ПМТФ, № 1, 1968

ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТЕЙ НА ЧАСТИ ПОВЕРХНОСТИ

О. Г. Тайц

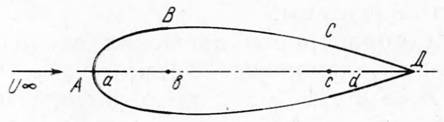
(Брянск)

Рассматривается продольное обтекание тонкого тела вращения, часть поверхности которого заранее неизвестна и определяется, исходя из задания здесь касательной скорости (свободная граница потока). Течение считается безвихревым, жидкость — идеальной и несжимаемой.

Для формы свободной поверхности выводится интегральное уравнение, которое решается методом последовательных приближений. Приводятся условия существования и единственности решения поставленной задачи.

В качестве частного примера общей теории рассматривается течение с постоянной скоростью на свободной границе (кавитационное обтекание).

1. Постановка задачи. Пусть осесимметричное тело обтекается потоком, имеющим на бесконечности скорость U_∞. Будем считать, что форма поверхности тела задается только в носовой и кормовой частях, а на среднем участке неизвестна — здесь задается распределение касательных скоростей (фигура).



Фиг. 1

Задача сводится к нахождению потенциала обтекания φ указанного тела вращения.

Введем следующие обозначения: известные участки поверхности тела будем называть твердой границей (линии AB и CD на фигуре), а их уравнения обозначим через $\rho = r_-(z)$ и $\rho = r_+(z)$. Незаданный участок поверхности будем называть свободной границей (линия BC), а его неизвестное уравнение будем обозначать через $\rho = r(z)$. Таким образом, вся обтекаемая поверхность $\rho = R(z)$ будет иметь кусочное задание

$$R(z) = r_-(z) \quad (a < z < b), \qquad R(z) = r(z) \quad (b < z < c)$$
$$R(z) = r_+(z) \quad (c < z < d) \tag{1.1}$$

В дальнейшем все параметры, относящиеся к участкам (a, b) и (c, d), будем помечать индексами минус и плюс, по аналогии с выражением (1.1).

Поставленная задача сводится к решению уравнения

$$\varphi_{zz} + \varphi_{\rho\rho} + \rho^{-1}\varphi_\rho = 0$$

для внешности поверхности $\rho = R(z)$ с предельными значениями

$$\partial\varphi / \partial n = 0 \text{ при } \rho = R(z), \qquad \varphi_z \to u_\infty z \text{ при } \rho \to \infty$$

при условии, что функция $R(z)$ неизвестна на участке (b, c), а вместо этого здесь задается касательная скорость $d\varphi / d\tau = V_\tau(z)$.

2. Условия задачи. Будем считать тело тонким, т. е.

1) функции $R(z)$ и $R'(z)$ непрерывны и $R(a) = R(d) = 0$;
2) вблизи критических точек a и d функция $R^2(z)$ аналитична;
3) функция $R''(z)$ кусочно-непрерывна.

Для простоты будем считать, что разрывы допустимы только в точках b и c (точки соприкосновения твердой и свободной границ);

4) всюду на $[a, d]$ выполняются следующие условия тонкости:

$$R^2 / (d-a)^2 < \varepsilon, \quad |(R^2)^{(k)}| / (d-a)^{2-k} < \varepsilon \quad (k = 1, 2, 3)$$

Условие (2) означает, что вблизи критических точек справедливо разложение вида

$$R^2(z) = z^n (a_0 + a_1 z + \ldots)$$

При $n = 1$ обтекаемая поверхность в критической точке ведет себя как шар, при $n = 2$ — как конус, при $n \geqslant 3$ — как острие.

Условие (4) зависит от размеров тела. В случае конечной длины можно считать $d - a = 1$, и тогда эти неравенства представятся так

$$R^2 < \varepsilon, \quad |(R^2)^{(k)}| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

Для бесконечных каверн условия тонкости записываются в виде

$$|(R^2)''| < \varepsilon, \qquad |(R^2)'''| < C < \infty \tag{2.2}$$

В данной работе основное внимание будет уделено телу конечной длины. При этом можно считать, что $a = 0$, $d = 1$.

