УДК 536.24

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПЛАВЛЕНИИ МАТЕРИАЛА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТОРМОЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ДЖЕФФРИ

М. Наваз, Т. Хайат*, А. Зишан**

Институт космической техники, 44000 Исламабад, Пакистан
* Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан
** Международный исламский университет, 44000 Исламабад, Пакистан
E-mails: nawaz_d2006@yahoo.com, pensy_t@yahoo.com, ahmad.zeeshan@iiu.edu.pk

Исследован процесс теплообмена в пограничном слое жидкости Джеффри при плавлении материала вблизи точки торможения на растягивающейся пластине при наличии магнитного поля. С использованием преобразований подобия управляющие уравнения пограничного слоя сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Полученные нелинейные задачи решены аналитически методом гомотопического анализа. Установлено, что с увеличением параметра плавления безразмерные скорость и температура уменьшаются, с увеличением числа Деборы скорость и толщина пограничного слоя увеличиваются.

Ключевые слова: теплообмен при плавлении, течение вблизи точки торможения, жидкость Джеффри, число Нуссельта.

DOI: 10.15372/PMTF20160214

Введение. Интерес к исследованию течений, вызванных растяжением поверхности, обусловлен тем, что такие течения используются при обработке полимеров, в металлургии, при формировании пластмассовых пластин, в технологиях покрытия кабелей, непрерывной разливки, выдувания стекла, закручивания синтетических волокон и т. д. Точное решение задачи о двумерном течении в пограничном слое вязкой жидкости на растягивающейся поверхности получено в работе [1]. Позднее эта задача исследовалась в работах [2–5]. В [6] проведен анализ течения в окрестности точки торможения течения вязкой жидкости на растягивающейся поверхности. В [7] исследовано течение в окрестности точки торможения жидкости со степенным реологическим законом. В [8] изучено влияние скольжения на течение в окрестности точки торможения потока жидкости второго класса и методом квазилинеаризации решена нелинейная задача. В [9] с использованием метода конечных разностей численно решена задача о течении в окрестности точки торможения течения вязкой жидкости на радиально растягивающейся поверхности. Смешанная конвекция в течении в окрестности точки торможения на растягивающейся вертикальной проницаемой пластине исследовалась в работе [10]. Аналитическое решение задачи о нестационарном течении в окрестности точки торможения, возникающем при внезапно начинающемся вращении диска, получено в [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Комиссии высшего образования (HEC) Пакистана (грант № IPFP/HRD/HEC/2014/847).

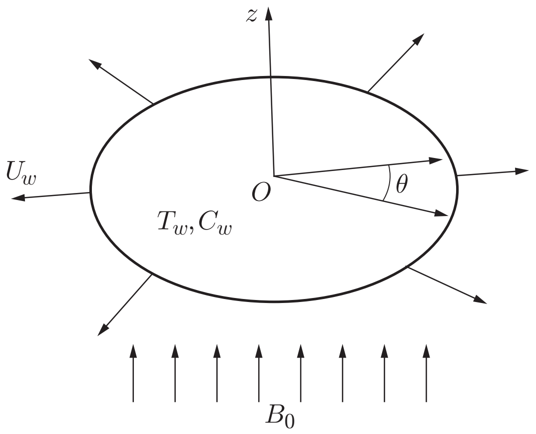

Рис. 1. Схема задачи

В работе [12] исследованы характеристики теплообмена при плавлении материала в случае ламинарного течения жидкости по плоской пластине. В [13] изучено течение по плавящейся поверхности материала. Влияние теплообмена при плавлении материала в случае течения в окрестности точки торможения в приближении пограничного слоя на растягивающейся поверхности исследовано в [14].

В данной работе проводится исследование влияния плавления на теплообмен в окрестности точки торможения течения жидкости Джеффри на радиально растягивающейся поверхности в двумерной постановке. Решения в виде рядов получены методом гомотопического анализа (МГА), часто используемым при решении нелинейных задач [15–25].

1. Математическая модель. Рассмотрим осесимметричное течение жидкости Джеффри вблизи точки торможения на растягивающейся пластине, расположенной в плоскости $z = 0$. Поверхность материала пластины плавится с постоянной скоростью. Ось r направлена вдоль пластины, ось z — перпендикулярно ей, жидкость Джеффри занимает область $z \geqslant 0$ (рис. 1). Пусть $U_e(r) = ar$ — скорость течения вблизи точки торможения, пластина растягивается по линейному закону $U_w(r) = cr$ (a, c — положительные константы), T_M — температура плавящегося материала поверхности, T_∞ — температура окружающей жидкости, причем $T_\infty > T_M$. Постоянное магнитное поле $\boldsymbol{B} = [0, 0, B_0]$ ориентировано перпендикулярно поверхности пластины (вдоль оси z). Магнитное число Рейнольдса мало, поэтому индуцированным магнитным полем можно пренебречь. Внешнее электрическое поле отсутствует. Управляющие уравнения пограничного слоя имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial r} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} = U_e\,\frac{dU_e}{dr} + \frac{\nu}{1+\lambda_1}\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda_2\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial z} + u\,\frac{\partial^3 u}{\partial r\,\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + w\,\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\Big)\Big] + {}$$
$$+ \frac{\sigma B_0^2}{\rho}\,(U_e - u), \qquad (1)$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial r} + w\,\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p}\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

