

УДК 517.95

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко

Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041 Владивосток

E-mail: alekseev@iam.dvo.ru

Рассматривается обратная экстремальная задача граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции, в которой в качестве функционала качества выбирается среднеквадратичное отклонение скорости или завихренности течения от заданного в некоторой части области течения поля скоростей либо завихренности, роль управления играет поток тепла через часть границы. Приведена теорема о достаточных условиях на исходные данные, обеспечивающих существование, единственность и устойчивость решения. Предложен численный алгоритм решения указанной задачи, основанный на методе Ньютона и методе конечных элементов дискретизации линейных краевых задач. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов по решению экстремальных задач, подтверждающие эффективность разработанного метода.

Ключевые слова: тепловая конвекция, экстремальные задачи, единственность, устойчивость, алгоритм, метод Ньютона.

1. Постановка краевой задачи. В последнее время интенсивно развивается теория управления термогидродинамическими процессами в жидких средах. Решению задач управления и обратных экстремальных задач для стационарных моделей тепломассопереноса посвящен ряд работ (см., например, [1–8]), в которых доказана разрешимость экстремальных задач, выведены и исследованы системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума. В работах [5–8] на основе анализа системы оптимальности также установлены условия единственности и устойчивости решений задач управления в частных случаях, соответствующих чисто гидродинамическим либо температурным функционалам качества и управлениям. Менее изучены вопросы управления течениями вязкой жидкости с помощью тепловых источников, однако расчеты показывают, что именно таким способом можно выявить эффективные механизмы управления режимами течения вязкой жидкости.

Рассмотрим в качестве примера классическую задачу обтекания цилиндра потоком вязкой жидкости в канале. Как известно, при определенных режимах обтекания за цилиндром образуются вихри, появление которых приводит к увеличению силы сопротивления, действующей со стороны вязкой жидкости на обтекаемое тело, по сравнению со случаем безотрывного обтекания. Однако вычислительные эксперименты показывают, что, поместив источник тепла внутри цилиндра, можно выбрать такой режим нагревания или охлаждения стенок цилиндра и близлежащих стенок канала, который обеспечит безотрывное обтекание тела. В свою очередь, это приводит к значительному уменьшению силы

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта СО РАН, ДВО РАН и УрО РАН № 116 и грантов ДВО РАН (№ 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03), а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09-01-98518-р-восток.а, 10-01-00219-а).

сопротивления по сравнению со случаем неуправляемого течения. Для обеспечения указанного режима необходимо решить соответствующую задачу управления для классической модели тепловой конвекции, в которой в качестве функции управления следует выбрать поток тепла через стенки тела и канала. Целью настоящей работы является исследование аналогичных задач управления для следующей модели тепловой конвекции:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} + \text{grad } p = (1 - \beta_T T)\mathbf{G}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (1.1)$$

$$-\lambda\Delta T + \mathbf{u} \cdot \text{grad } T = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{g}, \quad T|_{\Gamma_D} = \psi, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_N} = \chi. \quad (1.3)$$

Здесь Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) с границей Γ , состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N ; \mathbf{u} , T — скорость и температура; $p = P/\rho$; P — давление; $\rho = \text{const}$ — плотность среды; $\nu > 0$, $\lambda > 0$ — кинематическая вязкость и температуропроводность, являющиеся постоянными; \mathbf{G} — ускорение свободного падения; β_T , \mathbf{g} , ψ , χ — некоторые функции.

Рассматриваемая задача заключается в нахождении функции χ в (1.3), имеющей смысл потока тепла через границу, и решения (\mathbf{u}, p, T) задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющего условию минимума определенного функционала качества, зависящего от скорости. Доказывается теорема о достаточных условиях, обеспечивающих единственность и устойчивость решения соответствующей экстремальной задачи, и предложен численный алгоритм решения этой задачи, основанный на методе Ньютона. Обсуждаются некоторые результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие предсказанную данной теорией возможность эффективного управления режимом течения вязкой жидкости за счет выбора граничных источников тепла.

Введем следующие обозначения. Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$ ($Q \subset \Omega$) или в $L^2(\Gamma_N)$ обозначим через (\cdot, \cdot) , $(\cdot, \cdot)_Q$ либо $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_N}$ соответственно; норму в $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$ либо в $L^2(\Gamma_N)$ — через $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_Q$ либо $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$; норму или полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ — через $\|\cdot\|_1$ либо $|\cdot|_1$; норму в $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ либо в $H^{1/2}(\Gamma_D)$ — через $\|\cdot\|_{1/2, \Gamma}$ либо $\|\cdot\|_{1/2, \Gamma_D}$; отношение двойственности для пары X и X^* — через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$ или через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Положим $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \text{div } \mathbf{v} = 0\}$, $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : (p, 1) = 0\}$, $\Theta = H^1(\Omega, \Gamma_D) \equiv \{S \in H^1(\Omega) : S|_{\Gamma_D} = 0\}$, $\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : (\mathbf{v}, \mathbf{n})_{\Gamma^{(i)}} = 0, i = 1, 2, \dots, N, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}$, $\tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) = \{\mathbf{g} = \mathbf{v}|_{\Gamma} : \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\}$. Предположим также, что выполняются следующие условия:

1) Ω — ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) с липшицевой границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$; $\Gamma_D \in C^{0,1}$, $\text{meas } \Gamma_D > 0$, $\Gamma_N \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$;

2) $\mathbf{g} \in \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$, $\beta_T \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$;

3) $\chi \in L^2(\Gamma_N)$;

4) $K \subset L^2(\Gamma_N)$ — непустое выпуклое замкнутое множество.

Справедлива следующая лемма (см. [9]).

Лемма. При выполнении условия 1 существуют такие зависящие от Ω константы $\delta_0, \delta_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \beta_1, \beta$, что

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) \geq \delta_0 \|\mathbf{v}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (\nabla S, \nabla S) \geq \delta_1 \|S\|_1^2 \quad \forall S \in \Theta; \quad (1.4)$$

$$|((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq \gamma_0 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1, \quad |(\mathbf{u} \cdot \nabla T, S)| \leq \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|T\|_1 \|S\|_1; \quad (1.5)$$

$$|(\beta_T \mathbf{G} T, \mathbf{v})| \leq \beta_1 \|\mathbf{v}\|_1 \|T\|_1, \quad |(\chi, S)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|S\|_1; \quad (1.6)$$

$$\|\text{rot } \mathbf{v}\| \leq \gamma_3 \|\mathbf{v}\|_1, \quad \|\mathbf{v}\|_Q \leq \gamma_4 \|\mathbf{v}\|_1, \quad |(\zeta_d, \mathbf{v})_Q| \leq \gamma_4 \|\zeta_d\|_Q \|\mathbf{v}\|_1. \quad (1.7)$$

Справедливы следующие соотношения:

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad \text{при} \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega); \quad (1.8)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla T, T) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \quad \text{при} \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad T \in \Theta; \quad (1.9)$$

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega), q \neq 0} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{v} \neq 0} \frac{(\operatorname{div} \mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|} \geq \beta = \operatorname{const} > 0. \quad (1.10)$$

Умножая уравнения в (1.1), (1.2) на тестовые функции и интегрируя их, получаем слабую формулировку для задачи (1.1)–(1.3). В такой формулировке решение задачи (1.1)–(1.3) заключается в нахождении тройки $(\mathbf{u}, p, T) \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, удовлетворяющей соотношениям

