УДК 532.593 : 539.3 : 624.131

*А. Е. Букатов, В. В. Жарков, Д. Д. Завьялов*

# ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ СЖАТИИ

Изучается влияние неравномерного сжатия на трехмерные изгибные колебания тонкой упругой плавающей пластинки и волновое возмущение в слое однородной жидкости под ней при движении области давлений. Анализируется зависимость годографа волнового вектора и структуры фазовых портретов колебаний от скорости и направления перемещения генератора волн, величин продольного, поперечного и сдвигового сжимающих усилий. Для условий продольного и равномерного сжатия изгибно-гравитационные волны при движении области давлений рассматривались в [1—4].

**1.** Пусть на поверхности потока однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины $H$ плывет тонкая упругая неравномерно сжатая пластинка. По поверхности пластинки под углом $\alpha$ к направлению потока движется с постоянной скоростью $v$ генератор волновых возмущений

$$p = p_0 f(x_1, y) \exp(-i\sigma t), \quad x_1 = x - vt. \tag{1.1}$$

Рассмотрим влияние сжимающих усилий на трехмерные установившиеся изгибные колебания пластинки и волновое возмущение потока жидкости. В системе координат $x_1$, $y$, $z$, связанной с движущейся областью давлений (1.1), задача о колебаниях малой амплитуды сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -H < z < 0 \tag{1.2}$$

с граничными условиями

$$L\zeta + (1/g)F\varphi = p_1 f(x, y) \exp(-i\sigma t), \ z = 0; \tag{1.3}$$
$$F\zeta = \partial\varphi/\partial z, \ z = 0; \ \partial\varphi/\partial z = 0, \ z = -H.$$

Здесь
$$L = D_1\nabla^4 + Q_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q_2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2Q_3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \varkappa_1 F^2 + 1;$$
$$F = \frac{\partial}{\partial t} + (u_x + v)\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$
$$\{D_1, Q_1, Q_2, Q_3, \varkappa_1, p_1\} = \frac{1}{\rho g}\{D, Q_x, Q_y, Q_{xy}, \varkappa, p_0\};$$
$$D = Eh^3[12(1-\nu^2)]^{-1}; \ \varkappa = \rho_1 h; \ u_x = u\cos\alpha; \ u_y = u\sin\alpha;$$

$Q_x$, $Q_y$, $Q_{xy}$ — сжимающие усилия по соответствующим направлениям; $E$, $h$, $\nu$, $\rho_1$ — модуль нормальной упругости, толщина, коэффициент Пуассона, плотность пластинки; $\rho$ — плотность жидкости; $u$ — модуль вектора скорости потока; $\zeta$ — прогиб пластинки. Здесь и далее у $x_1$ индекс 1 опущен.

Решая задачу (1.1) — (1.3) методом интегрального преобразования Фурье для прогиба пластинки $\zeta$, получим выражение

$$\zeta = \frac{p_1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{\bar f(m, n)M(r)}{\tau^2 - \sigma_0^2}\exp[i(mx + ny - \sigma t)]\,dm\,dn, \tag{1.4}$$
$$\tau^2 = M(r)l(m, n), \ M(r) = (1 + \varkappa_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} rg \operatorname{th} rH,$$
$$l(m, n) = 1 + D_1 r^4 - Q_1 m^2 - Q_2 n^2 - 2Q_3 mn,$$
$$\sigma_0 = \sigma - (u_x + v)m - u_y n, \ r^2 = m^2 + n^2$$

($\bar f(m, n)$ — трансформанта Фурье функции $f(x, y)$).

Уравнение $\tau^2 - \sigma_0^2 = 0$, связывающее волновое число $r$ с частотой $\sigma$, скоростью потока $u$, скоростью перемещения источника возмущений $v$, определяет годограф волнового вектора в плоскости $(m, n)$. Установившиеся волновые возмущения в дальней зоне, описываемые выражением

(1.4), характеризуются [5, 6] координатами $(m, n)$ точек годографа $G(m, n) = 0$.