Скорость V_τ на свободной границе должна удовлетворять соотношению

$$\left| \frac{V_\tau - u_\infty}{u_\infty} \right| < \frac{1}{4} \varepsilon |\ln \varepsilon| \tag{2.3}$$

Предположим, что $R'^2 < \varepsilon$. Тогда из уравнения

$$V_\tau = \sqrt{1 + R'^2} \, \partial\varphi / \partial z$$

следует, что при малых ε можно считать $d\varphi / dz = V_\tau$, и, следовательно, на свободной границе известно значение потенциала

$$\varphi = \varphi_0 + \int_b^z V_\tau(z)\, dz \tag{2.4}$$

Здесь φ_0 — некоторая постоянная. Таким образом, задание скорости на поверхности тонкого тела вращения равносильно заданию здесь потенциала течения. В работе [1] показано, что в условиях тонкого тела при малом ε потенциал продольного обтекания дается формулой

$$\varphi = u_\infty \left\{ z + \frac{1}{4} \int_0^1 P(\zeta) \frac{z - \zeta}{[(z-\zeta)^2 + \rho^2]^{3/2}} d\zeta + \frac{1}{4} \Gamma(z, \rho) \right\} \tag{2.5}$$

$$P(\zeta) = R^2(\zeta)[1 - \gamma(\zeta)] \tag{2.6}$$

$$\Gamma(z, \rho) = 2 \sum_{i=1}^{2} \rho_i^3 \frac{z - c_i}{[(z - c_i)^2 + \rho^2]^{3/2}}, \quad \gamma(\zeta) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i^3}{[(\zeta - c_i)^2 + R^2(\zeta)]^{3/2}} \tag{2.7}$$

$$P(\zeta) = p_-(\zeta) \;\; (0 < \zeta < b), \quad P(\zeta) = p(\zeta) \;\; (b < \zeta < c), \quad P(\zeta) = p_+(\zeta) \;\; (c < \zeta < 1)$$

Здесь $c_1 = \rho_1$, $c_2 = 1 - \rho_2$, а ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны тела в критических точках.

Из формулы (2.5) следует, что потенциал течения легко выражается через уравнение обтекаемой поверхности $R(z)$, и, следовательно, для решения поставленной задачи достаточно найти уравнение свободной поверхности $R(z)$. Так как в уравнение (2.5) $R(z)$ входит через $P(z)$ (2.6), то по существу задача сводится к нахождению функции P.

Заметим, что функция $\gamma(z)$ вне окрестностей критических точек имеет порядок ε^3, так что почти всюду $P(z) \approx R^2(z)$.

3. Связь с краевыми задачами. Обтекание безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости твердого тела с поверхностью S сводится к задаче Неймана: нахождению решения уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ с граничным условием $[d\varphi / dn]_s = 0$. Здесь поверхность S считается заданной.

В рассматриваемой задаче часть поверхности неизвестна, но зато здесь задается условие Дирихле (2.4). Таким образом, требуется решить задачу Неймана, в которой часть границы неизвестна и определяется, исходя из условия Дирихле. О разрешимости такой задачи будет сказано дальше.