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p) = ((1 - \beta_T T) \mathbf{G}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega); \quad (1.11)$$

$$\lambda(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) = (\chi, S)_{\Gamma_N} \quad \forall S \in \Theta; \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad T|_{\Gamma_D} = \psi. \quad (1.13)$$

Известно (см., например, [9]), что при выполнении условий 1–3 существует по крайней мере одно решение (\mathbf{u}, p, T) задачи (1.11)–(1.13) и справедливы оценки $\|\mathbf{u}\|_1 \leq M_u$, $\|p\| \leq M_p$, $\|T\|_1 \leq M_T$ (M_u, M_p, M_T — неубывающие непрерывные функции норм $\|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma}$, $\|\beta_T\|$, $\|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$). Если при этом функции \mathbf{g}, ψ, χ “малы” (либо вязкость ν “велика”), т. е. $\gamma_0 M_u + (\beta_1 \gamma_1 / \delta_1 \lambda) M_T < \delta_0 \nu$ (константы $\delta_i, \gamma_i, \beta_1$ введены в (1.4)–(1.6)), то решение является единственным.

2. Постановка экстремальной задачи. Свойства решения. Разобьем множество исходных данных задачи (1.1)–(1.3) на две группы: группу управлений, в которую внесем функцию χ , выполняющую роль искомого управления, и группу фиксированных данных, в которую внесем неизменяемые функции β_T, \mathbf{g} и ψ . Положим $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, p, T)$, $u_0 = (\beta_T, \mathbf{g}, \psi)$, $u = \chi$. Также будем считать, что управление u может изменяться на множестве K , введенном в условии 4.

Полагая $X = \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, $Y = \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) \times \Theta^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$, введем оператор $F \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5): X \times K \rightarrow Y$, где

$$\langle F_1(\mathbf{x}, u), \mathbf{v} \rangle = \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p) - ((1 - \beta_T T) \mathbf{G}, \mathbf{v}),$$

$$\langle F_4(\mathbf{x}, u), S \rangle = \lambda(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) - (\chi, S)_{\Gamma_N},$$

$$\langle F_2(\mathbf{x}, u), q \rangle = (\operatorname{div} \mathbf{u}, q), \quad F_3(\mathbf{x}, u) = \mathbf{u}|_{\Gamma} - \mathbf{g}, \quad F_5(\mathbf{x}, u) = T|_{\Gamma_D} - \psi.$$

Заменив (1.11)–(1.13) операторным уравнением $F(\mathbf{x}, u) \equiv F(\mathbf{u}, p, T, \chi) = 0$, рассмотрим экстремальную задачу

$$J(\mathbf{x}, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\mathbf{u}) + \frac{\mu_1}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, u) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \quad (2.1)$$

Здесь $I(\mathbf{u})$ — слабополунепрерывный снизу на $\mathbf{H}^1(\Omega)$ функционал качества; μ_0, μ_1 — положительные размерные параметры (см. подробнее [6, 7]). Будем использовать два функционала качества: $I_1(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_d\|_Q^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_d\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2$ и $I_2(\mathbf{u}) = \|\operatorname{rot} \mathbf{u} - \zeta_d\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2$, где функция $\mathbf{v}_d \in \mathbf{L}^2(Q)$ (либо $\zeta_d \in \mathbf{L}^2(Q)$) моделирует измеренное или желаемое в некоторой подобласти Q области Ω поле скоростей (либо завихренности).

Обозначим через $(\mathbf{x}_1, u_1) \equiv (\mathbf{u}_1, p_1, T_1, \chi_1) \in X \times K$ решение (произвольное) экстремальной задачи (2.1), существование которого при выполнении условий 1, 2, 4 вытекает

из [9]. Через $(\mathbf{x}_2, u_2) \equiv (\mathbf{u}_2, p_2, T_2, \chi_2) \in X \times K$ обозначим решение близкой к (2.1) экстремальной задачи

$$\tilde{J}(\mathbf{x}, u) = \frac{\mu_0}{2} \tilde{I}(\mathbf{u}) + \frac{\mu_1}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, u) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K, \quad (2.2)$$

полученной заменой функционала I в (2.1) близким функционалом \tilde{I} . Выведем важное неравенство, которому удовлетворяет разность решений (\mathbf{x}_1, u_1) и (\mathbf{x}_2, u_2) задач (2.1), (2.2).

В силу результатов, приведенных в п. 1, для троек (\mathbf{u}_i, p_i, T_i) справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_i\|_1 \leq M_{\mathbf{u}}^0, \quad \|p_i\| \leq M_p^0, \quad \|T_i\|_1 \leq M_T^0, \quad (2.3)$$

где $M_{\mathbf{u}}^0 = \sup_{u \in K} M_{\mathbf{u}}(u_0, u)$; $M_p^0 = \sup_{u \in K} M_p(u_0, u)$; $M_T^0 = \sup_{u \in K} M_T(u_0, u)$. Введем модельные числа Рейнольдса, Рэлея и Прандтля:

$$\text{Re} = \frac{\gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0}{\delta_0 \nu}, \quad \text{R} = \frac{\gamma_1}{\delta_0 \nu} \frac{\beta_1 M_T^0}{\delta_1 \lambda}, \quad \text{Pr} = \frac{\delta_0 \nu}{\delta_1 \lambda} \quad (2.4)$$

и предположим, что выполняется условие

$$\text{Re} + \text{R} \equiv \frac{\gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0}{\delta_0 \nu} + \frac{\gamma_1}{\delta_0 \nu} \frac{\beta_1 M_T^0}{\delta_1 \lambda} < \frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

Обозначим через $(1, \mathbf{y}_i^*)$ ($\mathbf{y}_i^* \equiv (\xi_i, \sigma_i, \zeta_i, \theta_i, \zeta_i^t) \in \mathbf{V} \times L_0^2(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)^* \times \Theta \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$, $i = 1, 2$) соответствующие решениям (\mathbf{x}_i, u_i) нетривиальные множители Лагранжа, удовлетворяющие соотношениям [9]

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \xi_i) + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{w}, \xi_i) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \xi_i) + \varkappa(\mathbf{w} \cdot \nabla T_i, \theta_i) - (\text{div } \mathbf{w}, \sigma_i) + \langle \zeta_i, \mathbf{w} \rangle_{\Gamma} = \\ = -(\mu_0/2) \langle (I^i)'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, u_i), \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{w} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega), \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\varkappa[\lambda(\nabla \tau, \nabla \theta_i) + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla \tau, \theta_i) + \langle \zeta_i^t, \tau \rangle_{\Gamma_D}] + (\beta_T \mathbf{G} \tau, \xi_i) = 0 \quad \forall \tau \in H^1(\Omega); \quad (2.7)$$

$$(\mu_1 \chi_i - \varkappa \theta_i, \tilde{\chi} - \chi_i)_{\Gamma_N} \geq 0 \quad \forall \tilde{\chi} \in K. \quad (2.8)$$