где u, w — компоненты скорости в направлениях r и z соответственно; T — температура жидкости; λ_1 — отношение времен релаксации и запаздывания; λ_2 — время запаздывания; $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость; ρ — плотность жидкости; μ — динамическая вязкость. Граничные условия для рассматриваемой задачи записываются в виде

$$\begin{gathered} z = 0: \qquad u = U_w(r) = cr, \quad w = 0, \quad T = T_m, \\ z \to \infty: \qquad u \to U_e(r) = ar, \quad T \to T_\infty; \end{gathered} \tag{2}$$

$$k\Big(\frac{\partial T}{\partial z}\Big)\Big|_{z=0} = \rho[\lambda + c_s(T_m - T_0)]w(r,0), \tag{3}$$

где k — теплопроводность; λ — скрытая теплота плавления материала пластины; c_s — теплоемкость материала пластины. Граничное условие (3) означает, что теплота, подводимая к плавящейся поверхности, равна сумме теплоты плавления и теплоты, необходимой для увеличения температуры твердой поверхности T_0 до температуры ее плавления T_M [12].

Решение уравнений (1)–(3) будем искать в виде

$$u = rcf'(\eta), \quad w = -2\sqrt{c\nu}\, f, \quad \eta = \sqrt{c/\nu}\, z, \quad \theta(\eta) = (T - T_m)/(T_\infty - T_m). \tag{4}$$

Подставляя уравнения (4) в уравнения (1)–(3), получаем краевую задачу

$$f''' - (1 + \lambda_1)(f'^2 - 2ff'') + \beta(f''^2 - f'f''' - 2ff'''') + (1 + \lambda_1)A^2 + \\ + \mathrm{Ha}^2(1 + \lambda_1)(A - f') = 0, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} f'(0) = 1, \quad 2\Pr f(0) + M\theta'(0) = 0, \qquad f'(\infty) = A; \\ \theta'' + 2\Pr f\theta' = 0, \qquad \theta(0) = 0, \quad \theta(\infty) = 1, \end{gathered} \tag{6}$$

где штрихи обозначают дифференцирование по η; A — параметр растяжения; β — число Деборы; M — безразмерный параметр плавления, представляющий собой комбинацию чисел Стефана $c_f(T_\infty - T_M)/\lambda$ и $c_s(T_M - T_0)/\lambda$ для жидкости и твердой поверхности; $\Pr$ — число Прандтля; Ha — число Гартмана:

$$A = \frac{a}{c}, \quad \beta = c\lambda_2, \quad M = \frac{c_f(T_\infty - T_m)}{\lambda + c_s(T_m - T_0)}, \quad \Pr = \frac{\mu c_p}{k}, \quad \mathrm{Ha} = \frac{\sigma B_0^2}{\rho c}.$$

Следует отметить, что в случае $M = 0$ (плавление отсутствует) и $\beta = 0$ уравнение (3) исследовано в [9].

Число Нуссельта Nu определяется по формуле

$$\mathrm{Nu}_r = \frac{rq_w}{kT_m} = -\frac{1}{kT_m}\, rk\, \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = -(\mathrm{Re}_r)^{-1/2}\theta'(0), \tag{7}$$

где $\mathrm{Re}_r = cr^2/\nu$ — локальное число Рейнольдса. Из уравнений (2), (3), (7) получаем выражение

$$w(r,0) = -\frac{\alpha}{r}\, M\, \mathrm{Nu},$$

из которого следует, что скорость $w(r,0)$ на растягивающейся поверхности обратно пропорциональна радиальной координате. Таким образом, вблизи точки торможения течения процесс плавления происходит быстрее.

2. Решение методом гомотопического анализа. Рассмотрим задачу о деформации нулевого порядка. Введем базисные функции $\{\eta^k\, \mathrm{e}^{-jn}\colon\ k \geqslant 0,\ j \geqslant 0\}$ и представим распределения скорости и температуры в виде разложений по базисным функциям

$$f(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{m,j}^k \eta^k\, \mathrm{e}^{-jn}, \qquad \theta(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,j}^k \eta^k\, \mathrm{e}^{-jn},$$

где $a_{m,j}^k$, $b_{m,j}^k$ — коэффициенты.