**2.** Рассмотрим источник постоянной интенсивности ($\sigma = 0$), перемещающийся по поверхности пластинки при отсутствии дрейфа ($u = 0$). Тогда уравнение годографа можно привести к виду

$$m = \{[S_1S_2 + 2S_3[S_3r^2 \pm (S_3^2r^4 + S_1S_2r^2 - S_1^2)^{1/2}]](S_2^2 + 4S_3^2)^{-1}\}^{1/2},$$

$$n = \pm(r^2 - m^2)^{1/2} \operatorname{sign} Q_3,$$

$$S_1 = rg(1 + D_1r^4 + Q_2r^2) \operatorname{th} rH, \quad S_2 = v^2(1 + \varkappa_1 rg \operatorname{th} rH) + + (Q_1 - Q_2)rg \operatorname{th} rH,$$

$$S_3 = Q_3 rg \operatorname{th} rH.$$

Верхний и нижний знаки при $n$ и в квадратных скобках выражения $m$ относятся к дугам годографа, лежащим соответственно выше и ниже оси абсцисс. Годограф определен при $v > v_0$, где

$$v_0 = \Phi(r_0), \; \Phi'(r_0) = 0, \; \Phi(r) = \frac{1}{r}\left\{M(r)\left[(1 + D_1r^4 - Q_1r^2) - \frac{(r^2Q_3)^2}{1 + D_1r^4 - Q_2r^2}\right]\right\}^{1/2}.$$

Если $Q_3 = 0$, то $m = (S_1/S_2)^{1/2}$, $n = \pm(r^2 - m^2)^{1/2}$ и годограф симметричен относительно оси абсцисс. Причем $Q_2$ не влияет на $v_0$, а зависимость этой критической скорости от $Q_1$ рассмотрена в [7].

**3.** Для исследования зависимости годографа и структуры волновых возмущений от величин продольного, поперечного и сдвигового сжимающих усилий проводились численные расчеты при различных скоростях перемещения источника возмущений для значений $E = 5 \cdot 10^9$ Н·м$^{-2}$, $H = 350$ м, $h = 2{,}5$ м, $\nu = 0{,}34$, $\rho_1 = 870$ кг·м$^{-3}$, $\rho = 1025$ кг·м$^{-3}$, характеризующих ледяную пластину [8, 9].

Анализ результатов численного счета показал, что при $Q_3 \neq 0$ распределение $v_0$ по $Q_1$ качественно аналогично распределению в случае равномерного сжатия. Количественная зависимость $v_0$ от $Q_1$ для $Q_2 = 0$, $Q_3 \geqslant 0$ дана в таблице, где $Q_0 = \sqrt{D_1}$. Роль $Q_3$ независимо от его знака проявляется в уменьшении $v_0$. Поперечное сжатие (растяжение) при учете сдвиговых усилий ($Q_3 \neq 0$) уменьшает (увеличивает) $v_0$, причем влияние $Q_2$ усиливается с ростом $Q_3$. Распределение $v_0$ по $Q_2$ и $Q_3$ иллюстрирует рис. 1 (сплошные, штриховые, штрихпунктирные и пунктирные линии отвечают $Q_1 = Q_3 = 0$; $Q_1 = 0$, $Q_3 = 0$; $Q_1 = 0$, $Q_3 = (3/2)Q_0$; $Q_1 = Q_3 = Q_0$ (*а*), $Q_1 = Q_2 = 0$; $Q_1 = 0$, $Q_2 = (3/2)Q_0$; $Q_1 = (3/2)Q_0$, $Q_2 = 0$; $Q_1 = Q_2 = (3/2)Q_0$ (*б*)). Видно, что при наличии сдвиговых усилий возможны условия генерации волновых возмущений источником, движущимся с любой ненулевой скоростью.

Годографы волнового вектора без учета и с учетом сдвиговых усилий представлены соответственно на рис. 2, 3 при $v = 45$ м·с$^{-1}$ из диапазона $v_0 < v < c$ ($c = \sqrt{gH}$). Линии *1*—*5* соответствуют $Q_1 = Q_2 = 0$; $Q_1 = -Q_0$, $Q_2 = Q_0$; $Q_1 = 2Q_0$, $Q_2 = 0$; $Q_1 = 0$, $Q_2 = 1{,}9Q_0$; $Q_1 = Q_0$, $Q_2 = -Q_0$ (рис. 2) и $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$; $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_0$; $Q_1 = Q_2 = 0$, $Q_3 = Q_0$; $Q_1 = Q_2 = 0$, $Q_3 = 2Q_0$; $Q_1 = 0$, $Q_2 = 1{,}9Q_0$, $Q_3 = 1{,}5Q_0$ (рис. 3). Видно, что для всех годографов характерно наличие двух точек перегиба как в верхней, так и в нижней полуплоскости. На годографах, где прогибы выражены особенно ярко, эти точки отмечены кружками и треугольниками, а звездочки — точки касания годографа и луча, выходящего из начала координат. Уменьшение $v$ приводит к сближению точек перегиба на дугах годографа в верхней и нижней полуплоскостях. Слияние этих точек для $Q_3 = 0$ происходит при скорости $v = v_1$, определяемой из системы урав-