4. Основное интегральное уравнение. Рассмотрим уравнение (2.5) при $z \in (b, c)$ и $\rho = r(z)$. Заменяя потенциал слева выражением (2.4), можно получить соотношение

$$\int_0^1 P(\zeta) K_\zeta(\zeta, z, r)\, d\zeta - S(z) = 0 \tag{4.1}$$

$$K_\zeta(\zeta, z, r) = \frac{z-\zeta}{[(z-\zeta)^2 + r^2(z)]^{3/2}} - \frac{b-\zeta}{[(b-\zeta)^2 + r^2(b)]^{3/2}} \tag{4.2}$$

$$S(z) = \frac{4}{u_\infty}\left[\int_b^z V_\tau\, dz - u_\infty(z-b)\right] - \Delta\Gamma(z, r) \tag{4.3}$$

$$\Delta\Gamma(z, r) = \Gamma(z, r(z)) - \Gamma(b, r(b)) \tag{4.4}$$

Таким образом, неизвестная функция $P(\zeta)$ $(\zeta \in (b, c))$ есть решение нелинейного интегрального уравнения (4.1) с постоянными пределами интегрирования. Это соотношение может быть переписано в виде

$$\int_0^1 P'(\zeta) K(\zeta, z, z)\, d\zeta + S(z) = 0 \tag{4.5}$$

$$K(\zeta, z, r) = \frac{1}{\sqrt{(\zeta-z)^2 + r^2(z)}} - \frac{1}{\sqrt{(\zeta-b)^2 + r^2(b)}}$$

Соотношение (4.5) — основное уравнение данной работы. Если переписать его в виде

$$\int_b^c p'(\zeta) K(\zeta, z, r)\, d\zeta = -S(z) - \int_0^b p'_-(\zeta) K(\zeta, z, r)\, d\zeta - \int_c^1 p_+'(\zeta) K(\zeta, z, r)\, d\zeta$$

пренебречь нелинейностью ядра K и считать правую часть известной, то это соотношение превратится в интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно функции $p'(\zeta)$.

5. Решение интегрального уравнения. Положим

$$\alpha = 1 / |\ln r^2(b)| \tag{5.1}$$

Используя равенство

$$\int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r^2}} = -\ln r^2 + \ln\left(A + \sqrt{A^2 + r^2}\right)^2$$

можно показать, что

$$\alpha \int_0^1 P'(\zeta) K(\zeta, z, r)\, d\zeta \to P'(z) - P'(b) \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{5.2}$$

Опираясь на это соотношение, представим основное уравнение (4.5) в виде

$$\tau[P] \equiv \pi[P] + T[P] = 0, \qquad \pi[P] = P'(z) - P'(b) + \alpha S(z) \tag{5.3}$$

$$T[P] = \alpha \int_0^1 P'(\zeta) K(\zeta, z, r)\, d\zeta - [P'(z) - P'(b)]$$

Здесь $\pi[P]$ — главная часть оператора τ, а $T[P]$ — оператор «довесок», вобравший в себя основную сложность рассматриваемого оператора; при этом $T[P] \to 0$ согласно (5.2) при $\varepsilon \to 0$.

Для решения уравнения (5.3) используем модифицированный метод Ньютона — Канторовича для решения функциональных уравнений [2]

$$P_{n+1} = P_n - [\pi'[P_1]]^{-1} [\tau[P_n]] \tag{5.4}$$

Здесь $\pi'[P_1]$ — производная Фреше оператора π; $[\pi'[P_1]]^{-1}$ — обратная операция для π'; P_1 — решение уравнения $\pi[P_1] = 0$.

В данном случае (первое приближение)

$$P_1(z) = P(b) + P'(b)(z - b) - \alpha \int_b^z S(z)\, dz \tag{5.5}$$

$$[\pi'[P_1]]^{-1}[\tau] = \int_b^z \tau\, dz \tag{5.6}$$

Таким образом, метод последовательных приближений для решения уравнения (4.5) представится следующим образом:

$$P_{n+1} = P_n - \alpha \int_b^z \left\{ \int_0^1 P_n'(\zeta) K(\zeta, z, r_n)\, d\zeta + S(z) \right\} dz \tag{5.7}$$

причем в качестве первого приближения можно взять функцию (5.5).