Начальное приближение функций $f_0(\eta)$ и $\theta_0(\eta)$ выбрано в виде

$$f_0(\eta) = A\eta + (1-A)(1-\mathrm{e}^{-\eta}) - M/(2\,\mathrm{Pr}), \qquad \theta_0(\eta) = 1 - \mathrm{e}^{-\eta}\,.$$

Соответствующие выражения для линейных операторов L_f и L_θ имеют вид

$$L_f(f) = f''' - f', \qquad L_\theta(\theta) = \theta'' - \theta.$$

Эти операторы имеют следующие свойства:

$$L_f[C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{\eta} + C_3\,\mathrm{e}^{-\eta}] = 0, \qquad L_\theta[C_4\,\mathrm{e}^{\eta} + C_5\,\mathrm{e}^{-\eta}] = 0.$$

Здесь C_i $(i = 1 \div 5)$ — константы. Выражения для нелинейных операторов $N_{f,\theta}$ можно представить в следующем виде:

$$N_f[\bar f(\eta,p),\tilde\theta(\eta,p)] = \frac{\partial^3 \bar f(\eta,p)}{\partial\eta^3} - (1+\lambda_1)\Big(\Big(\frac{\partial \bar f(\eta,p)}{\partial\eta}\Big)^2 - 2\bar f(\eta,p)\,\frac{\partial^2 \bar f(\eta,p)}{\partial\eta^2}\Big) +$$
$$+\beta\Big(\Big(\frac{\partial^2 \bar f(\eta,p)}{\partial\eta^2}\Big)^2 - \frac{\partial \bar f(\eta,p)}{\partial\eta}\,\frac{\partial^3 \bar f(\eta,p)}{\partial\eta^3} - 2\bar f(\eta,p)\,\frac{\partial^4 \bar f(\eta,p)}{\partial\eta^4}\Big) -$$
$$-(1+\lambda_1)\,\mathrm{Ha}^2\,\frac{\partial \bar f(\eta,p)}{\partial\eta} + (1+\lambda_1)A^2 + (1+\lambda_1)\,\mathrm{Ha}^2\,A,$$

$$N_\theta[\bar f(\eta,p),\tilde\theta(\eta,p)] = \tilde\theta''(\eta,p) + 2\,\mathrm{Pr}\,\bar f(\eta,p)\tilde\theta'(\eta,p).$$

Тогда задачи о деформации нулевого порядка формулируются следующим образом:

$$(1-p)L_f[\tilde f(\eta,p) - f_0(\eta)] = h_f N_f[\bar f(\eta,p),\tilde\theta(\eta,p)],$$
$$2\,\mathrm{Pr}\,\bar f(0,p) + M\tilde\theta'(0,p) = 0, \qquad \bar f'(0,p) = 1, \quad \bar f'(\infty,p) = A,$$
$$(1-p)L_\theta[\tilde\theta(\eta,p) - \theta_0(\eta)] = h_\theta N_\theta[\bar f(\eta,p),\tilde\theta(\eta,p)], \qquad \tilde\theta(0,p) = 0, \quad \tilde\theta(\infty,p) = 1$$

(h_f, h_θ — вспомогательные параметры, отличные от нуля). При $p = 0$ и $p = 1$ имеем

$$\bar f(\eta,0) = f_0(\eta), \quad \bar f(\eta,1) = f(\eta), \qquad \tilde\theta(\eta,0) = \theta_0(\eta), \quad \tilde\theta(\eta,1) = \theta(\eta),$$

при $0 < p < 1$ значения функций $f_0(\eta)$, $\theta_0(\eta)$ стремятся к значениям $f(\eta)$, $\theta(\eta)$ соответственно. Используя разложение в ряд Тейлора, получаем выражения

$$\begin{aligned} \bar f(\eta,p) &= f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta)p^m, \qquad f_m(\eta) = \frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m \bar f(\eta,p)}{\partial p^m}\Big|_{p=0},\\ \tilde\theta(\eta,p) &= \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta)p^m, \qquad \theta_m(\eta) = \frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m \tilde\theta(\eta,p)}{\partial p^m}\Big|_{p=0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Сходимость рядов в (8) существенно зависит от параметров h_f и h_θ. Значения h_f и h_θ выбраны таким образом, что при $p = 1$ ряды (8) сходятся. Из уравнений (8) следует

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \qquad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta). \tag{9}$$