| $Q_1/Q_0$ | $Q_3/Q_0$ | | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 1,5 |
| —2 | 29,065 | 28.037 | 26,196 |
| —1,5 | 27,589 | 26,309 | 24,061 |
| —1 | 25,915 | 24,332 | 21.593 |
| —0,5 | 24,011 | 22,039 | 18,668 |
| 0 | 21,797 | 19,318 | 15,030 |
| 0,5 | 19,157 | 15,959 | 9.227 |
| 1 | 15,869 | 11,413 | 0 |
| 1,5 | 11,381 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |

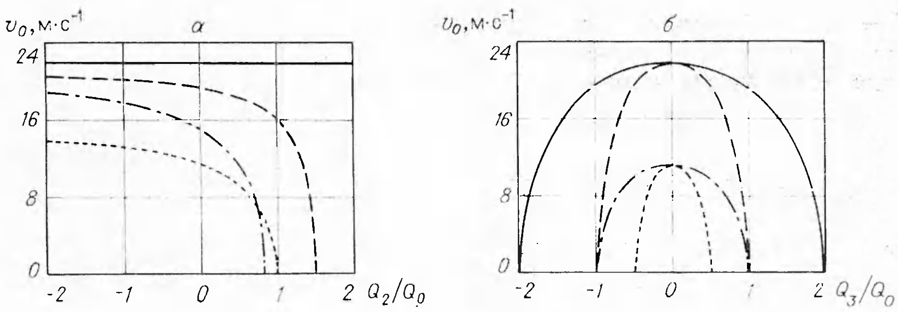


Рис. 1

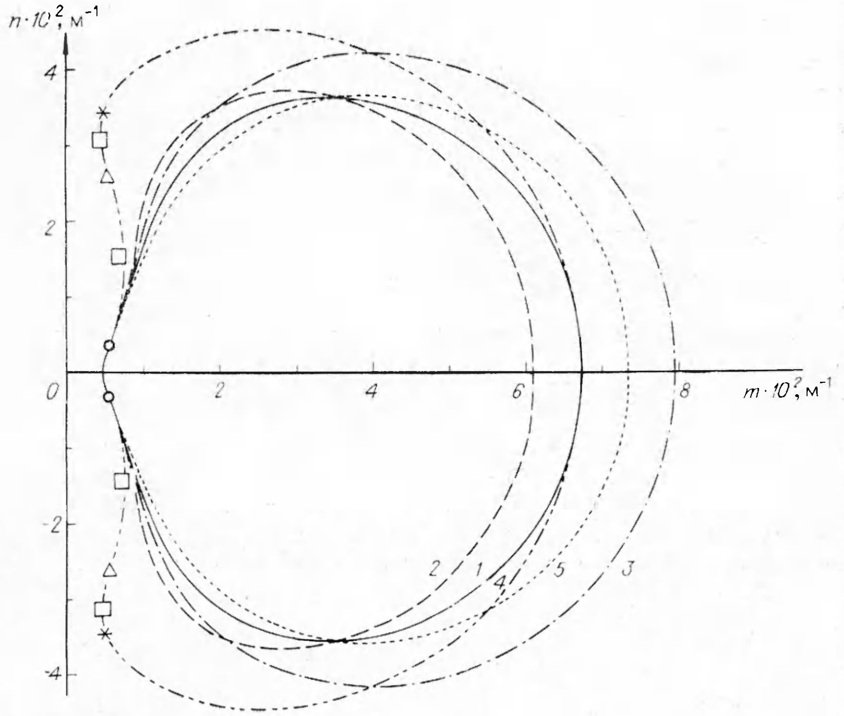


Рис. 2

нений

$$n''m' - n'm'' = 0, \quad n'''m' - n'm''' = 0 \tag{3.1}$$

относительно $r$ и $v$ (штрих означает производную по $r$). При равномерном сжатии формула для $v_1$ получена в [3]. Сдвиговые усилия обусловливают неоднозначность решения системы (3.1), вследствие чего значения $v_1$ для верхней $v_1^*$ и нижней $v_1^0$ дуг годографа различны. Если $Q_3 > 0$, то $v_1^* < v_1^0$ и $v_1^* > v_1^0$ для $Q_3 < 0$. При выполнении условия $v < v_1$ на дугах годографа отсутствуют точки перегиба. Площадь, ограниченная годографом, убывает с уменьшением $v$, стягиваясь в точку при скорости $v$, стремящейся к $v_0$.