Заметим, что функция $P_n(\zeta)$ имеет следующее задание:

$P_n(\zeta) = p_-(\zeta)$ $(0 < \zeta < b)$, $P_n(\zeta) = p_n(\zeta)$ $(b < \zeta < c)$, $P_n(\zeta) = p_+(\zeta)$ $(c < \zeta < 1$

которое вытекает из выражения (1.1)

6. **Существование и единственность решения уравнения.** Выпишем первые две производные Фреше оператора Т $[P]$

$$T'[P] = \alpha \int_b^c \delta p'(\zeta) K(\zeta, z, r)\, d\zeta - \delta p' - \frac{1}{2} \alpha \delta p \int_0^1 \frac{P'(\zeta)}{[(\zeta - z)^2 + r^2]^{3/2}}\, d\zeta \tag{6.1}$$

$$T''[P] = -\alpha \delta p \int_b^c \frac{\delta p'(\zeta)}{[(\zeta - z)^2 + r^2]^{3/2}}\, d\zeta + \frac{3}{4} \alpha (\delta p)^2 \int_0^1 \frac{P'(\zeta)}{[(\zeta - z)^2 + r^2]^{5/2}}\, d\zeta \tag{6.2}$$

Здесь для простоты считается, что $\delta p = \delta r^2$ и приращения функционалов при обоих дифференцированиях одинаковы.

Лемма 1. Пусть $r^2(b) = \mu\varepsilon$ $(0 < \mu < 1)$ и $|\delta p''| < A_0$. Тогда при $|\delta p| = |\delta p'| = 1$ справедливы следующие оценки:

$$|T[P_1]| < \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \left\{ |P_1'| \left| \ln \frac{\mu\varepsilon}{r_1^2} \right| + 4 \max |P_1''| \right\}$$

$$|T'[P_1]| < \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \left\{ \left| \ln \frac{\mu\varepsilon}{r_1^2} \right| + 4A_0 + \frac{\max |P_1''|}{r_1^2} \right\}$$

$$|T''[P_1]| < \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{3}{2} \frac{\max |P_1'|}{r_1^4} \right\}$$

Для доказательства этой леммы необходимо воспользоваться соотношениями $T[P]$ из (5.3) и (6.1), (6.2).

Следствие 1. Для того чтобы оценки функционалов были ограничены, достаточно потребовать

$$r_1^2(z) > m\varepsilon > 0 \tag{6.3}$$

Следствие 2. Пусть функция $r_1^2(z)$ (как и $P_1(z)$) удовлетворяет условиям тонкого тела (2.1). Тогда оценки операторов записываются в виде

$$|T[P_1]| < \frac{\varepsilon}{|\ln\varepsilon|} C_1, \quad |T'[P_1]| < \frac{1}{\ln\varepsilon} C_2, \quad |T''[P_1]| < \frac{C_3}{\varepsilon|\ln\varepsilon|} \tag{6.4}$$

$$C_1 = \max\left|\ln\frac{\mu\varepsilon}{r_1^2}\right| + 4, \quad C_2 = \max\left|\ln\frac{\mu\varepsilon}{r_1^2}\right| + 4A_0 + \frac{1}{m}, \quad C_3 = \frac{4}{m}$$

Остается найти условия, при которых $P_1(z)$ (5.5) удовлетворяет ограничениям тонкого тела.

Лемма 2. Для того чтобы функция $P_1(z)$ удовлетворяла условиям тонкого тела, достаточно потребовать, чтобы на свободной границе скорость V_τ определялась неравенством (2.3).

Доказательство. Условие тонкого тела $|(R^2)''| < \varepsilon$ в данном случае имеет вид

$$4\frac{1}{|\ln r^2(b)|}\left|\frac{V_\tau - u_\infty}{u_\infty}\right| + \left|\frac{d}{dz}\Gamma(z, r)\right| < \varepsilon \qquad \left(\left|\frac{d}{dz}\Gamma(z, r)\right| = O(\varepsilon^3)\right)$$

Отсюда и следует справедливость леммы.