Здесь \varkappa — вспомогательный размерный множитель; функции ξ_i, θ_i будем рассматривать в качестве сопряженных скорости и температуры. В (2.6) $I^1 \equiv I$, $I^2 \equiv \tilde{I}$. Положим $\chi = \chi_1 - \chi_2$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $p = p_1 - p_2$, $T = T_1 - T_2$, $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\zeta^t = \zeta_1^t - \zeta_2^t$ и вычтем соотношения (1.11)–(1.13), записанные для $\mathbf{u}_2, p_2, T_2, u_2$, из соотношений (1.11)–(1.13), записанных для $\mathbf{u}_1, p_1, T_1, u_1$. В результате получаем

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla v) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}, v) - (\text{div } v, p) + (\beta_T \mathbf{G} T, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega); \quad (2.9)$$

$$\lambda(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T_1, S) + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla T, S) = (\chi, S)_{\Gamma_N} \quad \forall S \in \Theta; \quad (2.10)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{0}, \quad T|_{\Gamma_D} = 0. \quad (2.11)$$

Полагая в неравенстве (2.8) $\tilde{\chi} = \chi_1$ при $i = 2$ и $\tilde{\chi} = \chi_2$ при $i = 1$ и складывая их, получаем

$$-\varkappa(\chi, \theta)_{\Gamma_N} \leq -\mu_1 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2. \quad (2.12)$$

Вычтем друг из друга тождества (2.6), (2.7), записанные для $(\mathbf{x}_1, u_1, \mathbf{y}_1^*)$ и $(\mathbf{x}_2, u_2, \mathbf{y}_2^*)$, затем, полагая $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\tau = T$, сложим эти тождества. С учетом (2.12) получаем

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \xi) + ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \xi) + 2((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \xi_2) + \varkappa(\mathbf{u} \cdot \nabla T_1, \theta) + \varkappa(\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_2) + \\ + \varkappa[\lambda(\nabla T, \nabla \theta) + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla T, \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_2)] + (\beta_T \mathbf{G} T, \xi) = \\ = -(\mu_0/2) \langle I'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1) - \tilde{I}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u} \rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Положим $v = \xi$ в (2.9), $S = \varkappa \theta$ в (2.10) и вычтем полученные соотношения из (2.13). Используя неравенство (2.12) и следуя работе [7], находим

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \xi_1 + \xi_2) + \varkappa(\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_1 + \theta_2) + (\mu_0/2) \langle I'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1) - \tilde{I}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u} \rangle \leq -\mu_1 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2. \quad (2.14)$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть при выполнении условий 1, 2, 4 и (2.5) четверки $(\mathbf{u}_1, p_1, T_1, \chi_1)$ и $(\mathbf{u}_2, p_2, T_2, \chi_2)$ являются решениями задач (2.1) и (2.2), $\mathbf{y}_i^* = (\xi_i, \sigma_i, \zeta_i, \theta_i, \zeta_i^t)$ ($i = 1, 2$) — соответствующие им множители Лагранжа. Тогда для разностей $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $p = p_1 - p_2$, $T = T_1 - T_2$, $\chi = \chi_1 - \chi_2$ справедливо соотношение (2.14).

Полагая в (2.9) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, с учетом (1.8) находим $\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{u}) - (\beta_T \mathbf{G} T, \mathbf{u})$. Отсюда с использованием (1.4)–(1.6) получаем

$$\delta_0 \nu \|\mathbf{u}\|_1^2 \leq \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0 \|\mathbf{u}\|_1^2 + \beta_1 \|T\|_1 \|\mathbf{u}\|_1. \quad (2.15)$$

Из (2.5) следует

$$\frac{\delta_0 \nu}{2} < \delta_0 \nu - \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0 - \frac{\beta_1 \gamma_1}{\delta_1 \lambda} M_T^0 \leq \delta_0 \nu - \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0. \quad (2.16)$$

С учетом (2.16) соотношение (2.15) запишем в виде $(\delta_0 \nu / 2) \|\mathbf{u}\|_1^2 \leq (\delta_0 \nu - \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0) \|\mathbf{u}\|_1^2 \leq \beta_1 \|T\|_1 \|\mathbf{u}\|_1$. В результате для нормы разности \mathbf{u} имеем следующую оценку:

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leq (2\beta_1 / \delta_0 \nu) \|T\|_1. \quad (2.17)$$

Аналогичная оценка справедлива и для разности давлений $p = p_1 - p_2$. Для ее получения используем inf-sup-условие (1.10), в силу которого для функции $p = p_1 - p_2$ и любого (сколь угодно малого) числа $\delta > 0$ существует такая функция $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbf{v}_0 \neq 0$, что $(\operatorname{div} \mathbf{v}_0, p) \geq \beta_0 \|\mathbf{v}_0\|_1 \|p\|$, $\beta_0 = \beta - \delta > 0$. Полагая в тождестве для \mathbf{u} в (2.9) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ и используя эту оценку, а также оценки (1.4), (1.5), имеем

$$\beta_0 \|\mathbf{v}_0\|_1 \|p\| \leq (\operatorname{div} \mathbf{v}_0, p) \leq (\nu + 2\gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0) \|\mathbf{v}_0\|_1 \|\mathbf{u}\|_1 + \beta_1 \|T\|_1 \|\mathbf{v}_0\|_1. \quad (2.18)$$

Сокращая выражение (2.18) на $\|\mathbf{v}_0\|_1 \neq 0$, получаем

$$\|p\| \leq \frac{\nu + 2\gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0}{\beta_0} \|\mathbf{u}\|_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \|T\|_1 \leq \frac{\beta_1}{\beta_0} (2M + 1) \|T\|_1, \quad M = \delta_0^{-1} + 2 \operatorname{Re}. \quad (2.19)$$

3. Единственность и устойчивость решений экстремальных задач. На основе теоремы 1 и оценок (2.17), (2.19) исследуем единственность и устойчивость решения задачи (2.1) для конкретных функционалов качества. Сначала рассмотрим экстремальную задачу

$$J(\mathbf{v}, \chi) \equiv \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, \chi) = 0, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \chi \in K, \quad (3.1)$$

соответствующую функционалу I_1 . Пусть $(\mathbf{x}_1, u_1) \equiv (\mathbf{u}_1, p_1, T_1, \chi_1)$ — решение задачи (3.1), соответствующее функции $\mathbf{v}_d \equiv \mathbf{u}_d^{(1)} \in \mathbf{L}^2(Q)$; $(\mathbf{x}_2, u_2) \equiv (\mathbf{u}_2, p_2, T_2, \chi_2)$ — решение задачи (3.1), соответствующее возмущенной функции $\tilde{\mathbf{v}}_d \equiv \mathbf{u}_d^{(2)} \in \mathbf{L}^2(Q)$. Полагая $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_d^{(1)} - \mathbf{u}_d^{(2)}$, в условиях задачи (3.1) имеем

$$\langle I'_u(\mathbf{u}_i), \mathbf{w} \rangle = 2(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_d^{(i)}, \mathbf{w})_Q, \quad \langle I'_u(\mathbf{u}_1) - \tilde{I}'_u(\mathbf{u}_2), \mathbf{u} \rangle = 2(\|\mathbf{u}\|_Q^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{u}_d)_Q). \quad (3.2)$$

