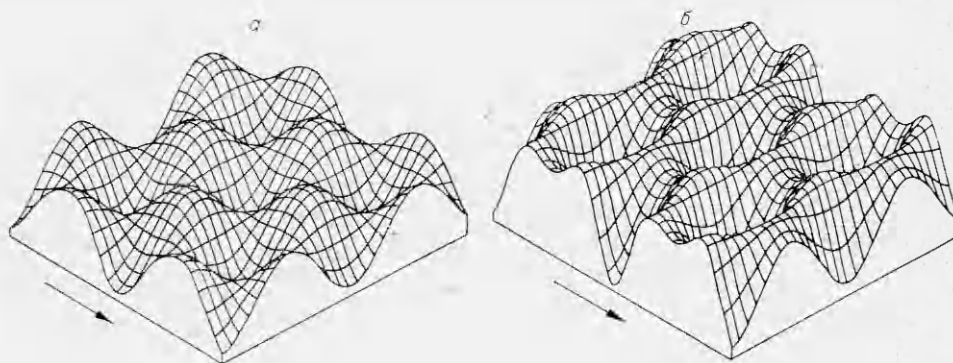
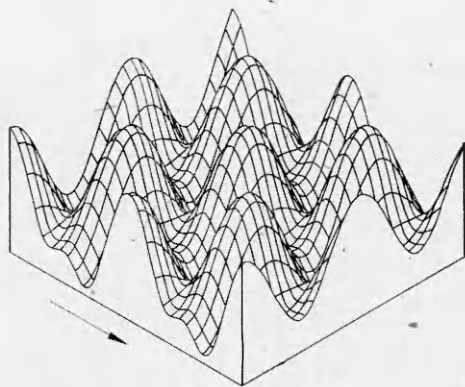


Рис. 3



Р и с. 4

(17), правая граница зоны заходит за линию $\alpha = 0,5$, но настолько незначительно ($\alpha < 0,503$), что в приводимом масштабе это не видно. Аналогичная зона для $p = 0,5$ еще более узка, а слева ограничена линией $\alpha = \alpha_{**} = 0,4289$.

Характерный вид волн второго типа представлен на рис. 4. Здесь $p = 0,5$, $F = 0,485$, $\alpha = 0,475$, $\beta = 0,48$, $c = 2,975$, $A = 0,481$.

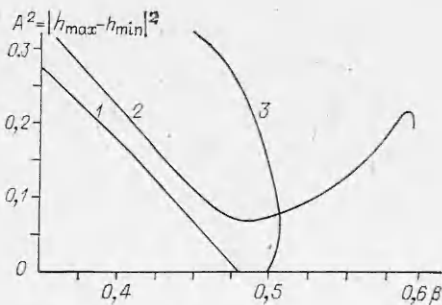
Волны второго типа более быстрые, чем первого. Так, если для последних значения фазовых скоростей всегда меньше $c_0 = 3$ и при удалении от точек ветвления ($\alpha > 0,5$ на кривой (7)) заметно от нее отличаются (до 20—25% для рассмотренных значений параметров), то у волны второго типа отличие от c_0 не превышает 1—1,5% как в ту, так и в другую сторону.

На рис. 5 представлены зависимости A^2 от волнового числа для нескольких вертикальных сечений $\alpha = \text{const}$, где кривой 1 показано, как меняется амплитуда волн первого типа в сечении $\alpha = 0,64$ при движении от точки ветвления ($\beta_n = 0,48$) в глубь области неустойчивости. Видно, что вплоть до $\beta \sim 0,35$ амплитуда растет $\sim (\beta - \beta_n)^{1/2}$ (зависимость, аналогичная (15)). Ясно, что эти волны достаточно близки к слабонелинейным (для $\alpha > 0,5$). Об этом напоминает и их вид (см. рис. 3, а) — почти чисто синусоидальное поведение в ξ - и в z -направлениях.

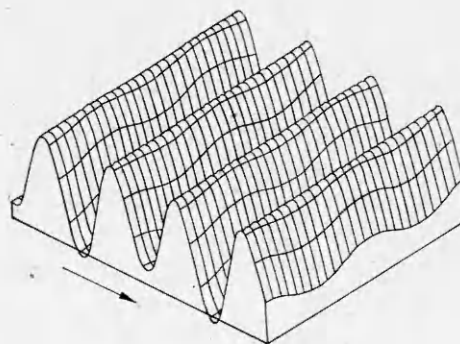
Для этого же типа волн аналогичные зависимости в сечении $\alpha = 0,45$ представлены кривой 2. Видно, что при заглублении в область неустойчивости амплитуда также растет. При выходе из области линейной неустойчивости ($\beta > \beta_n = 0,4975$) быстро растет гармоника H_{20} , давая преобладающий вклад в A . Это приводит к тому, что пространственные волны начинают все более вырождаться в слабо промодулированные в z -направлении плоские волны (рис. 6, где $p = 0,5$, $F = 0,481$, $\alpha = 0,45$, $\beta = 0,532$, $c = 2,813$, $A = 0,314$), а при некотором $\beta_* = \beta_*(\alpha, p)$ становятся плоскими. Так, в сечении $\alpha = 0,45$ для $p = 1$ $\beta_* = 0,594$, для