Задачи для деформации m-го порядка формулируются следующим образом:

$$L_f[f_m(\eta,p) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = h_f R_m^f(\eta),$$
$$2\,\mathrm{Pr}\,f_m(0) + M\theta_m'(0) = f_m'(0) = f_m'(\infty) = 0,$$
$$L_\theta[\theta_m(\eta,p) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] = h_\theta R_m^\theta(\eta),$$

$$\theta_m(0) = 1, \qquad \theta_m(\infty) = 0,$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leqslant 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases}$$

$$R_m^f(\eta) = f'''_{m-1} + (1+\lambda_1)\sum_{k=0}^{m-1}(2f_{m-1-k}f''_k - f'_{m-1-k}f'_k) + \beta\sum_{k=0}^{m-1} f''_{m-1-k}f''_k -$$
$$- \beta\Big(\sum_{k=0}^{m-1} f'_{m-1-k}f'''_k + 2f_{m-1-k}f'''_k\Big) + (1+\lambda_1)A^2(1-\chi_m) -$$
$$- \mathrm{Ha}^2(1+\lambda_1)f'_{m-1} + (1+\lambda_1)\,\mathrm{Ha}^2\,A(1-\chi_m),$$

$$R_m^\theta(\eta) = \theta''_{m-1} + 2\,\mathrm{Pr}\sum_{k=0}^{m-1} f_{m-1-k}\theta'_k.$$

3. Сходимость решений в виде рядов. Решения в виде рядов (9) содержат вспомогательные параметры h_f и h_θ. Согласно [16–20] сходимость рядов решений существенно зависит от вспомогательных параметров. Для того чтобы получить допустимые значения вспомогательных параметров, были построены h-кривые для приближения 15-го порядка (рис. 2). Из рис. 2 следует, что $-1{,}10 \leqslant h_f \leqslant -0{,}35$ и $-1{,}1 \leqslant h_\theta \leqslant -0{,}4$. Заметим, что при $h_f = h_\theta = -0{,}8$ ряды сходятся во всей области $\eta \in [0, \infty)$. Результаты расчетов для различных порядков приближения приведены в табл. 1.

4. Результаты исследования и их обсуждение. Поскольку задачи (5), (6) являются связанными и сильнонелинейными, для их решения используется МГА. На рис. 3–8 приведены профили скорости и температуры при различных значениях определяющих параметров. Для проверки точности полученных результатов аналитических расчетов проведено сравнение решений, найденных с использованием МГА в настоящей работе, и результатов численных расчетов [9]. Эти результаты хорошо согласуются (табл. 2).

На рис. 3 показано влияние параметра растяжения A на безразмерную радиальную скорость $f'(\eta)$. Следует отметить, что при $0 < A < 1$ скорость растяжения U_w больше скорости свободного потока U_e, тогда как при $A > 1$ $U_w < U_e$. На рис. 3 видно, что в диапазоне $0 < A < 1$ безразмерная скорость $f'(\eta)$ уменьшается, а при $A > 1$ — увеличивается. Также из рис. 3 следует, что толщиной пограничного слоя можно управлять, изменяя

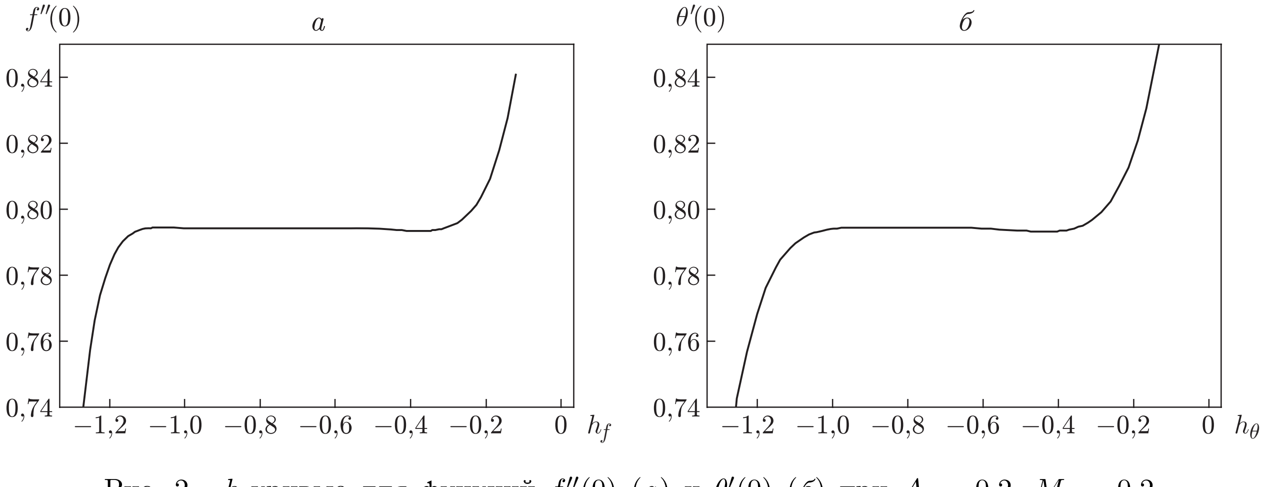

Рис. 2. h-кривые для функций $f''(0)$ (*а*) и $\theta'(0)$ (*б*) при $A = 0{,}2$, $M = 0{,}2$, $\mathrm{Pr} = \mathrm{Ha} = 1$