Соотношения (2.7), (2.9)–(2.11) для задачи (3.1) не меняются, а тождество (2.6) и неравенство (2.14) с учетом (3.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \xi_i) + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{w}, \xi_i) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \xi_i) + \varkappa(\mathbf{w} \cdot \nabla T_i, \theta_i) - (\operatorname{div} \mathbf{w}, \sigma_i) + \langle \zeta_i, \mathbf{w} \rangle_{\Gamma} = \\ = -\mu_0(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_d^{(i)}, \mathbf{w})_Q \quad \forall \mathbf{w} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega); \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \xi_1 + \xi_2) + \varkappa(\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_1 + \theta_2) + \mu_0(\|\mathbf{u}\|_Q^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{u}_d)_Q) \leq -\mu_1 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2. \quad (3.4)$$

В силу (2.11) $T \in \Theta$. Полагая в (2.10) $S = T$, в силу (1.9) получаем

$$\lambda(\nabla T, \nabla T) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla T_1, T) + (\chi, T)_{\Gamma_N}. \quad (3.5)$$

С использованием соотношений (1.4)–(1.6), (2.3) из (3.5) находим

$$\delta_1 \lambda \|T\|^2 \leq \gamma_1 M_T^0 \|\mathbf{u}\|_1 \|T\|_1 + \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|T\|_1.$$

Отсюда и из (2.17) следует

$$\|T\|_1 \leq \frac{\gamma_1 M_T^0}{\delta_1 \lambda} \|\mathbf{u}\|_1 + \frac{\gamma_2}{\delta_1 \lambda} \|\chi\|_{\Gamma_N} \leq \frac{2\beta_1}{\delta_0 \nu} \frac{\gamma_1 M_T^0}{\delta_1 \lambda} \|T\|_1 + \frac{\gamma_2}{\delta_1 \lambda} \|\chi\|_{\Gamma_N}. \quad (3.6)$$

С учетом (2.4), (2.17), (2.19) из (3.6) выводим следующие оценки:

$$\|T\|_1 \leq \frac{\gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N}}{\delta_1 \lambda (1 - 2R)}, \quad \|\mathbf{u}\|_1 \leq \frac{2\beta_1 \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N}}{\delta_0 \nu \delta_1 \lambda (1 - 2R)}, \quad \|p\| \leq \frac{\beta_1 \gamma_2 (2M + 1) \|\chi\|_{\Gamma_N}}{\beta_0 \delta_1 \lambda (1 - 2R)}. \quad (3.7)$$

Полагая в (3.3), (2.7) $\mathbf{w} = \xi_i$, $\tau = \theta_i$ и учитывая (1.8), (1.9), получаем

$$\nu(\nabla \xi_i, \nabla \xi_i) = -((\xi_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \xi_i) - \varkappa(\xi_i \cdot \nabla T_i, \theta_i) - \mu_0(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_d^{(i)}, \xi_i)_Q; \quad (3.8)$$

$$\varkappa \lambda (\nabla \theta_i, \nabla \theta_i) = -(\beta_T \mathbf{G} \theta_i, \xi_i), \quad i = 1, 2. \quad (3.9)$$

Используя оценки (1.4)–(1.7), имеем

$$(\nabla \xi_i, \nabla \xi_i) \geq \delta_0 \|\xi_i\|_1^2, \quad |((\xi_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \xi_i)| \leq \gamma_0 \|\mathbf{u}_i\|_1 \|\xi_i\|_1^2 \leq \gamma_0 M_u^0 \|\xi_i\|_1^2; \quad (3.10)$$

$$|(\beta_T \mathbf{G} \theta_i, \xi_i)| \leq \beta_1 \|\theta_i\|_1 \|\xi_i\|_1, \quad \varkappa |(\xi_i \cdot \nabla T_i, \theta_i)| \leq \varkappa \gamma_1 M_T^0 \|\xi_i\|_1 \|\theta_i\|_1; \quad (3.11)$$

$$|(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_d^{(i)}, \xi_i)_Q| \leq \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_d^{(i)}\|_Q \|\xi_i\|_1 \leq \gamma_4 (\gamma_4 M_u^0 + \|\mathbf{u}_d^{(i)}\|_Q) \|\xi_i\|_1. \quad (3.12)$$

С учетом (3.10)–(3.12) из соотношений (3.8), (3.9) находим

$$\|\theta_i\|_1 \leq \frac{\beta_1}{\delta_1 \lambda \varkappa} \|\xi_i\|_1, \quad (3.13)$$

$$\left(\delta_0 \nu - \gamma_0 M_u^0 - \frac{\beta_1 \gamma_1}{\delta_1 \lambda} M_T^0 \right) \|\xi_i\|_1^2 \leq \mu_0 \gamma_4 (\gamma_4 M_u^0 + \|\mathbf{u}_d^{(i)}\|_Q) \|\xi_i\|_1.$$

С использованием (2.16), (1.7) из неравенств (3.13) последовательно выводим

$$\|\xi_i\|_1 \leq \frac{2\mu_0 \gamma_4}{\delta_0 \nu} (\gamma_4 M_u^0 + \|\mathbf{u}_d^{(i)}\|_Q) = \frac{2\mu_0 \gamma}{\gamma_0} (\text{Re} + \text{Re}^0), \quad (3.14)$$

$$\|\theta_i\|_1 \leq \frac{2\mu_0 \gamma \beta_1}{\gamma_0 \delta_1 \lambda \varkappa} (\text{Re} + \text{Re}^0),$$

где

$$\gamma = \gamma_4^2, \quad \text{Re}^0 = \frac{\gamma_0}{\delta_0 \nu \gamma_4} \max(\|\mathbf{u}_d^{(1)}\|_Q, \|\mathbf{u}_d^{(2)}\|_Q). \quad (3.15)$$

Учитывая (1.5), (3.7) и неравенства для ξ_i , θ_i в (3.14), имеем

$$|((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \xi_1 + \xi_2)| \leq \gamma_0 \|\mathbf{u}\|_1^2 (\|\xi_1\|_1 + \|\xi_2\|_1) \leq 4\mu_0 \gamma \left(\frac{2\beta_1}{\delta_0 \nu} \frac{\gamma_2}{\delta_1 \lambda} \right)^2 \frac{\text{Re} + \text{Re}^0}{(1 - 2R)^2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2,$$

$$\varkappa |(\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_1 + \theta_2)| \leq 4\mu_0 \gamma \frac{2\beta_1}{\delta_0 \nu} \left(\frac{\gamma_2}{\delta_1 \lambda} \right)^2 \frac{\gamma_1 \beta_1}{\delta_1 \lambda} \frac{\text{Re} + \text{Re}^0}{\gamma_0 (1 - 2R)^2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \quad (3.16)$$

(γ и Re^0 определены в (3.15)). Из соотношений (3.16), (2.4) получаем

$$|((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \xi_1 + \xi_2) + \varkappa(\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_1 + \theta_2)| \leqslant \\ \leqslant 2\mu_0\gamma \left(\frac{2\beta_1}{\delta_0\nu} \frac{\gamma_2}{\delta_1\lambda} \right)^2 \frac{\text{Re} + \text{Re}^0}{(1 - 2R)^2} \left(2 + \frac{\gamma_1}{\text{Pr} \gamma_0} \right) \|\chi\|_{\Gamma_N}^2. \quad (3.17)$$

Пусть исходные данные для задачи (3.1) и параметры μ_0, μ_1 таковы, что

$$(1 - \varepsilon)\mu_1 \geqslant 2\mu_0\gamma \left(\frac{2\beta_1}{\delta_0\nu} \frac{\gamma_2}{\delta_1\lambda} \right)^2 \frac{\text{Re} + \text{Re}^0}{(1 - 2R)^2} \left(2 + \frac{\gamma_1}{\text{Pr} \gamma_0} \right), \quad \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (3.18)$$

