УДК 532.591+517.948

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ДЛИННОЙ ЭЛАСТИЧНОЙ ТРУБКЕ

А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложена математическая модель осесимметричного завихренного движения идеальной несжимаемой жидкости в удлиненной трубке с тонкими упругими стенками. Сформулированы необходимые и достаточные условия гиперболичности системы уравнений движения для течений с монотонным по радиусу профилем скорости. Вычислены скорости распространения характеристик и характеристическая форма системы. Доказано существование простых волн, непрерывно примыкающих к заданному стационарному сдвиговому потоку. Найдена группа преобразований, допускаемых системой уравнений, и выписаны подмодели, определяющие инвариантные решения. В результате интегрирования фактор-систем получены новые классы точных решений уравнений движения.

При изучении гидродинамики крупных кровеносных сосудов в работах [1, 2] и др. рассматривалась задача о движении жидкости по трубкам с тонкими эластичными стенками. При этом большая часть аналитических решений задач о распространении возмущений в жидкости и характерных режимах течения либо получена в рамках линейной теории, либо относится к одномерным движениям жидкости. В данной работе исследуется нелинейная модель завихренного осесимметричного течения жидкости в длинной цилиндрической трубке с упругими изотропными стенками. На основе метода обобщенных характеристик [3], предложенного для систем с операторными коэффициентами, определены скорости распространения характеристик и выписаны условия гиперболичности уравнений. Установлено существование решений рассматриваемой модели в классе простых волн. С использованием методов группового анализа дифференциальных уравнений [4] построены классы точных решений уравнений движения.

1. Вывод математической модели. Движение идеальной несжимаемой жидкости в предположении осевой симметрии в безразмерных переменных описывается уравнениями Эйлера

$$U_t + UU_x + VU_r + p_x = 0, \quad \varepsilon^2(V_t + UV_x + VV_r) + p_r = 0, \quad U_x + V_r + V/r = 0. \qquad (1.1)$$

Здесь $T = L_0U_0^{-1}t$, $X = L_0x$, $r_1 = R_0r$, $U_1 = U_0U$, $V_1 = R_0L_0^{-1}U_0V$, $p_1 = \rho U_0^2 p$ — время, осевая и радиальная координаты, компоненты вектора скорости и давление; t, x, r, U, V и p — соответствующие безразмерные переменные; L_0 — характерный масштаб по оси X (оси трубки); R_0 — внутренний радиус трубки при нулевом избыточном давлении; ρ — плотность жидкости; U_0 имеет размерность скорости. Предполагается, что жидкость заполняет всю область течения (внутренность трубки). В случае длинной цилиндрической трубки параметр $\varepsilon = R_0L_0^{-1}$ является малым, и членами порядка ε^2 в уравнениях (1.1) можно пренебречь. Тогда второе уравнение в (1.1) принимает вид $p_r = 0$. Поэтому при

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (код проекта Е00-4.0-61) и Интеграционного проекта № 1 СО РАН.

деформациях, возникающих под действием избыточного давления, трубка будет сохранять цилиндрическую форму. Это позволяет записать граничные условия в виде

$$R_t + U(t,x,R)R_x = V(t,x,R), \qquad V(t,x,0) = 0, \tag{1.2}$$

где $R = R_1 R_0^{-1}$; $R_1(t,x)$ — размерный радиус деформированной трубки. Уравнения (1.1) (при $\varepsilon = 0$) и (1.2) представляют собой незамкнутую систему для определения следующих безразмерных величин: поля скоростей $U(t,x,r)$, $V(t,x,r)$, давления жидкости $p(t,x)$ и внутреннего радиуса трубки $R(t,x)$ в области $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant r \leqslant R$ при $t \geqslant 0$.

Для замыкания уравнений движения требуется задать зависимость между деформацией эластичной трубки и избыточным давлением внутри нее. В простейшем случае небольших деформаций можно использовать закон Гука. Однако, как показано в [2], формулировка закона Гука зависит от характера решаемой задачи и должна быть неодинаковой для различных скоростей изменения площади сечения трубки. В литературе (см. [1, 2]) используются следующие варианты: $p_1 = C(S-1)+p_0$, $p_1 = C(1-1/S)+p_0$, $p_1 = C\ln S + p_0$ и др. Здесь $S(t,x) = R^2$ — отношение площади поперечного сечения деформированной трубки к площади сечения недеформированной трубки; $C = E\delta/d$ — эластичность стенок; E — модуль Юнга; d — средний диаметр; δ — толщина трубки. В первом порядке разложения в ряд Тейлора все приведенные выше формулы совпадают. Будем считать, что зависимость безразмерного давления от квадрата радиуса задана некоторым дважды дифференцируемым соотношением $p = p(R^2/2)$, причем $p' > 0$.

Рассматриваемую задачу с помощью замены переменных [5]

$$y = r^2/2, \qquad u = U, \qquad v = rV, \qquad h = R^2/2 \tag{1.3}$$

можно свести к исследованию плоскопараллельных течений идеальной жидкости в канале с твердым ровным дном $y = 0$ и упругой верхней стенкой $y = h(t,x)$. Действительно, в новых переменных уравнения (1.1) (при $\varepsilon = 0$), (1.2) имеют вид

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + vu_y + p_x = 0, \qquad u_x + v_y = 0, \qquad p = p(h), \\ h_t + u(t,x,h)h_x = v(t,x,h), \qquad v(t,x,0) = 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Отметим, что в случае удлиненного канала завихренность ω пропорциональна u_y. В отсутствие завихренности система (1.4) описывает одномерные течения в упругой трубке [1]. В частном случае, когда $p = h$, уравнения (1.4) совпадают с известными уравнениями вихревой мелкой воды [6]. Плоскопараллельные завихренные движения жидкости со свободной границей и в канале с твердыми неподвижными стенками рассматривались в работах [5–13] и др. Таким образом, в силу (1.3) описание завихренных осесимметричных движений жидкости в удлиненной эластичной трубке сводится к определению функций $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$, $h(t,x)$ из системы (1.4).