Таблица 1

Сходимость решений, полученных с использованием МГА, при $\mathrm{Pr} = 1$, $\mathrm{Ha} = 0{,}5$, $M = A = 0{,}1$, $\beta = 0{,}2$, $h_f = h_\theta = -0{,}6$

Порядок приближения	$f''(0)$	$-\theta'(0)$
1	−1,093 05	0,880 000
5	−1,158 27	0,823 860
10	−1,158 53	0,827 567
15	−1,158 38	0,827 492
20	−1,157 98	0,827 493
25	−1,154 59	0,827 493

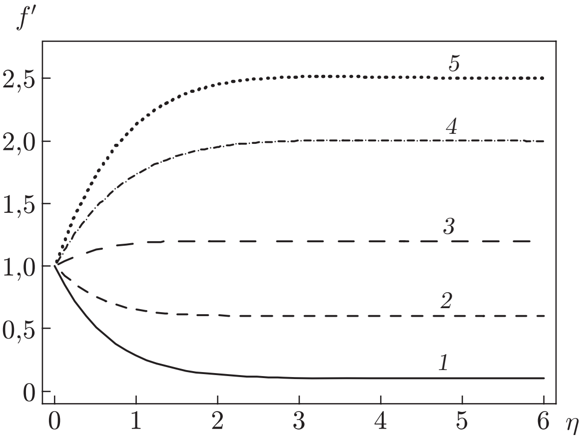

Рис. 3

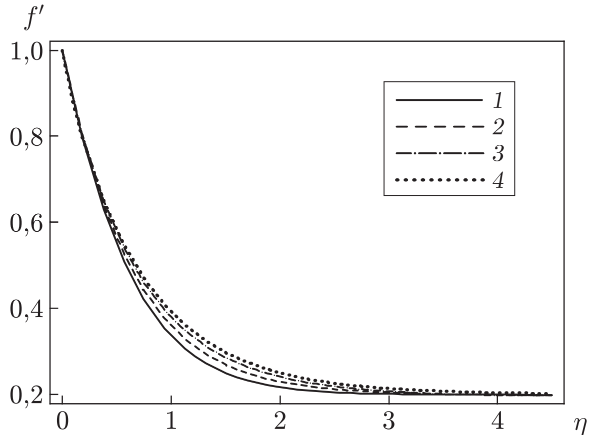

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость $f'(\eta)$ при $\lambda_1 = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = \mathrm{Ha} = 1$, $M = 0{,}5$ и различных значениях параметра A:
1 — $A = 0{,}1$, *2* — $A = 0{,}6$, *3* — $A = 1{,}2$, *4* — $A = 20$, *5* — $A = 25$

Рис. 4. Зависимость $f'(\eta)$ при $\lambda_1 = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = \mathrm{Ha} = 1$, $M = 0{,}5$, $A = 0{,}2$ и различных значениях числа Деборы β:
1 — $\beta = 0$, *2* — $\beta = 0{,}2$, *3* — $\beta = 0{,}4$, *4* — $\beta = 0{,}6$

скорости растяжения и свободного потока. На рис. 4 показано влияние числа Деборы β на радиальную компоненту скорости $f'(\eta)$. При малых числах Деборы материал имеет свойства вязкой жидкости, а при увеличении β — свойства неньютоновской жидкости. Таким образом, при больших значениях β импульс, проходящий через растягивающуюся поверхность, диссипирует быстрее, чем при малых значениях β. Следовательно, с увеличением β значения $f'(\eta)$ увеличиваются (см. рис. 4). На рис. 5 представлена зависимость безразмерной радиальной скорости f' от параметра η при различных значениях параметра плавления M. При $M = 0$ теплообмен при плавлении оказывает незначительное влияние на течение, в то время как при $M \neq 0$ оно является существенным. С увеличением параметра M увеличивается безразмерная радиальная скорость $f'(\eta)$, а следовательно, и толщина пограничного слоя. Влияние параметра плавления M на температуру $\theta(\eta)$ показано на рис. 6. Видно, что с увеличением параметра плавления M температура $\theta(\eta)$ уменьшается, а толщина теплового пограничного слоя увеличивается. Из рис. 7 следует, что с увеличением числа Прандтля Pr безразмерная температура $\theta(\eta)$ увеличивается. Следует отметить, что значения $\mathrm{Pr} < 1$ соответствуют течениям, для которых коэффициент диффузии импульса меньше температуропроводности. Из рис. 7 также следует, что с уве-