При выполнении условия (3.18) из неравенства (3.17) следует

$$|((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \xi_1 + \xi_2) + \varkappa(\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_1 + \theta_2)| \leqslant (1 - \varepsilon)\mu_1 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2. \quad (3.19)$$

С учетом (3.19) из (3.4) получаем неравенство

$$\mu_0(\|\mathbf{u}\|_Q^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{u}_d)_Q) \leqslant -((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \xi_1 + \xi_2) - \varkappa(\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_1 + \theta_2) - \mu_1 \|\chi\|_{\Gamma_N} \\ \leqslant -\varepsilon\mu_1 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2, \quad (3.20)$$

из которого следует, что $\|\mathbf{u}\|_Q^2 \leqslant (\mathbf{u}, \mathbf{u}_d)_Q \leqslant \|\mathbf{u}\|_Q \|\mathbf{u}_d\|_Q$. Отсюда получаем $\|\mathbf{u}\|_Q \leqslant \|\mathbf{u}_d\|_Q$.

Тогда с учетом $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_d^{(1)} - \mathbf{u}_d^{(2)}$ имеем

$$\|\mathbf{u}\|_Q \equiv \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_Q \leqslant \|\mathbf{u}_d^{(1)} - \mathbf{u}_d^{(2)}\|_Q \equiv \|\mathbf{u}_d\|_Q. \quad (3.21)$$

При $Q = \Omega$ оценка (3.21) является оценкой устойчивости компоненты $\hat{\mathbf{u}}$ решения задачи (3.1) относительно малых возмущений в норме $\mathbf{L}^2(\Omega)$ функции $\mathbf{v}_d \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. При $\mathbf{u}_d^{(1)} = \mathbf{u}_d^{(2)}$ из (3.21) вытекает $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Отсюда с учетом (2.17), (2.19), (3.20), в свою очередь, следует $T_1 = T_2$, $p_1 = p_2$ и $\chi_1 = \chi_2$, что означает единственность решения задачи (3.1) при $Q = \Omega$ и выполнении условия (3.18).

Заметим, что единственность и устойчивость решения задачи (3.1) при выполнении условия (3.18) имеют место и в случае, когда $Q \subset \Omega$, т. е. Q является лишь частью области Ω . Чтобы доказать это, используем неравенство (3.20), которое с учетом (3.21) запишем в виде

$$\varepsilon\mu_1 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \leqslant -\mu_0 \|\mathbf{u}\|_Q^2 + \mu_0 \|\mathbf{u}\|_Q \|\mathbf{u}_d\|_Q \leqslant \mu_0 \|\mathbf{u}_d\|_Q^2. \quad (3.22)$$

Из (3.22), (3.7) получаем следующие оценки устойчивости:

$$\|\chi_1 - \chi_2\|_{\Gamma_N} \leqslant \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\mu_1}} \Delta, \quad \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1 \leqslant \frac{2\beta_1\gamma_2\Delta}{\delta_0\nu\delta_1\lambda(1 - 2R)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\mu_1}}, \\ \|T_1 - T_2\|_1 \leqslant \frac{\gamma_2\Delta}{\delta_1\lambda(1 - 2R)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\mu_1}}, \quad \|p_1 - p_2\| \leqslant \frac{\beta_1\gamma_2(2M + 1)}{\beta_0\delta_1\lambda(1 - 2R)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\mu_1}} \Delta \quad (3.23)$$

($\Delta = \|\mathbf{u}_d^{(1)} - \mathbf{u}_d^{(2)}\|_Q$). Таким образом доказана

Теорема 2. Пусть при выполнении условий 1, 2, 4 и (2.5) четверка $(\mathbf{u}_i, p_i, T_i, \chi_i)$ является решением задачи (3.1), соответствующим заданной функции $\mathbf{u}_d^{(i)} \in \mathbf{L}^2(Q)$ ($i = 1, 2$), и выполняется условие (3.18). Тогда справедливы оценки устойчивости (3.21), (3.23), где $\Delta = \|\mathbf{u}_d^{(1)} - \mathbf{u}_d^{(2)}\|_Q$.

По аналогичной схеме можно исследовать экстремальную задачу

$$J(\mathbf{v}, \chi) \equiv \frac{\mu_0}{2} \|\text{rot } \mathbf{v} - \zeta_d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, \chi) = 0, \quad (\mathbf{x}, \chi) \in X \times K, \quad (3.24)$$

получаемую из (3.1) заменой функционала $I_1(\mathbf{v})$ на $I_2(\mathbf{v})$. Аналогичный анализ показывает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть при выполнении условий 1, 2, 4 и (2.5) четверка $(\mathbf{u}_i, p_i, T_i, \chi_i)$ является решением задачи (3.24), соответствующим заданной функции $\zeta_d^{(i)} \in \mathbf{L}^2(Q)$ ($i = 1, 2$), и выполняется условие (3.18), где $\gamma = \gamma_3^2$, $\text{Re}^0 = (\gamma_0/(\delta_0\nu\gamma_3)) \max(\|\zeta_d^{(1)}\|_Q, \|\zeta_d^{(2)}\|_Q)$. Тогда $\|\text{rot } \mathbf{u}_1 - \text{rot } \mathbf{u}_2\|_Q \leq \|\zeta_d^{(1)} - \zeta_d^{(2)}\|_Q$ и при $\Delta = \|\zeta_d^{(1)} - \zeta_d^{(2)}\|_Q$ справедливы оценки устойчивости (3.23).

Заметим, что единственность и устойчивость решения задачи (3.1) либо (3.24) как при $Q = \Omega$, так и при $Q \subset \Omega$ можно доказать лишь при условии, что параметр μ_1 в (3.1) либо в (3.24) положителен и удовлетворяет условию (3.18). Условия (2.5), (3.18) являются достаточно жесткими, поскольку фактически имеют физический смысл условий малости, налагаемых на исходные данные. Для конкретных экстремальных задач указанные условия могут быть значительно ослаблены, как показано ниже при анализе вычислительных экспериментов.

4. Численный алгоритм. Анализ вычислительных экспериментов. Обсудим результаты вычислительных экспериментов по решению экстремальной задачи (3.24) при $K = L^2(\Gamma_N)$. В этом случае неравенство (2.8) переходит в тождество $(\mu_1\chi - \theta, \tilde{\chi})_{\Gamma_N} = 0$ для всех $\tilde{\chi} \in L^2(\Gamma_N)$, из которого следует, что управление χ связано с сопряженной температурой θ формулой $\chi = \theta/\mu_1$. Исключив χ , оставшиеся соотношения для шестерки $(\mathbf{u}, p, T, \xi, \sigma, \theta)$ запишем в виде операторного уравнения $\Phi(\mathbf{u}, p, T, \xi, \sigma, \theta) = 0$ (Φ — нелинейный оператор, определяемый введенным выше оператором F). С учетом нелинейности оператора Φ для численного решения полученного уравнения применим итерационный алгоритм, основанный на методе Ньютона и включающий следующие этапы:

1. Выбираем начальное приближение $\mathbf{u}_0, p_0, T_0, \xi_0, \sigma_0, \theta_0$. Полагаем $n = 0$.