С увеличением $v$ участок годографа между кружками стягивается в точку, приближающуюся к началу координат при стремлении $v$ к $c$. Для $v > c$ годограф проходит через начало координат, а на его дугах сохраняется только по одной точке перегиба, обозначенной треугольником. При этом касательные к дугам годографа в начале координат образуют с осью абсцисс угол $\psi = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{(v/c)^2 - 1}$. Расстояние между точками пересечения годографа с осью $m$ растет (убывает) при увеличении продольного сжатия (растяжения). Поперечное сжатие деформирует годограф таким образом, что на нем могут появиться (при выполнении условия

$m' = m'' = 0$) точки с перпендикулярной к оси абсцисс касательной. Они обозначены квадратами. При отсутствии сдвигового сжатия эти точки появляются, если

$$Q_1 \geqslant Q_1^*, \quad Q_1^* = Q_2 - \tau_1(r^*, Q_2),$$

$$\tau_1(r, Q_2) = v^2\left(\varkappa_1 + \frac{1}{rg \operatorname{th} rH}\right)\left[1 - \frac{1 - Q_2 r^2 + D_1 r^4}{2r^2(2D_1 r^2 - Q_2)}\left(1 - \frac{2rH}{\operatorname{sh} 2rH}\right)\right],$$

где $r^*$ — положительный корень уравнения

$$\tau_2(r, Q_2) + 2\tau_3(r, Q_2) = 0, \quad \tau_2 = (2rH + \operatorname{sh} 2rH)\left(4Q_2 r - 6D_1 r^3 - \tau_1\tau_4'\right),$$

$$\tau_3 = (Q_2 - 4D_1 r^2)\, r \operatorname{sh} 2rH - (1 + D_1 r^4 - Q_2 r^2 - \tau_1\tau_4)(3 - 2rH \operatorname{th} rH)\, H,$$

$$\tau_4 = (1 + D_1 r^4 - Q_2 r^2)\left[v^2 + (\varkappa_1 v^2 - \tau_1)\, rg \operatorname{th} rH\right]^{-1} rg \operatorname{th} rH.$$

Распределения $Q_1^*$ по $Q_2$ иллюстрирует рис. 4, где кривые *1*, *2* отвечают значениям скорости источника 30 и 45 м·с$^{-1}$, сплошные и штриховые линии даны для глубин бассейна 350 и 50 м. Графики $Q_1^*(Q_2)$ для различных $v$ пересекаются в точке, соответствующей $Q_1^* = Q_2$. Это значение совпадает с критическим усилием $Q^*$ в условиях равномерного сжатия [3, 4, 7]. Если волны короткие, то $Q^* = \frac{\sqrt{20}}{3} Q_0$. В случае длинных волн $Q^* = \sqrt{3} Q_0$. Уменьшение глубины бассейна приводит к незначительному росту $Q^*$.

В условиях сдвигового сжатия нет симметрии расположения точек с вертикальной касательной относительно оси абсцисс для верхней и нижней дуг годографа. При этом возможно наличие таких точек только на одной из дуг (кривая *5* на рис. 3).

4. Дифференцирование уравнения линии равной фазы $mx + ny = \text{const}$ по $r$ и $R$ показывает ортогональность вектора групповой скорости к касательной годографа и фазовой скорости к гребню (впадине) волны. Для построения фазового портрета волновых возмущений вдоль направления групповой скорости откладываем отрезки длиной $2\pi k[r\cos(\theta - \gamma)]^{-1}$ ($\theta = \operatorname{arctg}(m/n)$, $\gamma = \operatorname{arctg}[dG/dn(dG/dm)^{-1}]$, $k$ — номер линии равной фазы).