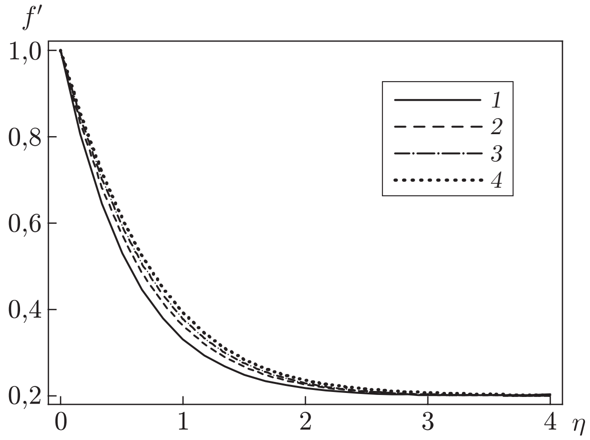

Рис. 5

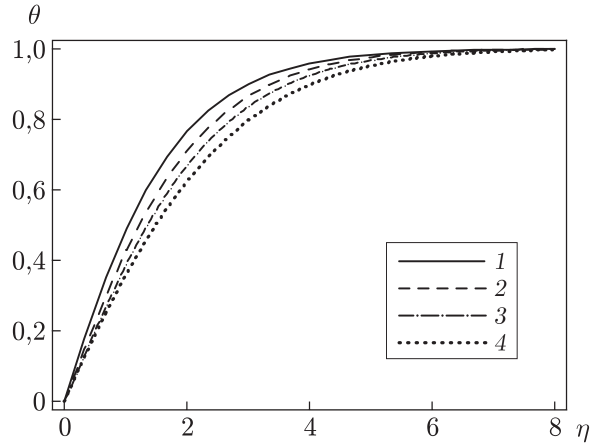

Рис. 6

Рис. 5. Зависимость $f'(\eta)$ при $\lambda_1 = 0{,}1$, $\beta = 0{,}2$, $\mathrm{Pr} = \mathrm{Ha} = 1$, $A = 0{,}2$ и различных значениях параметра плавления M:
1 — $M = 0$, *2* — $M = 1$, *3* — $M = 2$, *4* — $M = 3$

Рис. 6. Зависимость $\theta(\eta)$ при $A = 0{,}1$, $\mathrm{Ha} = 1$, $\mathrm{Pr} = \lambda_1 = 0{,}5$, $\beta = 0{,}1$ и различных значениях параметра плавления M:
1 — $M = 0$, *2* — $M = 0{,}4$, *3* — $M = 0{,}8$, *4* — $M = 1{,}22$

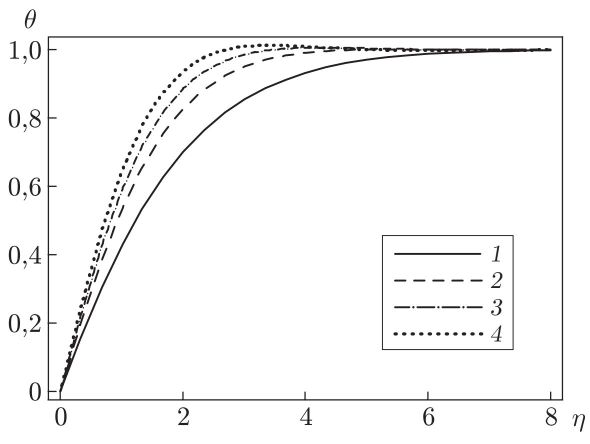

Рис. 7

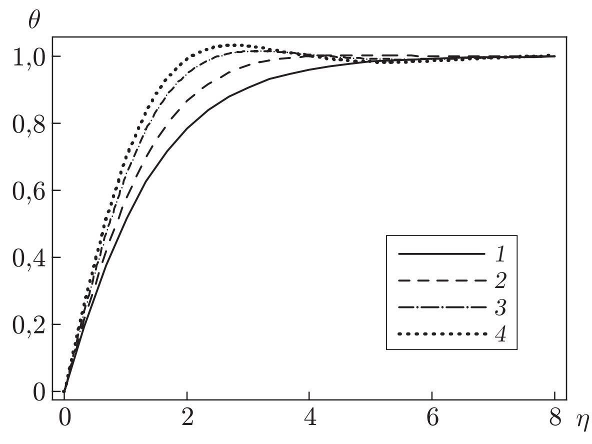

Рис. 8

Рис. 7. Зависимость $\theta(\eta)$ при $\mathrm{Ha} = 1$, $A = \lambda_1 = M = \beta = 0{,}5$ и различных значениях числа Прандтля:
1 — $\mathrm{Pr} = 0{,}10$, *2* — $\mathrm{Pr} = 0{,}50$, *3* — $\mathrm{Pr} = 0{,}71$, *4* — $\mathrm{Pr} = 0{,}92$