В ряде случаев анализ уравнений движения удобно проводить в эйлерово-лагранжевой системе координат, переход к которой осуществляется заменой переменной [7]

$$y = \Phi(t,x,\lambda) \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \tag{1.5}$$

где функция $\Phi(t,x,\lambda)$ — решение задачи Коши

$$\Phi_t + u(t,x,\Phi)\Phi_x = v(t,x,\Phi), \qquad \Phi(0,x,\lambda) = \Phi_0(x,\lambda), \tag{1.6}$$

причем $\Phi(t,x,0) = 0$, $\Phi(t,x,1) = h(t,x)$. Замена (1.5) обратима при условии $\Phi_\lambda \neq 0$. Далее считаем, что $\Phi_\lambda > 0$. Из уравнений (1.4), (1.6) получаем систему для определения функций $u(t,x,\lambda)$, $H(t,x,\lambda) = \Phi_\lambda(t,x,\lambda)$

$$u_t + uu_x + p'\Big(\int_0^1 H\,d\lambda\Big)\int_0^1 H_x\,d\lambda = 0, \qquad H_t + (uH)_x = 0. \tag{1.7}$$

Если функции u и H найдены, то известна верхняя граница канала $h(t,x) = \int\limits_0^1 H\,d\lambda$. Формулы $p = p(h)$, $\Phi_\lambda = H$, $\Phi(t,x,0) = 0$ и (1.6) позволяют определить давление, функцию Φ и вертикальную компоненту v вектора скорости.

2. Условия гиперболичности уравнений движения. Уравнения (1.7) можно записать в виде

$$\boldsymbol{U}_t + A\boldsymbol{U}_x = 0, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{U} = (u, H)^{\mathrm{т}}$; A — матрица с операторными коэффициентами, действующая на произвольную вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^{\mathrm{т}}$ по правилу

$$A\boldsymbol{\varphi} = \Big(u\varphi_1 + p'\Big(\int\limits_0^1 H\,d\lambda\Big)\int\limits_0^1 \varphi_2\,d\lambda,\ H\varphi_1 + u\varphi_2\Big)^{\mathrm{т}}.$$

Согласно [3] характеристическая кривая системы (2.1) определяется дифференциальным уравнением $x'(t) = k(t,x)$, где k — собственное значение оператора A^* (скорость распространения характеристики). Решение уравнения

$$(\boldsymbol{F}, (A - kI)\boldsymbol{\varphi}) = 0 \tag{2.2}$$

относительно векторного функционала $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ ищется в классе локально интегрируемых либо обобщенных функций. Действие функционала $\boldsymbol{F}$ осуществляется по переменной λ, при этом t и x рассматриваются как параметры; I — тождественное отображение. В результате действия функционала $\boldsymbol{F}$ на уравнение (2.1) получаем соотношение на характеристике

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{U}_t + k\boldsymbol{U}_x) = 0. \tag{2.3}$$

Система (2.1) является гиперболической, если все собственные значения k вещественные и совокупность соотношений на характеристиках (2.3) эквивалентна уравнениям (2.1).

По структуре система уравнений (1.7) близка к интегродифференциальной системе, описывающей в эйлерово-лагранжевых координатах плоскопараллельные завихренные движения идеальной баротропной жидкости со свободной границей. Для модели баротропной жидкости скорости распространения характеристик, характеристическая форма системы и условия гиперболичности получены в [8]. Поэтому в данной работе промежуточные выкладки опущены.

Несложный анализ показывает, что нетривиальные решения уравнения (2.2) существуют только для $k = k_j$, удовлетворяющих характеристическому уравнению

$$\chi(k) = 1 - p'\Big(\int\limits_0^1 H\,d\lambda\Big)\int\limits_0^1 \frac{H\,d\lambda}{(u-k)^2} = 0, \tag{2.4}$$

и для значений $k = k^\lambda$, принадлежащих интервалу изменения функции $u(t,x,\lambda)$. Для течений с монотонным по глубине профилем скорости $u_\lambda \neq 0$ (пусть для определенности $u_\lambda > 0$) уравнение (2.4) имеет два вещественных корня $k_1 < u_0 = u(t,x,0)$ и $k_2 > u_1 = u(t,x,1)$. Это следует из того, что $\chi(k) \to 1$ при $|k| \to \infty$, $\chi(k) \to -\infty$ при $k \to u_0$, $k \to u_1$ ($p' > 0$). Кроме того, $\chi'(k) < 0$, если $k < u_0$, и $\chi'(k) > 0$, если $k > u_1$. Функционалы, соответствующие собственным значениям k_1, k_2 и k^λ, совпадают с полученными в [8] и имеют вид

$$(\boldsymbol{F}^j, \boldsymbol{\varphi}) = \int\limits_0^1 \frac{H\varphi_1}{(u-k_j)^2}\,d\lambda - \int\limits_0^1 \frac{\varphi_2}{u-k_j}\,d\lambda \quad (j = 1, 2), \quad (\boldsymbol{F}^{\lambda 1}, \boldsymbol{\varphi}) = -\varphi_1'(\lambda) + u_\lambda H^{-1}\varphi_2(\lambda),$$

$$(\boldsymbol{F}^{\lambda 2}, \boldsymbol{\varphi}) = \varphi_1(\lambda) + p'\Big(\int\limits_0^1 H\,d\nu\Big)\int\limits_0^1 \frac{H(\nu)(\varphi(\nu)-\varphi(\lambda))}{(u(\nu)-u(\lambda))^2}\,d\nu - \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\nu)}{u(\nu)-u(\lambda)}\,d\nu$$

(интегралы вычисляются в смысле главного значения, зависимость функций от t, x опущена для сокращения записи).