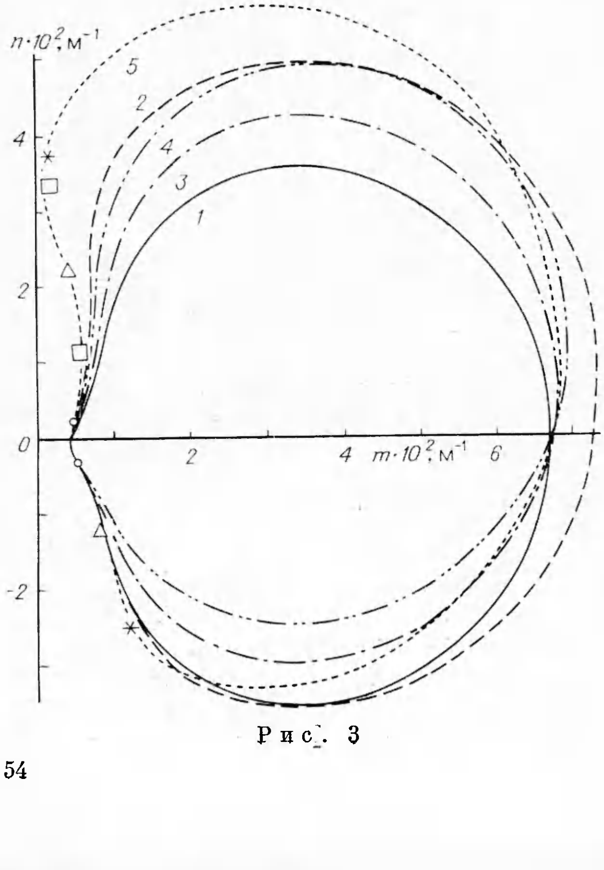

Рис. 3

Проведем анализ структуры фазовых портретов по соответствующим годографам. При $v_0 < v < c$ участок дуги годографа (см. рис. 2, 3) справа от звездочек характеризует изгибную волну перед источником, а слева—изгибно-гравитационную в следе за ним [3]. Если при этом $v > v_1$, то внешние нормали в точках, обозначенных кружками, характеризуют внешние, а треугольниками — внутренние границы угловых зон корабельного следа с трехволновыми возмущениями [3]. Между указанными внутренними границами возмущения формируются только поперечными гра-