Рис. 8. Зависимость $\theta(\eta)$ при $\mathrm{Pr} = 0{,}5$, $\mathrm{Ha} = 1$, $\lambda_1 = M = \beta = 0{,}1$ и различных значениях параметра A:
1 — $A = 0$, *2* — $A = 0{,}5$, *3* — $A = 1{,}0$, *4* — $A = 1{,}5$

Таблица 2

Значения напряжения на стенке $f''(0)$ при $\beta = M = 0$
и различных значениях параметра растяжения A и числа Гартмана Ha

A	$f''(0)$ при $\mathrm{Ha} = 0$		$f''(0)$ при $\mathrm{Ha} = 1$		$f''(0)$ при $\mathrm{Ha} = 2$	
	Данные [9]	Данные настоящей работы	Данные [9]	Данные настоящей работы	Данные [9]	Данные настоящей работы
0,1	−1,1246	−1,124 60	−1,4334	−1,433 470	−2,1138	−2,112 570
0,2	−1,0556	−1,055 61	−1,3179	−1,317 960	−1,9080	−1,907 310
0,5	−0,7534	−0,753 10	−0,9002	−0,900 599	−1,2456	−1,245 500
1,0	0	0	0	0	0	0
1,1	0,1821	0,182 31	0,2070	0,208 037	0,2691	0,267 413
1,2	0,3735	0,367 36	0,4004	0,402 343	0,5445	0,549 477
1,5	1,0009	1,024 10	1,1157	1,091 780	1,4080	1,407 850

Таблица 3

Значения локального числа Нуссельта $\mathrm{Re}_r^{-1/2}\,\mathrm{Nu}_r$ при $h_f = h_\theta = -0{,}6$

A	M	Pr	β	λ_1	Ha	$-\,\mathrm{Re}_r^{-1/2}\,\mathrm{Nu}$
0	0,1	1,00	0,1	0,1	1,0	0,735 483
0,1	0,1	1,00	0,1	0,1	1,0	0,783 567
0,2	0,1	1,00	0,1	0,1	1,0	0,823 622
0,1	0	1,00	0,1	0,1	1,0	0,834 520
0,1	0,1	1,00	0,1	0,1	1,0	0,783 567
0,1	0,2	1,00	0,1	0,1	1,0	0,739 515
0,1	0,3	1,00	0,1	0,1	1,0	0,700 974
0,1	0,1	0,11	0,1	0,1	1,0	0,220 021
0,1	0,1	0,41	0,1	0,1	1,0	0,434 725
0,1	0,1	0,71	0,1	0,1	1,0	0,626 539
0,1	0,1	1,10	0,1	0,1	1,0	0,833 077
0,1	0,1	1,00	0	0,1	1,0	0,771 493
0,1	0,1	1,00	0,1	0,1	1,0	0,783 566
0,1	0,1	1,00	0,2	0,1	1,0	0,794 262
0,1	0,1	1,00	0,3	0,1	1,0	0,803 795
0,1	0,1	1,00	0	0,1	0	0,830 673
0,1	0,1	1,00	0	0,1	0,5	0,817 455
0,1	0,1	1,00	0	0,1	1,0	0,783 568
0,1	0,1	1,00	0	0,1	1,5	0,739 608

личением Pr толщина теплового пограничного слоя уменьшается. При $M = 0$ задача (4) соответствует течению вязкой жидкости, исследованному в [9]. На рис. 8 представлена зависимость $\theta(\eta)$ при различных значениях A. Видно, что с увеличением A значения θ уменьшаются.

В табл. 3 приведена зависимость локального числа Нуссельта $\mathrm{Re}_r^{-1/2}\,\mathrm{Nu}_r$ от параметров Ha, M, Pr, A, β. Из табл. 3 следует, что с увеличением параметра плавления M и числа Гартмана Ha локальное число Нуссельта $\mathrm{Re}_r^{-1/2}\,\mathrm{Nu}_r$ уменьшается, а с увеличением A, Pr, β — увеличивается. Следовательно, с увеличением A, Pr, β скорость потока тепла от поверхности в жидкость увеличивается, а с увеличением M и Ha — уменьшается.