Рассмотрим класс дифференцируемых функций с ограниченной второй производной. Введем норму вида $\|P\| = \max(|P| + |P'|)$, так что для функционала $[\pi'[P_1]]^{-1}[F]$ (5.7) справедлива оценка

$$\|[\pi'[P_1]]^{-1}[F]\| < 2\max|F| \tag{6.5}$$

В этих предположениях справедлив основной результат.

Теорема. Пусть при обтекании осесимметричного тела выполнены условия.

(а) Длина свободной границы $c - b$ удовлетворяет неравенству $c - b < z_0 - b$, где z_0 — ближайший к b корень уравнения $P_1(z_0) = 0$.

(б) Функции $p_-(z)$ и $p_+(z)$ удовлетворяют ограничениям тонкого тела (2.1).

(в) Скорость V_τ на свободной границе непрерывна и удовлетворяет (2.3).

Тогда при достаточно малом ε процесс последовательных приближений (5.8) сходится к решению уравнения (4.5), и это решение единственно.

Доказательство. Условие (а) означает, что выполняется неравенство (6.3), причем $m\varepsilon = \min\{P_1(z) / [1 - \gamma(z)]\}$ и, следовательно, функционалы в лемме 1 ограничены. Условия (б) и (в) совпадают с условиями леммы 2, и, значит, функционалы имеют оценки (6.4).

Для доказательства сходимости нужно установить, что выполняются неравенства [2]

$$\|[\pi'[P_1]]^{-1}[T[P_1]]\| = \eta < 1/2, \qquad \|[\pi'[P_1]]^{-1}[T''[P_1]]\| = M < \infty$$
$$\|[\pi']P_1]]^{-1}[T'[P_1]]\| = \mu < 1, \qquad \|[\pi'[P_1]]^{-1}[\pi''[P_1]]\| = K < \infty$$

при условии, что

$$h = \frac{\eta(M+K)}{(1-\mu)^2} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{1-\sqrt{1-2\pi}}{h}\frac{\eta}{1-\mu} < \varepsilon, \ \frac{1+\sqrt{1-2h}}{h}\frac{\eta}{1-\mu} > \varepsilon$$

Но согласно соотношению (6.5), первые четыре функционала имеют оценки

$$\eta < 2C_1\varepsilon / |\ln\varepsilon|, \ \mu < 2C_2 / |\ln\varepsilon|, \qquad M < 2C_3 / \varepsilon|\ln\varepsilon|, \ K = 0$$

и, следовательно, при достаточно малом ε можно удовлетворить всей системе неравенств. Теорема доказана.

7. Условия разрешимости поставленной задачи. Требование непрерывности $R(z)$ и $R^1(z)$ (в рамках теории тонкого тела) приводится к следующим условиям в точках соприкосновения границ:

$$r(b) = r_-(b), \quad r'(b) = r_-(b), \quad r(c) = r_+(c), \quad r_+'(c) = r'(c)$$

Первые два соотношения, касающиеся непрерывности в точке b, уже выполнены при построении функции $P_1(z)$ (5.5), и остается выполнить условия неразрывности в точке c

$$p(c) = p_+(c), \qquad p'(c) = p_+'(c) \tag{7.1}$$

Это означает, что для разрешимости поставленной задачи нужно наложить ограничения на два численных параметра потока (свободные параметры). Например, в случае кавитационного обтекания ($V_\tau = \text{const}$) в качестве таких параметров можно взять число кавитации Q и длину каверны $c - b$ и т. д.

Если бы по условиям задачи требовалась непрерывность $R''(z)$ в точке b, то число свободных параметров увеличилось бы на единицу. Заметим, что условие Неймана в данной задаче выполняется автоматически, так как $\partial\varphi / \partial n_s = 0$.

8. Решение поставленной задачи. Дадим в этом пункте сводку полученных результатов.