Для приведения системы (1.7) к характеристической форме подействуем на уравнения собственными функционалами F^j ($j = 1,\ 2,\ \lambda 1,\ \lambda 2$). После преобразований получим

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 \frac{H(\nu)(u_t(\nu)+k_j u_x(\nu))}{(u(\lambda)-k_j)^2}\,d\nu - \int\limits_0^1 \frac{H_t(\nu)+k_j H_x(\nu)}{u(\lambda)-k_j}\,d\nu = 0,\\ u_{\lambda t} + u u_{\lambda x} - u_\lambda H^{-1}(H_t + uH_x) = 0,\\ u_t + uu_x + p'\Big(\int\limits_0^1 H\,d\lambda\Big)\int\limits_0^1 \frac{H(\nu)(u_t(\nu)+u(\lambda)u_x(\nu)-u_t(\lambda)-u(\lambda)u_x(\lambda))}{(u(\lambda)-u(\nu))^2}\,d\nu - \\ - p'\Big(\int\limits_0^1 H\,d\lambda\Big)\int\limits_0^1 \frac{H_t(\nu)+u(\lambda)H_x(\nu)}{u(\lambda)-u(\nu)}\,d\nu = 0.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Условия гиперболичности уравнений (1.7) формулируются в терминах комплексных функций $\chi^{\pm}(t,x,\lambda)$ — предельных значений аналитической функции $\chi(z)$ из верхней и нижней полуплоскости на отрезке $[u_0, u_1]$:

$$\chi^{\pm} = 1 + p'(h)\Big(\frac{1}{\omega_1(u_1-u(\lambda))} - \frac{1}{\omega_0(u_0-u(\lambda))} - \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{\omega}\Big)_\nu \frac{d\nu}{u(\nu)-u(\lambda)} \pm \pi i\Big(\frac{1}{\omega}\Big)_\lambda \frac{1}{u_\lambda}\Big).$$

Здесь $\omega = u_\lambda H^{-1}$; $\omega_0 = \omega(t,x,0)$; $\omega_1 = \omega(t,x,1)$; i — мнимая единица.

Теорема. *Пусть u, ω — дифференцируемые функции, u_λ, ω_λ, H удовлетворяют условию Гёльдера по переменной λ, причем $u_\lambda \ne 0$, $\chi^+ \ne 0$. Тогда условия*

$$\chi^{\pm}(\lambda) \ne 0, \qquad \Delta \arg\,(\chi^+(\lambda)/\chi^-(\lambda)) = 0 \tag{2.6}$$

(*приращение аргумента вычисляется при изменении λ от 0 до 1*) *являются необходимыми и достаточными для гиперболичности уравнений* (1.7).

Доказательство теоремы аналогично приведенному в [8]. Таким образом, в области гиперболичности уравнения (1.7) эквивалентны соотношениям на характеристиках (2.5).

3. Существование простых волн. Простыми волнами будем называть решения уравнений (1.7) вида

$$u = u(\alpha(t,x),\lambda), \qquad H = H(\alpha(t,x),\lambda). \tag{3.1}$$

Такие решения для уравнений вихревой мелкой воды анализировались в [9]. В соответствии с (3.1) функции $u(\alpha,\lambda)$, $H(\alpha,\lambda)$ определяются из системы

$$(u-k)u_\alpha + p'\Big(\int\limits_0^1 H\,d\lambda\Big)\int\limits_0^1 H_\alpha\,d\lambda = 0, \qquad (u-k)H_\alpha + Hu_\alpha = 0, \qquad k = -\frac{\alpha_t}{\alpha_x}. \tag{3.2}$$

Из формулы (2.1) следует, что простые волны уравнений (1.7) являются решениями системы $(A-kI)\boldsymbol{U}_\alpha = 0$, а соотношения на характеристиках принимают вид $(\boldsymbol{F}^j, (A-kI)\boldsymbol{U}_\alpha) =$

$(k_j - k)(\boldsymbol{F}^j, \boldsymbol{U}_\alpha) = 0$ ($j = 1,\ 2,\ \lambda1,\ \lambda2$). В области гиперболичности уравнения (1.7) эквивалентны соотношениям на характеристиках. Поэтому нетривиальные решения в классе простых волн существуют только в том случае, когда k совпадает с одним из корней характеристического уравнения (2.4) ($k = k_1(\alpha)$, $k = k_2(\alpha)$) или принадлежит отрезку изменения функции u ($k = u(\alpha, \lambda(\alpha))$). В работе доказывается существование простых волн, отвечающих дискретному характеристическому спектру. Рассмотрим случай $k = k_2(\alpha)$ ($k_2 > u$). В качестве переменной α возьмем функцию $h(t,x) = \int\limits_0^1 H\,d\lambda$.

Характеристики простой волны распространяются с постоянными скоростями $x'(t) = k$, и в пространстве переменных (t, x, λ) область определения простой волны покрыта семейством плоскостей $h = \mathrm{const}$, на которых функции u, H зависят только от переменной λ. Рассмотрим задачу о примыкании простой волны к заданному сдвиговому потоку $u = u_0(\lambda)$, $H = H_0(\lambda)$ по характеристике $h = h_0 = \int\limits_0^1 H_0(\lambda)\,d\lambda$. Из системы (3.2) и уравнения (2.4) для определения функций $u(h,\lambda)$, $H(h,\lambda)$, $u_\lambda(h,\lambda)$ и $k(h)$ получаем задачу

$$u_h = -\frac{p'(h)}{u-k}, \qquad H_h = \frac{p'(h)H}{(u-k)^2}, \qquad u_{\lambda h} = \frac{p'(h)u_\lambda}{(u-k)^2},$$

$$k_h = -\Big(\frac{3p'(h)}{2}\int\limits_0^1 \frac{H\,d\lambda}{(u-k)^4} + \frac{p''(h)}{(p'(h))^2}\Big)\Big(\int\limits_0^1 \frac{H\,d\lambda}{(u-k)^3}\Big)^{-1}, \tag{3.3}$$

$$u\big|_{h=h_0} = u_0(\lambda), \quad H|_{h=h_0} = H_0(\lambda), \quad u_\lambda|_{h=h_0} = u_0'(\lambda), \quad k|_{h=h_0} = k_2^0,$$

где k_2^0 — корень уравнения $p'(h)\int\limits_0^1 (u_0(\lambda) - k)^{-2} H(\lambda)\,d\lambda = 1$ такой, что $k_2^0 > u_0(\lambda)$.