2. Вычисляем $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, \tilde{T}, \tilde{\xi}, \tilde{\sigma}, \tilde{\theta}$, решая линейное операторное уравнение $\Phi'(\mathbf{u}_n, p_n, T_n, \xi_n, \sigma_n, \theta_n)(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, \tilde{T}, \tilde{\xi}, \tilde{\sigma}, \tilde{\theta}) = -\Phi(\mathbf{u}_n, p_n, T_n, \xi_n, \sigma_n, \theta_n)$, в слабой формулировке соответствующей краевой задачи относительно функций $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, \tilde{T}, \tilde{\xi}, \tilde{\sigma}, \tilde{\theta}$ имеющее вид

$$\begin{aligned} & \nu(\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - (\tilde{p}, \text{div } \mathbf{v}) + (\beta_T \tilde{T} \mathbf{G}, \mathbf{v}) + \\ & + \nu(\nabla \mathbf{u}_n, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) - (p_n, \text{div } \mathbf{v}) - ((1 - \beta_T T_n) \mathbf{G}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ & \lambda(\nabla \tilde{T}, \nabla S) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla T_n, S) + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla \tilde{T}, S) - (1/\mu_1)(\tilde{\theta}, S)_{\Gamma_N} + \\ & + \lambda(\nabla T_n, \nabla S) + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla T_n, S) - (1/\mu_1)(\theta_n, S)_{\Gamma_N} = 0 \quad \forall S \in H^1(\Omega, \Gamma_D), \\ & \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \tilde{\xi}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \xi_n) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{w}, \tilde{\xi}) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \xi_n) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \tilde{\xi}) + \\ & + (\mathbf{w} \cdot \nabla \tilde{T}, \theta_n) + (\mathbf{w} \cdot \nabla T_n, \tilde{\theta}) + (\tilde{\sigma}, \text{div } \mathbf{w}) + (\mu_0/2)(I_i)''_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_n)(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + \\ & + \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \xi_n) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{w}, \xi_n) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \xi_n) + \\ & + (\mathbf{w} \cdot \nabla T_n, \theta_n) + (\sigma_n, \text{div } \mathbf{w}) + (\mu_0/2)\langle (I_i)'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_n), \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ & \lambda(\nabla h, \nabla \tilde{\theta}) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla h, \theta_n) + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla h, \tilde{\theta}) + (\beta h \mathbf{G}, \tilde{\theta}) + \\ & + \lambda(\nabla h, \nabla \theta_n) + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla h, \theta_n) + (\beta h \mathbf{G}, \xi_n) = 0 \quad \forall h \in H^1(\Omega, \Gamma_D), \\ & \text{div } \tilde{\mathbf{u}} = -\text{div } \mathbf{u}_n \quad \text{в } \Omega, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g} - \mathbf{u}_n \quad \text{на } \Gamma, \quad \tilde{T} = \psi - T_n \quad \text{на } \Gamma_D, \\ & \text{div } \tilde{\xi} = -\text{div } \xi_n \quad \text{в } \Omega, \quad \tilde{\xi} = -\xi_n \quad \text{на } \Gamma, \quad \tilde{\theta} = -\theta_n \quad \text{на } \Gamma_D. \end{aligned} \tag{4.1}$$

3. Пересчитываем значения искомых величин по формулам $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tilde{\mathbf{u}}, p_{n+1} = p_n + \tilde{p}, T_{n+1} = T_n + \tilde{T}, \xi_{n+1} = \xi_n + \tilde{\xi}, \sigma_{n+1} = \sigma_n + \tilde{\sigma}, \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\theta}$.

4. Проверяем условие выхода из цикла. В случае если данное условие не выполняется, увеличиваем номер шага n на единицу и переходим к этапу 2.

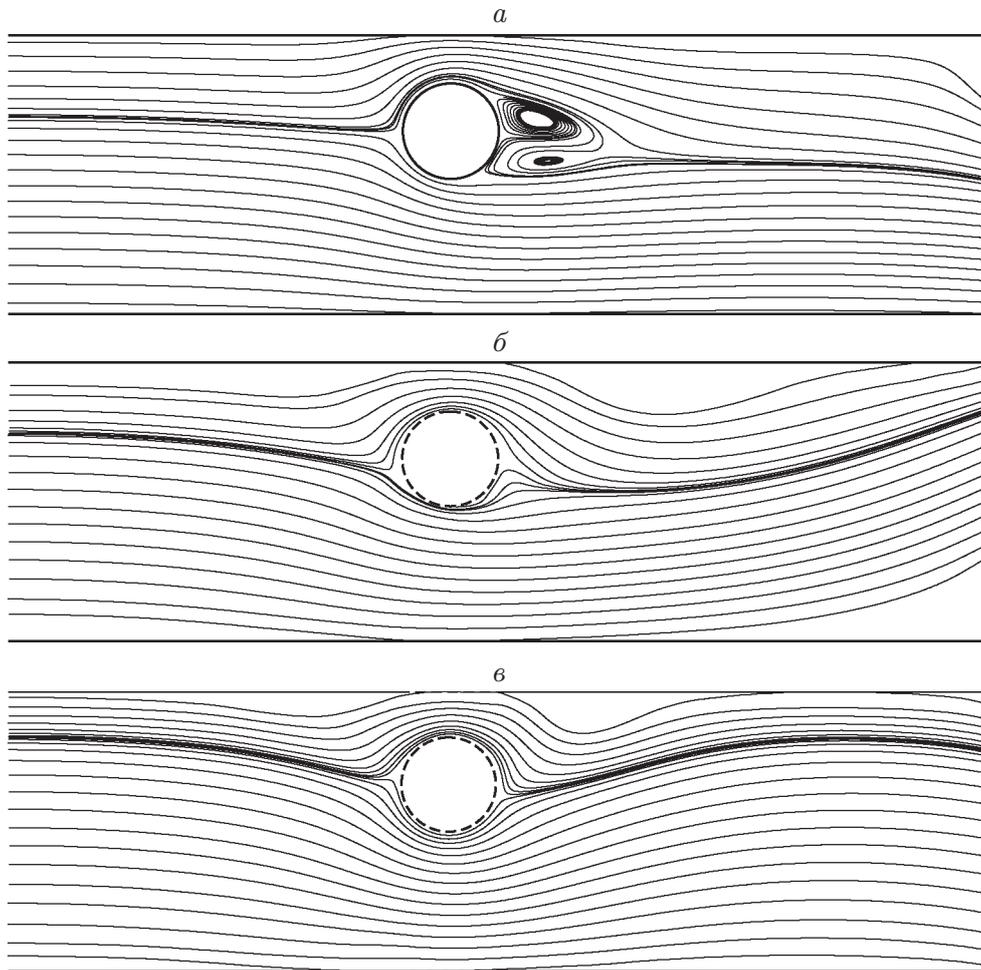


Рис. 1. Линии тока при обтекании цилиндра в канале при $Re = 100$:
a — неуправляемое течение, *б*, *в* — управляемое течение при $R = 10^5$ (*б* — управление через поверхность тела, *в* — управление через поверхность тела и часть стенок канала)

В формулах (4.1) Φ' — производная Фреше от оператора Φ ; $(I_i)'_{\mathbf{u}}$ и $(I_i)''_{\mathbf{u}}$ — производные Фреше по \mathbf{u} первого и второго порядков от I_i . В частности, $\langle (I_1)'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_n), \mathbf{w} \rangle = 2(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_d, \mathbf{w})_Q$, $(I_1)''_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_n)(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) = 2(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_Q$.