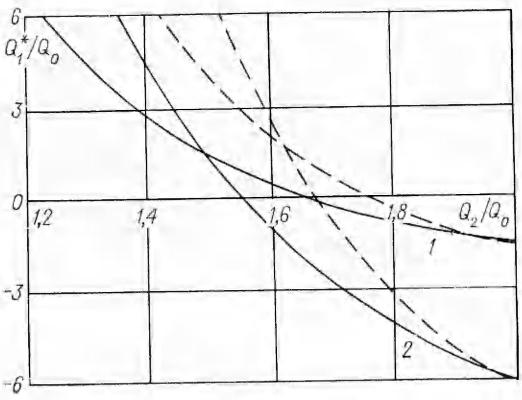


Рис. 4

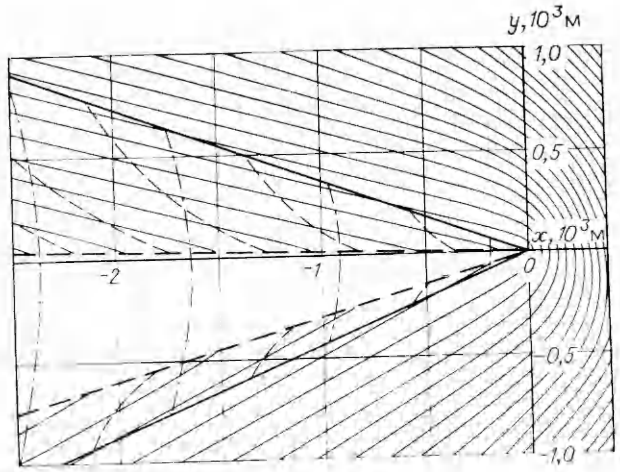


Рис. 5

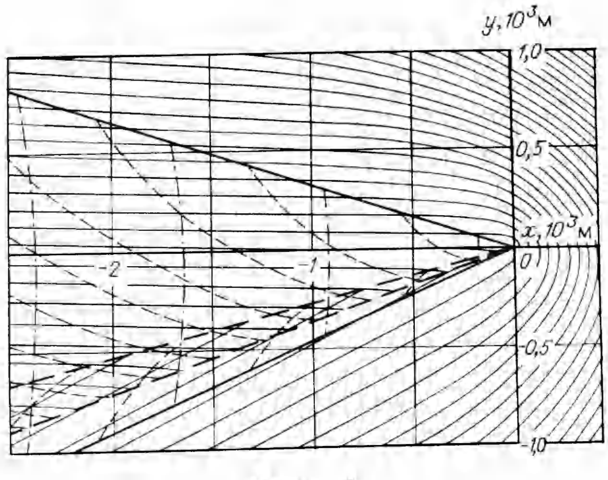


Рис. 6

витационными волнами. Изгибные волны в волновом следе характеризуются участками дуг между треугольниками и звездочками, а бегущие впереди источника — участками справа от звездочек. При отсутствии сдвиговых усилий структура фазовых портретов качественно такая же, как и при равномерном сжатии [3, 4]. Причем рост $Q_1$ уменьшает длины волн (изгибных в большей мере, чем гравитационных) на трассе движения источника.

Зона волнового следа, покрытая только поперечными волнами, с увеличением сжимающего усилия $Q_2$ сужается за счет смещения внутренних границ области с трехволновыми возмущениями; при $Q_1 = Q_1^*$ она исчезает. С дальнейшим увеличением сжимающих усилий рассматриваемые границы уходят за трассу. Вследствие этого в окрестности трассы происходит наложение друг на друга частей правой и левой зон с тремя системами волн [3]. Возмущения в зоне перекрытия характеризуются на рис. 2, 3 участками годографа между прямоугольниками. Ближние к оси абсцисс прямоугольники соответствуют пересечению гребней продольной, а дальние — изгибных волн с трассой. Смещение внешней границы области трехволновых возмущений под влиянием $Q_2$ незначительно. Слабо влияет на размеры угловых зон и усилие $Q_1$.

Фазовые картины волновых возмущений в условиях сдвигового сжатия ($Q_3 > 0$), соответствующие годографам *2*, *5* из рис. 3, представлены на рис. 5, 6 при $\max(v_1^*, v_1^0) < v < c$. Внешние и внутренние границы угловых зон изображены сплошными и штриховыми жирными линиями. Изгибным, продольным и поперечным волнам отвечают сплошные, штриховые и штрихпунктирные тонкие линии. Видна несимметричность волнового следа относительно курса движения источника. Угловая зона с трехволновым возмущением (рис. 5) слева по курсу бóльшая, чем справа. Ее внутренняя граница расположена ближе к трассе, приближаясь к ней с ростом как $Q_3$, так и $Q_2$. Возможны такие значения сжимающих усилий $Q_3$, $Q_2$, что эта граница смещается за трассу, в то время как внутренняя граница правой зоны до трассы не доходит (рис. 6).

Фазовые картины при $Q_3 < 0$ симметричны приведенным для $Q_3 > 0$ относительно трассы. Отметим, что при $Q_3 > 0$ в диапазоне $v_1^0 < v < v^*$ угловая зона генерации трех систем волн возникает только слева, а для $Q_3 < 0$ и $v_1^* < v < v_1^0$ — справа от трассы по направлению движения источника. При $v > c$ в следе за источником поперечные гравитационные волны не возбуждаются.

5. Пусть теперь источник движется по дрейфующему льду под углом $\alpha$ к направлению дрейфа. Повернем систему координат на угол $\beta = \operatorname{arctg}[(u \sin\alpha)/(v + u\cos\alpha)]$. В полученной системе источник будет двигаться со скоростью $U_0 = [(v + u\cos\alpha)^2 + (u\sin\alpha)^2]^{1/2}$ вдоль новой оси абсцисс, а величины продольного, поперечного и сдвигового усилий примут значения

$$Q_{1\beta} = Q_1 \cos^2\beta + Q_2 \sin^2\beta + Q_3 \sin 2\beta,$$
$$Q_{2\beta} = Q_1 \sin^2\beta + Q_2 \cos^2\beta - Q_3 \sin 2\beta,$$
$$Q_{3\beta} = (1/2)(Q_2 - Q_1)\sin 2\beta + Q_3 \cos 2\beta.$$

Анализ годографа волнового вектора и фазовой структуры волновых возмущений в новой системе координат проводится, как и при отсутствии потока для $v = U_0$, $Q_i = Q_{i\beta}$, $i = 1, 2, 3$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Букатов А. Е.** Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания дрейфующего льда // Мор. гидрофиз. исслед.— 1980.— № 1.
2. **Kerr A. D.** The critical velocities of a moving on a floating ice plate that is subjected to in-plane forces // Gold Reg. Sci. Tech.— 1983.— N 6.
3. **Букатов А. Е., Ярошенко А. А.** Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ.— 1984.— № 6.