Уравнение свободной границы $r(z)$ определяется из равенства $p(z) = r^2(1 - \gamma(z))$ (2.6), где функция $p(z)$ находится методом последовательных приближений

$$p_{n+1}(z) = p_n(z) - \alpha \int\limits_b^z \left\{ \int\limits_0^1 P_n'(\zeta) K(\zeta, z, r_n)\, d\zeta + S(z) \right\} dz, \qquad \alpha = \frac{1}{|\ln r_-^2(b)|}$$

$$P_n(\zeta) = \begin{cases} r_-^2(\zeta)[1 - \gamma(\zeta)] & (0 < \zeta < b) \\ r_n^2(\zeta)[1 - \gamma(\zeta)] & (b < \zeta < c) \\ r_+^2(\zeta)[1 - \gamma(\zeta)] & (c < \zeta < 1) \end{cases}$$

$$K(\zeta, z, r) = \frac{1}{\sqrt{(\zeta - z)^2 + r^2(z)}} - \frac{1}{\sqrt{(\zeta - b)^2 + r^2(b)}}$$

$$S(z) = \frac{u}{u_\infty}\left[\int\limits_b^z V_\tau\, dz - u_\infty(z - b)\right] - \Delta\Gamma(z, r)$$

а величины $\gamma(z)$, $\Delta\Gamma(z, r)$ определяются формулами (2.7) и (4.4).

Одновременно с нахождением формы свободной границы необходимо находить значения свободных параметров из условия

$$p(c) = p_+(c), \qquad p'(c) = p_+'(c)$$

Если по условиям задачи требуется непрерывность $R''(z)$, то число свободных параметров соответственно увеличивается.

Замечание. Величина $\gamma(z)$ практически отлична от нуля только вблизи критических точек, а вне их имеет порядок ε^3. Например, для эллипсоида вращения с отношением осей $1/3$ имеем $R^2(z) < 1/36$, и взяв $\varepsilon = 1/36$, почти всюду будем иметь $\gamma = O(10^{-4})$.

9. Кавитационное обтекание. В качестве примера рассмотрим случай $V_\tau = u_0$. Первое приближение (5.5) (вне критических точек) запишется в виде

$$r^2(z) = p_-(b) + p_-'(b)(z - b) - \frac{h_0}{|\ln r^2(b)|}(z - b)^2, \qquad h_0 = 2\left(\frac{u_0}{u_\infty} - 1\right) \tag{8.1}$$

Видно, что свободная линия тока представляет собой вытянутый эллипс с отношением осей $\sqrt{h_0 / |\ln r^2|}$. Этот качественный результат можно проверить непосредственно, так как на поверхности эллипсоида $\varphi = z\,\mathrm{const}$ [3], т. е. $\varphi_z = \mathrm{const}$.

Если удалять точку C в бесконечность, то эллипс будет вырождаться в параболу

$$r(z) = \sqrt{p_-(b) + p_-'(b)(z - b)}$$

Этот результат первого приближения совпадает с асимптотическим законом $r(z) = O(z^{1/2}(\ln z)^{-1/4})$, приведенным в работе [4].

Входящая в (8.1) величина h_0 легко выражается через число кавитации:

$$h_0 = 2(\sqrt{1 + Q} - 1).$$

При малых числах кавитации $h_0 = Q$.

Если кавитационное течение симметрично относительно плоскости $z = \mathrm{const}$ (течение Рябушинского), то система (7.1) сведется к одному уравнению $p'(c) = p_+'(c)$.

Таким образом, при кавитационном обтекании по схеме Рябушинского нужно наложить ограничение на один параметр задачи. При заданной форме твердой границы это ограничение можно рассматривать как неявную зависимость длины теоретической каверны $c - b$ от числа кавитации Q.

Поступила 2 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Т а й ц О. Г. Движение тонкого осесимметричного тела в несжимаемой жидкости под углом атаки. Вестн. Ленингр. ун-та, 1965, № 13.
2. К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
3. К о ч и н Н. Е., К и б е л ь И. А., Р о з е Н. В. Теоретическая гидромеханика. Физматгиз, 1960.
4. Г у р е в и ч Н. М. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.