При проведении вычислительных экспериментов роль условия выхода из цикла играло неравенство $\|T_{n+1} - T_n\|/\|T_n\| < 10^{-6}$. Для численного решения системы (4.1) методом конечных элементов использовался свободно распространяемый пакет программ freeFEM++.

Обсудим результаты вычислительных экспериментов. Сначала рассмотрим задачу обтекания кругового цилиндра Ω_1 плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости в канале Ω_2 . На рис. 1, *a* представлены линии тока течения, полученного в результате решения двумерной краевой задачи

$$-(1/Re)\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} + \text{grad } p = \tilde{\mathbf{G}}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1; \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}_1(y), \quad \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p\mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

для безразмерных уравнений Навье — Стокса при $\Omega_2 = (0, 10) \times (0, 3)$, $\Omega_1 = \{(x, y): (x - 4,5)^2 + (y - 2)^2 < 0,25\}$ и $Re = 100$. Граничные условия (4.3) соответствуют:

1) условиям прилипания на жестких границах Γ_0 (поверхности цилиндра и боковых стенках канала); 2) заданию параболического профиля $\mathbf{g}_1(y) = \{y(3-y), 0\}$ для скорости на участке втекания Γ_1 ; 3) “естественному” краевому условию $(1/\text{Re}) \partial \mathbf{u} / \partial n - p \mathbf{n} = \mathbf{0}$ на участке вытекания Γ_2 . Последнее условие использовалось, в частности, в работах [10, 11], посвященных исследованию экстремальных задач для стационарных уравнений Навье — Стокса, в которых роль управления играет функция \mathbf{g} в (1.3) либо плотность внешних сил. На рис. 1,а видно, что позади обтекаемого тела образуется вихревая зона. Чтобы уменьшить эту зону, решим экстремальную задачу минимизации функционала $\tilde{I}_2(\mathbf{u}) \equiv \|\text{rot } \mathbf{u}\|^2$ для безразмерного аналога полной модели (1.1), (1.2) при граничных условиях (4.3) для скорости и условия $T = \psi = 0$ на $\Gamma_D \equiv \Gamma_1$ для температуры. На рис. 1,б показаны линии тока течения, полученного в результате решения этой задачи при числе Рейнольдса $\text{Re} = 100$ и числе Рэлея $R = 10^5$ в случае управления тепловым потоком χ через поверхность тела. На рис. 1,в представлены линии тока, полученные при минимизации $\tilde{I}_2(\mathbf{u})$ за счет выбора потока тепла на поверхности цилиндра и на близлежащих участках стенок канала, показанных штриховыми линиями.

На рис. 2 представлена зависимость безразмерного потока тепла χ через поверхность цилиндра от угловой переменной $\alpha \in [0, 360^\circ]$ для второго варианта управления, представленного на рис 1,в. На верхней поверхности цилиндра действие управления приводит к охлаждению жидкости, в результате чего жидкость, обтекая тело, опускается вниз. На нижней поверхности цилиндра жидкость нагревается и, обтекая тело, поднимается вверх, поэтому отрыва потока не происходит.

Важной характеристикой процесса обтекания тела является коэффициент сопротивления, который вычисляется по формуле $C_x = 2F_x/(DU^2)$, где F_x — горизонтальная компонента силы, действующей на тело со стороны жидкости; D — диаметр цилиндра; U — характерная скорость потока, набегающего на тело. Значения коэффициента сопротивления C_x для неуправляемого течения (см. рис. 1,а), первого и второго вариантов управления (см. рис. 1,б,в) при различных значениях числа Рейнольдса Re приведены в таблице. Анализ данной таблицы показывает, что при использовании второго варианта управления (см. рис. 1,в) коэффициент сопротивления значительно уменьшается по сравнению со случаем неуправляемого течения, особенно при $\text{Re} = 80, 100$.

Рассмотрим аналогичную по постановке задачу обтекания кругового цилиндра в резко сужающемся канале. На рис. 3,а приведены линии тока течения, полученного в результате