Отметим следующее свойство простых волн: если $u(h_0,\lambda_1) \ne u(h_0,\lambda_2)$, то всюду в области определения $u(h,\lambda_1) \ne u(h,\lambda_2)$. Это вытекает из однородности уравнения для разности $s(h) = u(h,\lambda_1) - u(h,\lambda_2)$:

$$s_h = \frac{p'(h)}{(u(h,\lambda_1) - k(h))(u(h,\lambda_2) - k(h))}\,s(h), \qquad s(h_0) = 0.$$

Поэтому выполнения условия монотонности профиля скорости достаточно потребовать при $h = h_0$.

Теорема. *Пусть* $u_0(\lambda)$ — *непрерывно дифференцируемая,* $H_0(\lambda)$ — *непрерывная на отрезке* $[0,1]$ *функции такие, что*

$$u_0'(\lambda) > 0, \quad H_0(\lambda) > \delta > 0, \quad k_2^0 > u_0(1) + \delta, \quad (\omega_0(\lambda))^{-1} = H_0(\lambda)(u_0'(\lambda))^{-1} \geqslant a > 0, \tag{3.4}$$

и выполнены условия (2.6). *Тогда система уравнений* (3.3) *имеет единственное решение на любом интервале* $h \in (0,b]$ ($h_0 \in (0,b]$), *причем* $u(h,\lambda)$ — *дифференцируемая,* $H(h,\lambda)$ — *непрерывная функции.*

Доказательство. Введем банахово пространство B элементов u, u_λ, H, k с нормой

$$\|\boldsymbol{V}\| = \max_\lambda |u| + \max_\lambda |u_\lambda| + \max_\lambda |H| + |k|.$$

Уравнения (3.3) можно представить в векторном виде

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dh} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}), \qquad \boldsymbol{V}(h_0) = \boldsymbol{V}_0 \tag{3.5}$$

($\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V})$ — оператор в пространстве B). Воспользуемся известной теоремой [14]: если существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| < \varepsilon$ справедливы неравенства

$$\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V})\| \leqslant M, \qquad \|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}_1) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}_2)\| \leqslant N\|\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2\|, \tag{3.6}$$

то задача (3.5) при $|h-h_0| < \varepsilon_1 = \min\,(\varepsilon M^{-1}, N^{-1})$ имеет единственное решение $\boldsymbol{V}(h) \in B$ такое, что $\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| \leqslant \varepsilon$.

Проверим выполнение условия приведенной теоремы. Для элементов пространства B из шара $\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| < \delta/2$ в силу (3.4) справедливы неравенства $|u-k| \geqslant |u_0-k_0| - |u-u_0+k-k_0| > \delta/2$, $|H| \geqslant |H_0| - |H-H_0| > \delta/2$. Ввиду непрерывности функций, определяющих нелинейное отображение $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V})$ при $|u-k| > \delta/2$, $|H| > \delta/2$, существуют постоянные M, N, зависящие от δ и $\|\boldsymbol{V}_0\|$, для которых справедливы неравенства (3.6). Поэтому существует единственное решение уравнений (3.5) при $|h-h_0| < \varepsilon_1$. Локальная теорема доказана.

Для доказательства существования простых волн в целом по h используются априорные оценки

$$\frac{a\sqrt{h}p'(h)}{a\sqrt{p'(h)}+\sqrt{h}} \leqslant k-u \leqslant \frac{h}{a} + \sqrt{hp'(h)}. \tag{3.7}$$

Из второго уравнения системы (2.5) следует, что в области простой волны завихренность $\omega = \omega_0(\lambda) = u_0'(\lambda)/H_0(\lambda)$. Поэтому $\omega^{-1} = \omega_0^{-1} \geqslant a > 0$. Неравенства

$$0 < k-u_1 \leqslant k-u \leqslant k-u_0, \tag{3.8}$$

уравнение (2.4) и выражение $h = \int\limits_0^1 H\,d\lambda = \int\limits_{u_0}^{u_1} \omega^{-1}\,du$ позволяют получить следующие оценки:

$$k-u_0 \geqslant \sqrt{hp'(h)}, \qquad k-u_1 \leqslant \sqrt{hp'(h)}, \qquad u_1-u_0 \leqslant a^{-1}h. \tag{3.9}$$

Из соотношения (2.4) имеем

$$1 = p'\int\limits_0^1 \frac{H\,d\lambda}{(u-k)^2} = p'\int\limits_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\omega(u-k)^2} \geqslant ap'\int\limits_{u_0}^{u_1} \frac{du}{(u-k)^2} = \Big(\frac{1}{u_0-k} - \frac{1}{u_1-k}\Big)ap'. \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) получаем

$$\begin{gathered} k-u_1 \geqslant \frac{ap'(h)(k-u_0)}{k-u_0+ap'(h)} \geqslant \frac{a\sqrt{h}p'(h)}{a\sqrt{p'(h)}+\sqrt{a}}, \\ k-u_0 = k-u_1+(u_1-u_0) \leqslant \sqrt{hp'(h)} + \frac{h}{a}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Таким образом, неравенства (3.7) следуют из (3.8) и (3.11).