4. **Schulkes R. M. S. M., Hosking R. J., Sneyd A. D.** Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2 // J. Fluid Mech.— 1987.— V. 180.— P. 297.
5. **Davis J. W., Hosking R. J., Sneyd A. D.** Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 158.— P. 269.
6. **Takizawa T.** Response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load // J. Geophys. Res.— 1988.— V. 93, N C5.
7. **Букатов А. Е.** Влияние ледового сжатия на неустановившиеся изгибно-гравитационные волны // Океанология.— 1980.— Т. 20, № 4.
8. **Богородский В. В., Гаврило В. П.** Лед. Физические свойства. Современные методы в гляциологии.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
9. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова.— Л.: Гидрометеоиздат, 1967.

*г. Севастополь* *Поступила 3/V 1990 г., в окончательном варианте — 24/VIII 1990 г.*

УДК 532.594

*С. Л. Жбанкова*

# КОЛЬЦЕВЫЕ КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ

Изучалась система кольцевых капиллярных волн, образующихся при падении капли на поверхность жидкости. Интерес к исследуемому объекту определяется, в частности, тем, что возникающие кольцевые капиллярные волны влияют на результат соударений капель с поверхностью, которые происходят в многофазных потоках, используемых в химической технологии. С теоретической точки зрения кольцевые капиллярные волны, вызванные падением капли, относятся к семейству волн, образованных одиночным импульсом на поверхности жидкости. Ранее в [1—3] рассматривались кольцевые волны, образованные точечным источником, для случая гравитационных волн, и гравитационно-капиллярные волны, вызванные дождевой каплей [4]. Экспериментальные исследования упомянутого выше семейства волн являются фрагментарными [5], а сведения о собственно капиллярных волнах отсутствуют.

В настоящей работе исследуется развитие системы кольцевых капиллярных волн, образованных при падении на поверхность жидкости капель радиуса $R = (0{,}8\div2{,}0)\times\times10^{-4}$ м. Полученные результаты сравниваются с теорией.

Рассмотрим капиллярные волны, возникающие на поверхности жидкости при падении на нее капли радиуса $R$. Воспользуемся цилиндрической системой координат $(r, z, \theta)$ с центром в точке удара капли. Ось $z$ направлена вверх от уровня воды. Считая жидкость несжимаемой и пренебрегая диссипативными процессами, волновое движение предполагаем потенциальным. Тогда потенциал скорости $\varphi(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри жидкости $\Delta\varphi = 0$. Граничные условия на свободной поверхности жидкости $\eta$ следующие:

$$\partial\eta/\partial t = \partial\varphi/\partial n, \quad \partial\varphi/\partial t = \sigma/\rho(1/R_1 + 1/R_2)$$

($R_1$, $R_2$ — главные радиусы кривизны поверхности, $\sigma$, $\rho$ — коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости).

Задавая начальные условия, полагаем, что в момент времени $t = 0$ возмущение представлено начальным импульсом поверхности в области удара:

$$\varphi(r, 0) = -I_0(r) = \begin{cases} I, & 0 \leqslant r \leqslant R, \\ 0, & r < R. \end{cases}$$

Величина начального импульса связана с импульсом капли.

Настоящая задача аналогична рассмотренной в [4] для гравитационно-капиллярных волн. Повторяя анализ, проведенный в [4], но с учетом только капиллярных эффектов, можно получить решение для кольцевых капиллярных волн в виде

$$\eta(r, t) = -\frac{1}{4\pi} I \frac{\sigma}{\rho} \frac{R^3 k}{r} \sqrt{\frac{W'(k)}{|W''(k)|}} \sin(wt - kr), \tag{1}$$

которое справедливо при условиях $kr \gg 1$, $kR < 1$. Здесь $W(k) = (\sigma k^3/\rho)^{1/2}$ — корень дисперсионного соотношения для капиллярных