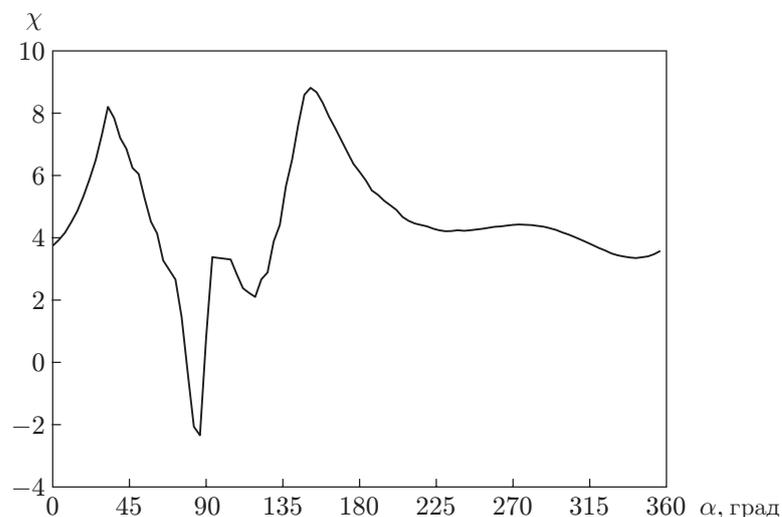


Рис. 2. Распределение безразмерного потока тепла по поверхности цилиндра

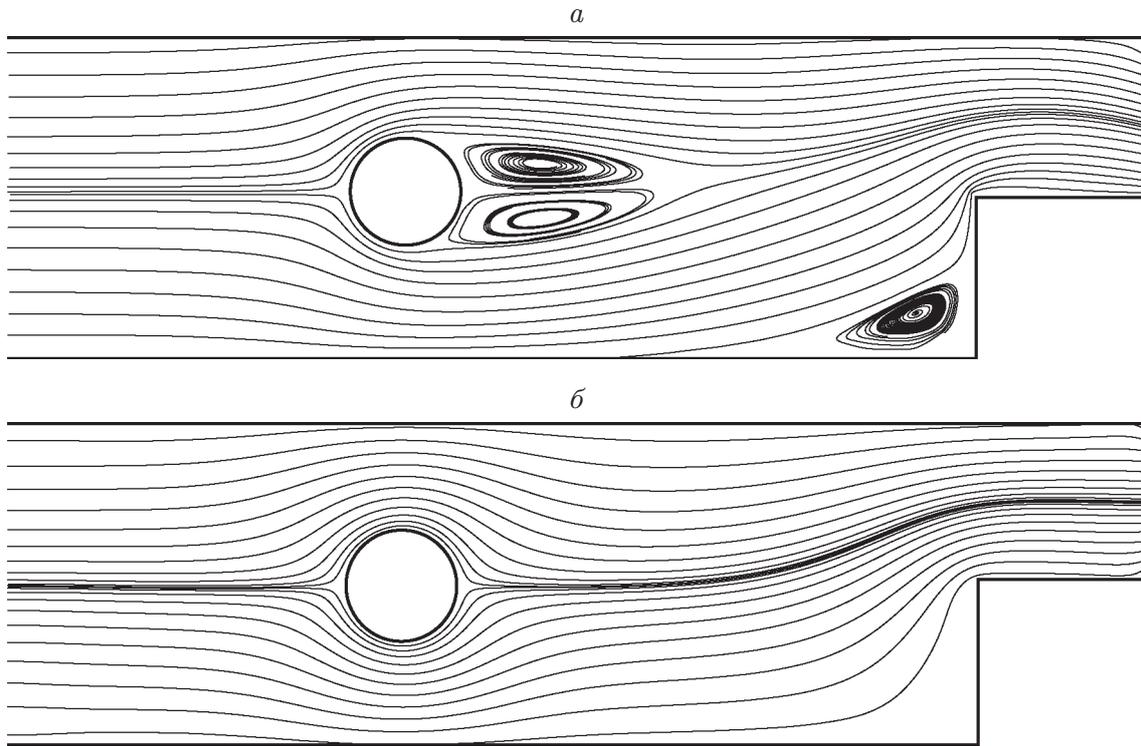


Рис. 3. Линии тока при обтекании цилиндра в резко сужающемся канале при $Re = 100$:

a — неуправляемое течение, *б* — течение с управлением через поверхность тела и твердые стенки канала при $R = 10^5$

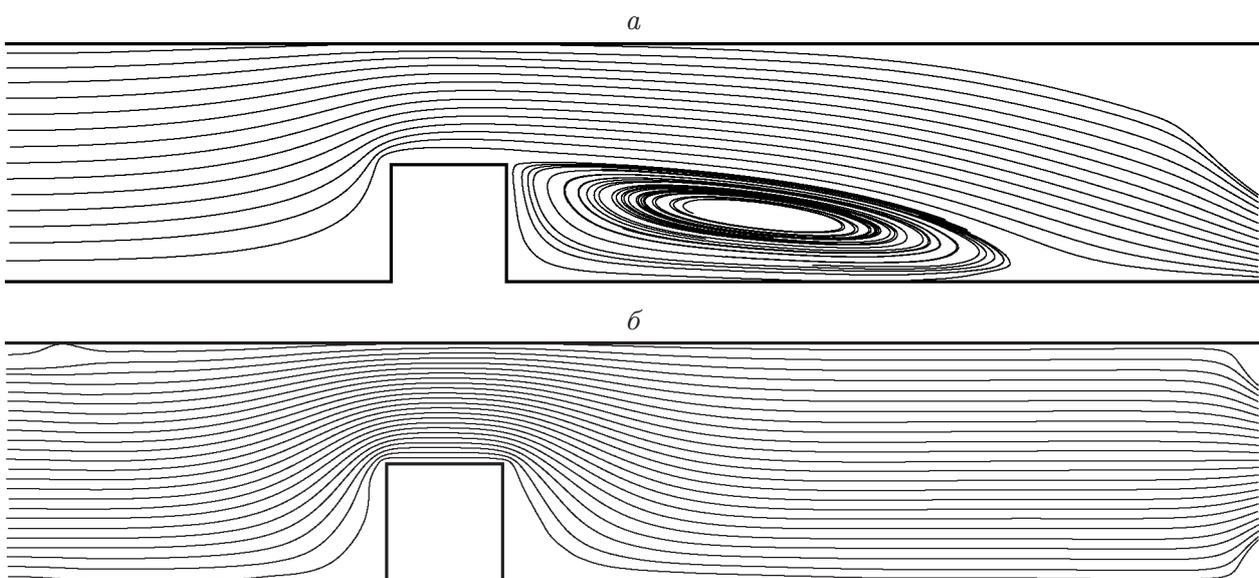


Рис. 4. Линии тока в канале с уступом при $Re = 100$:

a — неуправляемое течение, *б* — течение с управлением через стенки канала при $R = 10^5$

Значения коэффициента сопротивления C_x в случаях, представленных на рис. 1, при различных числах Рейнольдса

Re	C_x		
	рис. 1,а	рис. 1,б	рис. 1,в
20	3,73	3,09	2,41
40	2,52	1,96	1,24
60	2,04	1,59	0,86
80	1,78	1,40	0,68
100	1,62	1,28	0,57

решения двумерной краевой задачи (4.2), (4.3) при $Re = 100$. Видно, что сужение канала приводит к появлению дополнительной вихревой зоны в правом нижнем углу. Для уменьшения обеих вихревых зон вновь решаем задачу минимизации функционала $\tilde{I}_2(\mathbf{u})$. На рис. 3,б показано течение, полученное в результате решения этой задачи при $Re = 100$, $R = 10^5$ и управлении за счет выбора теплового потока χ на поверхности цилиндра и твердых стенках канала. Видно, что удастся значительно уменьшить вихревые зоны и получить течение, по своей структуре близкое к безвихревому течению вязкой жидкости.

Рассмотрим течение в канале с уступом. На рис. 4,а показаны линии тока, построенные путем решения двумерной краевой задачи (4.2), (4.3) при $Re = 100$. Видно, что за уступом образуется вихревая зона, для уменьшения которой решим задачу минимизации функционала $\tilde{I}_2(\mathbf{u})$. На рис. 4,б показано течение, полученное в результате решения этой задачи при $Re = 100$ и $R = 10^5$ за счет управления тепловым потоком χ на стенках канала. Полученное течение по своей структуре близко к безвихревому течению вязкой жидкости.

Анализ полученных результатов и их сравнение с результатами работ [10, 11] показывает, что использование граничного температурного управления позволяет эффективно влиять на поле скоростей течений вязкой жидкости и получать течения с заданными динамическими свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gunzburger M. D., Hou L., Svobodny T. P. The approximation of boundary control problems for fluid flows with an application to control by heating and cooling // *Comput. Fluids*. 1993. V. 22. P. 239–251.
2. Ito K., Ravindran S. S. Optimal control of thermally convected fluid flows // *SIAM J. Sci. Comput.* 1998. V. 19, N 6. P. 1847–1869.
3. Алексеев Г. В. Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // *Сиб. мат. журн.* 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.
4. Lee H.-C., Imanuvilov O. Yu. Analysis of optimal control problems for the 2-D stationary Boussinesq equations // *J. Math. Anal. Appl.* 2000. V. 242. P. 191–211.
5. Алексеев Г. В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // *Сиб. мат. журн.* 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
6. Алексеев Г. В. Единственность и устойчивость в коэффициентных обратных экстремальных задачах для стационарной модели массопереноса // *Докл. АН.* 2007. Т. 416, № 6. С. 750–753.
7. Алексеев Г. В. Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2007. Т. 47, № 6. С. 1055–1076.
8. Алексеев Г. В., Соболева О. В., Терешко Д. А. Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // *ПМТФ.* 2008. Т. 49, № 4. С. 24–35.

9. **Алексеев Г. В.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости / Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко. Владивосток: Дальнаука, 2008.
10. **Slawig T.** PDE-constrained control using Femlab-control of the Navier — Stokes equations // Numer. Algorithms. 2006. V. 42, N 2. P. 107–126.
11. **De los Reyes J. C., Tröltzsch F.** Optimal control of the stationary Navier — Stokes equations with mixed control-state constraints // SIAM J. Control Optim. 2007. V. 46, N 2. P. 604–629.

*Поступила в редакцию 5/II 2009 г.,
в окончательном варианте — 24/VII 2009 г.*