Использование априорных оценок (3.7) и уравнений (3.3) позволяет доказать ограниченность функций u, u_λ, H и k на произвольном промежутке $h \in [\sigma, b]$ $(0 < \sigma < h_0 < b)$. При этом будут выполнены неравенства $|u-k| > \varepsilon(\sigma, b, \|\boldsymbol{V}_0\|)$, $|H| > \varepsilon(\sigma, b, \|\boldsymbol{V}_0\|)$. Теорема доказывается повторным применением локальной теоремы существования решения задачи (3.3). Теорема доказана.

Построение простой волны завершается решением задачи Коши $h_t + k(h)h_x = 0$, $h|_{t=0} = \tau(x)$. В результате получаем пару функций $u(h(t,x),\lambda)$, $H(h(t,x),\lambda)$, удовлетворяющих системе (1.7).

Замечание. Простыми волнами уравнений (1.4) будем называть частные решения вида

$$u = u(\alpha(t, x), y), \quad v = \alpha_x \tilde{v}(\alpha(t, x), y), \quad h = h(\alpha(t, x)). \tag{3.12}$$

4. Симметрии и инвариантные решения. Построение точных решений проводится в предположении, что избыточное давление жидкости в трубке связано с площадью поперечного сечения степенным законом, т. е.

$$p(h) = C_1 h^\gamma + C_2 \qquad (\gamma \neq 0), \tag{4.1}$$

где C_1, C_2, γ — постоянные. Часто для замыкания уравнений движения жидкости в эластичных трубках используется именно такая аппроксимация (h пропорциональна S). Следуя [10], для упрощения граничных условий в (1.4) сделаем замену переменных:

$$z = \frac{y}{h(t, x)}, \qquad w = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{h}\Big(v - \frac{y}{h}(h_t + uh_x)\Big). \tag{4.2}$$

В силу (1.4), (4.2) и (4.1) для определения функций $u(t, x, z)$, $w(t, x, z)$, $\eta(t, x) = C_1 h^\gamma$ получаем уравнения

$$u_t + uu_x + wu_z + \eta_x = 0, \quad \eta_t + u\eta_x + \gamma\eta(u_x + w_z) = 0, \quad w|_{z=0} = w|_{z=1} = 0. \tag{4.3}$$

Вычислим группу преобразований, допускаемую уравнениями (4.3). Для этого систему (4.3) дополним уравнением $\eta_z = 0$ и подействуем на систему (без граничных условий) первым продолжением оператора $X = \xi^t\partial_t + \xi^x\partial_x + \xi^z\partial_z + \zeta^u\partial_u + \zeta^w\partial_w + \zeta^\eta\partial_\eta$ (ξ^i, ζ^j — функции переменных t, x, z, u, w, η). После преобразований система определяющих уравнений принимает вид

$$\begin{gathered} \xi^t_{tt} = \xi^x_{tx}, \qquad \xi^x_{tt} = \xi^x_{xx} = 0, \qquad \xi^z_{tz} = (2/\gamma - 1)\xi^x_{tx}, \qquad \xi^z_{xz} = \xi^z_{zz} = 0, \\ \zeta^u = (\xi^x_x - \xi^t_t)u + \xi^x_t, \qquad \zeta^w = (\xi^z_z - \xi^t_t)w + \xi^z_t + u\xi^z_x, \qquad \zeta^\eta = 2(\xi^x_x - \xi^t_t)\eta, \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $\xi^t = \xi^t(t)$; $\xi^x = \xi^x(t, x)$; $\xi^z = \xi^z(t, x, z)$. Из этих уравнений следует, что ξ^z — линейная по переменной z функция. Использование граничных условий в (4.3) приводит к соотношениям $\xi^z\big|_{z=0} = 0$, $\xi^z\big|_{z=1} = 0$. Следовательно, $\xi^z \equiv 0$. Интегрируя уравнения (4.4) (при $\gamma \neq 2$), находим алгебру Ли L_5 допускаемых операторов: $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$, $X_3 = t\partial_x + \partial_u$, $X_4 = t\partial_t + x\partial_x - w\partial_w$, $X_5 = x\partial_x + u\partial_u + 2\eta\partial_\eta$. В случае $\gamma = 2$ добавляется оператор $X_6 = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u - 2tw\partial_w - 2t\eta\partial_\eta$.

Ниже перечислены все представители оптимальной системы подалгебр алгебры Ли L_5 ранга один [12]: 1) X_1; 2) X_2; 3) X_3; 4) $X_1 + X_3$; 5) X_4; 6) $X_3 + X_4$; 7) $X_1 + X_5$; 8) $X_2 - X_4 + X_5$; 9) $\alpha X_4 + X_5$.

Подмодели. Для представителей оптимальной системы ранга один приводятся набор базисных инвариантов J, представление решения и фактор-система E/H ($H(\alpha_i X_i)$ обозначает подалгебру).