Заключение. В работе исследовано влияние теплообмена при плавлении в случае течения жидкости Джеффри по радиально растягивающейся поверхности. Решения в виде рядов найдены методом гомотопического анализа. Установлено, что результаты расчетов, полученные в настоящей работе, хорошо согласуются с известными результатами численных расчетов. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

При увеличении параметра растяжения в диапазоне $0 < A < 1$ безразмерная скорость $f'(\eta)$ уменьшается, при $A > 1$ — увеличивается. При увеличении параметра плавления M температура $\theta(\eta)$ уменьшается. При увеличении параметра M скорость теплообмена при плавлении уменьшается, а при увеличении Pr — увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // Z. angew. Math. Phys. 1970. Bd 21. S. 645–647.
2. **Ariel P. D.** Axisymmetric flow of a second grade fluid past a stretching sheet // Intern. J. Engng Sci. 2001. V. 39. P. 529–553.
3. **Ariel P. D.** Axisymmetric flow due to a stretching sheet with partial slip // Comput. Math. Appl. 2007. V. 54. P. 1169–1183.
4. **Hayat T., Nawaz M., Asghar S., Mesloub S.** Thermal-diffusion and diffusion thermo effects on axisymmetric flow of a second grade fluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54, N 13/14. P. 3031–3041.
5. **Hayat T., Nawaz M., Obaidat S.** Axisymmetric magnetohydrodynamic flow of a micropolar fluid between unsteady stretching surfaces // Appl. Math. Mech. 2011. V. 32, N 3. P. 361–374.
6. **Chiam T. C.** Stagnation-point flow towards a stretching plate // J. Phys. Soc. Japan. 1994. V. 63. P. 2443–2444.
7. **Mahapatra T. R., Nandy S. K., Gupta A. S.** Magnetohydrodynamic stagnation point flow of a power-law fluid towards a stretching surface // Intern. J. Non-Linear Mech. 2009. V. 44. P. 124–129.
8. **Lapropulu F., Li D.** Stagnation-point flow of a second grade fluid with slip // Intern. J. Non-Linear Mech. 2008. V. 43. P. 941–947.
9. **Attia H. A.** Axisymmetric stagnation point flow towards a stretching surface in the presence of a uniform magnetic field with heat generation // Tamkang J. Sci. Engng. 2007. V. 10, N 1. P. 11–16.
10. **Ishak A., Nazar R., Amin N., et al.** Mixed convection in the stagnation point flow towards a stretching vertical permeable sheet // Malaysian J. Math. Sci. 2007. V. 2. P. 217–226.
11. **Hayat T., Nawaz M.** Unsteady stagnation point flow of viscous fluid caused by an impulsively rotating disk // J. Taiwan Inst. Chem. Engng. 2011. V. 42, N 1. P. 41–49.
12. **Epstein M., Cho D. H.** Melting heat transfer in steady laminar flow over a flat plate // J. Heat Transfer. 1976. V. 98. P. 531–533.
13. **Ishak A., Nazar R., Bachok N., Pop I.** Melting heat transfer in steady laminar flow over a moving surface // Heat Mass Transfer. 2010. V. 46. P. 463–468.
14. **Bachok N., Ishak A., Pop I.** Melting heat transfer in boundary layer stagnation point flow towards a stretching/shrinking sheet // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 4075–4079.
15. **Liao S. J.** Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems // Comm. Non-linear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 983–997.
16. **Xu H., Liao S. J., You X. C.** Analysis of nonlinear fractional partial differential equations with homotopy analysis method // Comm. Non-linear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 1152–1156.
17. **Xu H., Liao S. J., Pop I.** Series solution of unsteady boundary layer flows of non Newtonian fluids near a forward stagnation point // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2006. V. 139. P. 31–43.

18. **Liao S. J.** Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method // Appl. Math. Comput. 2005. V. 169. P. 1186–1194.
19. **Abbasbandy S.** Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method // Chem. Engng J. 2008. V. 136. P. 144–150.
20. **Abbasbandy S.** The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota — Satsuma coupled KdV equation // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 613–618.
21. **Abbasbandy S., Zakaria F. S.** Soliton solution for the fifth-order KdV equation with homotopy analysis method // Non-Linear Dynamics. 2008. V. 51. P. 83–87.
22. **Kechil S., Hashim I.** Approximate analytical solution for MHD stagnation-point flow in porous media // Comm. Non-linear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 1346–1354.
23. **Hashim I., Abdulaziz O., Momani S.** Homotopy analysis method for fractional IVPs // Comm. Non-linear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 674–684.
24. **Chowdhry M. S. H., Hashim I., Abdulaziz O.** Comparison of homotopy analysis method and homotopy-perturbation method for purely nonlinear fin-type problems // Comm. Non-linear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 371–378.
25. **Hayat T., Nawaz M.** Magnetohydrodynamics three-dimensional flow of a second grade fluid with heat transfer in the presence of Hall and ion slip currents // Z. Naturforsch. 2010. Bd 65a. S. 683–691.

Поступила в редакцию 11/X 2013 г.,
в окончательном варианте — 17/II 2014 г.