соответствии с полученными аналитически. Так, из (15) следует, что для $p = 0,5$ смена типа ветвления происходит в точке $\alpha_{**} = 0,4289$ на кривой (7). Из расчетов получаем, что α_{**} лежит в пределах 0,425—0,423.

На рис. 1 в области линейной устойчивости заштрихована зона, где численно найдены волны второго типа для $p = 1$. Хотя, как вытекает из (15), эта зона есть и при меньших значениях α , она практически сливается с нейтральной кривой. В соответствии с результатами, полученными при решении системы



Р и с. 5



Р и с. 6

$p = 0,5$, $\beta_* = 0,533$. Контрольные расчеты с $M = 7$, $N = 3$ в. (18) показали, что изменения в β_* не превышают 3%. Зависимость $\hat{\beta}_* = \hat{\beta}_*(\alpha, p)$ при $p = 1$ представлена на рис. 1 линией 2, для продолжения которой в область с $\alpha < 0,4$ требуется большее число гармоник.

Подобное же вырождение пространственных решений в плоские с удвоенным волновым числом обнаружены в [15] для уравнения, описывающего поведение возмущений на пленке при $Re \leq 1$.

Зависимость для волн второго типа при $\alpha = 0,47$ дана кривой 3 на рис. 5. При продвижении в глубь области неустойчивости у них в отличие от волн первого типа «высокие» гармоники H_{3n} нарастают заметно быстрее, и уже для расчета волн с $\beta \leq 0,45$ число гармоник нужно увеличивать. Можно сказать, что волны второго типа более нелинейны, чем первого.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chia-Shun Yih. Stability of liquid flow down on inclined plane.— Phys. Fluids, 1963, v. 6, N 3.
2. Накоряков В. Е., Покусав Б. Г., Алексеенко С. В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости.— ИФЖ, 1976, т. 30, № 5.
3. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусав Б. Г. Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. Препринт 36—79.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1979.
4. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1.
5. Демехин Е. А., Токарев Г. Ю., Дятлова Г. А. Численное моделирование нестационарных двумерных волн в стекающем слое вязкой жидкости.— В кн.: Современные проблемы теплофизики. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1984.
6. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3.
7. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4.
8. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Нелинейные волны на поверхности пленки жидкости, стекающей по вертикальной стенке.— ПМТФ, 1985, № 5.
9. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 3.
10. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Волновые режимы в стекающих пленках жидкости.— В кн.: Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985.
11. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 5.
12. Накоряков В. Е., Покусав Б. Г. и др. Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости.— ИФЖ, 1977, т. 33, № 3.
13. Гешев П. И., Ездин Б. С. Расчет профиля скорости и формы волны на стекающей пленке жидкости.— В кн.: Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985.
14. Найфе Л. Х. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
15. Непомнящий А. А. Трехмерные пространственно-периодические движения в пленке жидкости, стекающей по вертикальной плоскости.— Гидродинамика, 1974, вып. 7.

Поступила 25/X 1985 г.

УДК 532.522 + 532.135

ИЗГИБНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СВОБОДНЫХ СТРУЙ ЖИДКОСТЕЙ МАКСВЕЛЛА И ДОИ — ЭДВАРДСА

А. Л. Ярин
(Москва)

Изгибные возмущения высокоскоростных свободных струй капельных жидкостей, движущихся в воздухе, усиливаются вследствие того, что давление воздуха на вогнутых участках поверхности струй больше, чем на выпуклых. В случае вязких ньютоновских жидкостей линейная и нелинейная стадии роста изгибных возмущений изучены в [1—5]. Влияние упругих напряжений в жидкости на рост изгибных возмущений струй впервые рассмотрено в [6], где в рамках анализа роста малых возмущений полагалось, что вдоль струи имеется постоянное и неизменное натяжение, т. е. фактически исследовалась натянутая струна. В [7, 8] изучалась линейная стадия роста изгибных возмущений струй максвелловских жидкостей.