1. $H(X_1)$, $J = (x, z, u, w, \eta)$. Представление решения

$$u = u(x, z), \qquad w = w(x, z), \qquad \eta = \eta(x).$$

Фактор-система E/H

$$uu_x + wu_z + \eta_x = 0, \qquad u\eta_x + \gamma\eta(u_x + w_z) = 0, \qquad w|_{z=0} = w|_{z=1} = 0. \tag{4.5}$$

2. $H(X_2)$, $J = (t, z, u, w, \eta)$. Представление решения

$$u = u(t, z), \qquad w = w(t, z), \qquad h = h(t).$$

Фактор-система E/H

$$u_t + wu_z = 0, \qquad \eta_t + \gamma\eta w_z = 0, \qquad w\big|_{z=0} = w\big|_{z=1} = 0. \tag{4.6}$$

3. $H(X_3)$, $J=(t,z,tu-x,w,\eta)$. Представление решения

$$u=(\varphi(t,z)+x)t^{-1},\qquad w=w(t,z),\qquad \eta=\eta(t).$$

Фактор-система E/H

$$\varphi_t+w\varphi_z=0,\qquad \eta_t+\gamma\eta(t^{-1}+w_z)=0,\qquad w|_{z=0}=w|_{z=1}=0. \tag{4.7}$$

4. $H(X_1+X_3)$, $J=(x-t^2/2,z,u-t,w,\eta)$. Представление решения

$$\xi=x-t^2/2,\qquad u=\varphi(\xi,z)+t,\qquad w=w(\xi,z),\qquad \eta=\eta(\xi).$$

Фактор-система E/H

$$1+\varphi\varphi_\xi+w\varphi_z+\eta_\xi=0,\qquad \varphi\eta_\xi+\gamma\eta(\varphi_\xi+w_z)=0,\qquad w\big|_{z=0}=w\big|_{z=1}=0. \tag{4.8}$$

5. $H(X_4)$, $J=(xt^{-1},z,u,tw,\eta)$. Представление решения

$$\xi=xt^{-1},\qquad u=u(\xi,z),\qquad w=\varphi(\xi,z)t^{-1},\qquad \eta=\eta(\xi).$$

Фактор-система E/H

$$(u-\xi)u_\xi+\varphi u_z+\eta_\xi=0,\qquad (u-\xi)\eta_\xi+\gamma\eta(u_\xi+\varphi_z)=0,\qquad \varphi|_{z=0}=\varphi|_{z=1}=0. \tag{4.9}$$

6. $H(X_3+X_4)$, $J=(xt^{-1}-\ln t,z,u-\ln t,tw,\eta)$. Представление решения

$$\xi=xt^{-1}-\ln t,\qquad u=\varphi(\xi,z)+\ln t,\qquad w=\psi(\xi,z)t^{-1},\qquad \eta=\eta(\xi).$$

Фактор-система E/H

$$(\varphi-\xi-1)\varphi_\xi+\psi\varphi_z+\eta_\xi+1=0,$$
$$(\varphi-\xi-1)\eta_\xi+\gamma\eta(\varphi_\xi+\psi_z)=0,\qquad \psi\big|_{z=0}=\psi\big|_{z=1}=0.$$

7. $H(X_1+X_5)$, $J=(x\exp(-t),z,u\exp(-t),w,\eta\exp(-2t))$. Представление решения

$$\xi=x\exp(-t),\qquad u=\varphi(\xi,z)\exp(t),\qquad w=w(\xi,z),\qquad \eta=s(\xi)\exp(2t).$$

Фактор-система E/H

$$\varphi+(\varphi-\xi)\varphi_\xi+w\varphi_z+s_\xi=0,\qquad 2s+(\varphi-\xi)s_\xi+\gamma s(\varphi_\xi+w_z)=0,\qquad w\big|_{z=0}=w\big|_{z=1}=0.$$

8. $H(X_2-X_4+X_5)$, $J=(t\exp(x),z,tu,tw,t^2\eta)$. Представление решения

$$\xi=t\exp(x),\qquad u=t^{-1}\varphi(\xi,z),\qquad w=t^{-1}\psi(\xi,z),\qquad \eta=t^{-2}s(\xi).$$

Фактор-система E/H

$$-\varphi+\xi(\varphi+1)\varphi_\xi+\psi\varphi_z+\xi s_\xi=0,\qquad -2s+\xi(\varphi+1)s_\xi+\gamma s(\xi\varphi_\xi+\psi_z)=0,\qquad \psi\big|_{z=0}=\psi\big|_{z=1}=0.$$

9. $H(\alpha X_1+X_5)$, $J=(t^{-(\beta+1)}x,z,t^{-\beta}u,tw,t^{-2\beta}\eta)$, $\beta=\alpha^{-1}$. Представление решения

$$\xi=t^{-(\beta+1)}x,\qquad u=t^{2\beta}\varphi(\xi,z),\qquad w=t^{-1}\psi(\xi,z),\qquad \eta=t^{2\beta}s(\xi).$$

Фактор-система E/H

$$\begin{gathered}(\varphi-(1+\beta)\xi)\varphi_\xi+\psi\varphi_z+s_\xi+\beta\varphi=0,\\ (\varphi-(1+\beta)\xi)s_\xi+\gamma s(\varphi_\xi+\psi_z)+2\beta s=0,\qquad \psi\big|_{z=0}=\psi\big|_{z=1}=0.\end{gathered} \tag{4.10}$$

При $\alpha=0$ имеем $J=(t,z,x^{-1}u,w,x^{-2}\eta)$. Представление решения

$$u=x\varphi(t,z),\qquad w=w(t,z),\qquad \eta=x^2s(t).$$

Фактор-система E/H

$$\varphi_t + w\varphi_z + \varphi^2 + 2s = 0, \qquad s_t + \gamma s w_z + (2+\gamma)\varphi s = 0, \qquad w\big|_{z=0} = w\big|_{z=1} = 0. \tag{4.11}$$

Инвариантные решения. Подмодель (4.6). Решение $u = u(z)$, $w = 0$, $\eta = \eta_0$ описывает сдвиговые течения жидкости ($u = u(y)$, $v = 0$, $h = \mathrm{const}$).

Подмодель (4.7). Интегрирование уравнений (4.7) и обращение замены (4.2) дает решение уравнений (1.4) $u = (\varphi(tx) + x)/t$, $v = -y/t$, $h = c/t$ ($c = \mathrm{const}$), описывающее сжатие канала давлением [12].

Подмодель (4.8). Решения, инвариантные относительно переноса по времени и преобразования Галилея, удобнее искать в эйлерово-лагранжевых переменных. Действительно, для уравнений (1.7) фактор-система имеет вид

$$\Big(\frac{\varphi^2}{2} + p\Big(\int\limits_0^1 H\,d\lambda\Big) + \xi\Big)_\xi = 0, \qquad (\varphi H)_\xi = 0,$$

где $\varphi(\xi,\lambda) = u - t$; $\xi = x - t^2/2$. Отсюда находим $u = t \pm \sqrt{2(C(\lambda) - \xi - p(h))}$, $H = (u-t)^{-1}$, функция $h(\xi)$ определяется из уравнения

$$h - \int\limits_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{2(C(\lambda) - \xi - p(h))}} = 0.$$

Такие решения, описывающие течения с критическим слоем ($u - t$ обращается в нуль), аналогичны полученным в [12] для уравнений вихревой мелкой воды.

Подмодель (4.5). Для построения стационарных решений удобнее использовать уравнения движения в форме (1.7). По аналогии с подмоделью (4.8) интегрирование уравнений сводится к определению функции $h(x)$ из конечного соотношения. Такие решения (при $p(h) = h$) исследовались в [11].

Подмодель (4.10). Уравнения (4.10) допускают растяжение $\xi \to a\xi$, $\varphi \to a\varphi$, $s \to a^2 s$. Соответствующее инвариантное решение подмодели имеет вид

$$\varphi = \xi A(z), \qquad \psi = B(z), \qquad s = s_0\xi^2. \tag{4.12}$$

Для определения функций $A(z)$ и $B(z)$ получаем уравнения

$$A^2 - A + A'B + 2s_0 = 0, \qquad (2+\gamma)A - 2 + \gamma B' = 0, \qquad B(0) = B(1) = 0. \tag{4.13}$$

Из системы (4.13) исключим функцию $B(z)$:

$$B(z) = \frac{A(z) - A^2(z) - 2s_0}{A'(z)}. \tag{4.14}$$

При этом функция $A(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$(A^2 - A + 2s_0)\,\frac{d^2A}{dz^2} + \Big(\frac{2}{\gamma} - 1\Big)(A-1)\Big(\frac{dA}{dz}\Big)^2 = 0.$$

Обозначим $\lambda_1 = (1 - \sqrt{1-8s_0}\,)/2$, $\lambda_2 = (1 + \sqrt{1-8s_0}\,)/2$ и поменяем ролями переменные A и z. Тогда

$$(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)\,\frac{d^2z}{dA^2} + \Big(\frac{2}{\gamma} - 1\Big)\Big(A - 1\Big)\frac{dz}{dA} = 0.$$

В силу (4.14) граничные условия выполнены, если $z = 0$ при $A = \lambda_2$ и $z = 1$ при $A = \lambda_1$. Удобно ввести новую переменную $\tau = (\lambda_2 - A)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}$. Функция $z(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\tau(1-\tau)\,\frac{d^2z}{d\tau^2} + \Big(\frac{2}{\gamma} - 1\Big)\Big(\tau + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big)\frac{dz}{d\tau} = 0. \tag{4.15}$$

Решение уравнения (4.15) дается неполной бета-функцией $\beta(a,b,\tau) = \int\limits_0^\tau t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$ $(a > 0,\ b > 0)$. Возвращаясь к переменной A и удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$z(A) = \frac{\beta(a,b,(\lambda_2 - A)/(\lambda_2 - \lambda_1))}{\beta(a,b,1)}, \qquad a = \frac{\gamma - \lambda_1(\gamma+2)}{\gamma(\lambda_2 - \lambda_1)}, \qquad b = \frac{2 - \lambda_1(\gamma+2)}{\gamma(\lambda_2 - \lambda_1)}. \tag{4.16}$$

Условия $a > 0$, $b > 0$ выполнены, если

$$\gamma > 0, \qquad 0 < s_0 < \frac{1}{8}\Big(1 - \Big(\frac{2-\gamma}{2+\gamma}\Big)^2\Big).$$

Таким образом, формулы (4.16), (4.14) и (4.12) определяют решение подмодели (4.10).

Подмодель (4.9). По аналогии с подмоделью (4.10) будем искать решение уравнений (4.9) в виде

$$u = \xi A(z), \qquad \varphi = B(z), \qquad \eta = s_0\xi^2. \tag{4.17}$$

Тогда для нахождения функций $A(z)$ и $B(z)$ получается система (4.13), и, следовательно, частное решение подмодели (4.9) дается формулами (4.17), (4.16) и (4.14).

Подмодель (4.11). Фактор-система (4.11) инвариантна относительно растяжения $t \to a^{-1}t$, $\varphi \to a\varphi$, $w \to aw$, $s \to a^2 s$, поэтому ее решение можно представить в виде

$$\varphi = t^{-1}A(z), \qquad w = t^{-1}B(z), \qquad s = s_0 t^{-2}. \tag{4.18}$$

Функции $A(z)$ и $B(z)$ удовлетворяют уравнениям (4.13), и частное решение подмодели выражается формулами (4.18), (4.16), (4.14).

Подмодель (4.8). Уравнения (4.8) допускают растяжение $\xi \to a^2\xi$, $\varphi \to a\varphi$, $w \to a^{-1}w$, $\eta \to a^2\eta$. Это позволяет искать частное решение подмодели в виде

$$\varphi = |\xi|^{1/2}A(z), \qquad w = |\xi|^{-1/2}B(z), \qquad \eta = \eta_0\xi. \tag{4.19}$$

Пусть $\xi < 0$, $-1 < \eta_0 < 0$. Подставляя (4.19) в (4.8), получаем уравнение для нахождения функций $A(z)$, $B(z)$

$$-A^2/2 + A'B + 1 + \eta_0 = 0, \qquad (1/2 + 2/\gamma)A - B' = 0, \qquad B(0) = B(1) = 0.$$

Выразим $B(z)$ из первого уравнения системы:

$$B = (A^2/2 - 1 - \eta_0)/A'^2, \tag{4.20}$$

подставим $B'(z)$ во второе уравнение и поменяем ролями переменные A и z. Тогда для нахождения функции $z(A)$ имеем уравнение

$$(\mu^2 - A^2)\frac{d^2z}{dA^2} + A\Big(\frac{4}{\gamma} - 1\Big)\frac{dz}{dA} = 0, \tag{4.21}$$

где $\mu = \sqrt{2(1+\eta_0)}$. Для выполнения граничных условий необходимо потребовать, чтобы при $A = \mu$ и $A = -\mu$ переменная z обращалась в нуль и единицу соответственно. Поэтому интересующее нас решение (4.21) имеет вид

$$z(A) = \frac{\beta(2/\gamma + 1/2, 2/\gamma + 1/2, (\mu - A)/(2\mu))}{\beta(2/\gamma + 1/2, 2/\gamma + 1/2)} \qquad (\gamma > 0, \quad \gamma < -4). \tag{4.22}$$

Формулы (4.22), (4.20) и (4.18) определяют частное решение подмодели (4.11).

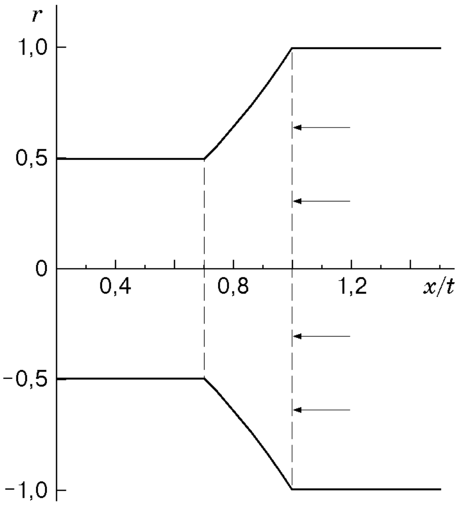

Рис. 1

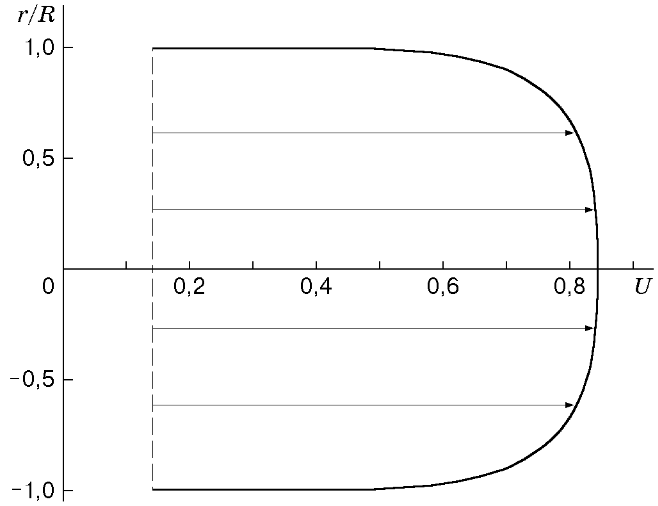

Рис. 2

Характерные режимы течения. Построенные решения подмоделей (4.8)–(4.11) относятся к классу простых волн (3.12). Остановимся подробнее на решении подмодели (4.9) (решения других подмоделей аналогичны). Согласно (4.17), (4.1) и (4.2) рассматриваемое решение системы (1.4) имеет вид

$$u = \frac{x}{t} A\Big(\frac{y}{h}\Big), \quad v = \frac{h}{t} B\Big(\frac{y}{h}\Big) + \frac{2}{\gamma t}\Big(\frac{s_0}{C_1}\Big)^{1/\gamma}\Big(\frac{x}{t}\Big)^{2/\gamma}\Big(A\Big(\frac{y}{h}\Big) - 1\Big), \quad h = \Big(\frac{s_0}{C_1}\Big)^{1/\gamma}\Big(\frac{x}{t}\Big)^{2/\gamma}, \tag{4.23}$$

где функции A и B определены формулами (4.16), (4.14). Величина $k = -h_t/h_x = x/t$ совпадает с бо́льшим корнем характеристического уравнения (2.4), вычисленным на решении (4.23). Следовательно, $u - k < 0$, и при прохождении простой волны по сдвиговому потоку $u = u_0(y)$, $v = 0$, $h = h_0$ частицы жидкости попадают в область простой волны справа. Пусть $\gamma = 1/2$, $C_1 = s_0$ и примыкание простой волны к сдвиговому потоку осуществляется по характеристике $x/t = \mathrm{const} = 1$. В области простой волны происходит уменьшение избыточного давления и ускорение потока (относительно волны). При этом эластичная трубка сужается (рис. 1). Пусть при $x/t = \xi_*$ избыточное давление обращается в нуль, тогда дальнейшее течение описывается сдвиговым потоком, примыкающим к простой волне по характеристике $x/t = \xi_*$. Профиль осевой компоненты скорости U в зависимости от отношения радиальной координаты r к безразмерному радиусу трубки R при $x/t = 1$ показан на рис. 2. При других значениях параметров $\gamma > 0$ и s_0/C_1 характер течения качественно не меняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Педли Т.** Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983.
2. **Волобуев А. Н.** Течение жидкости в трубках с эластичными стенками // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165, № 2. С. 177–186.
3. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
4. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Тешуков В. М.** Модель длинноволновой аппроксимации для сдвигового течения газа в канале переменного сечения // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 1. С. 15–27.

6. **Benney D. J.** Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
7. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
8. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
9. **Тешуков В. М.** Простые волны на сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 48–57.
10. **Sachdev P. L., Varugheze Ph.** Invariance group properties and exact solutions of equations describing time-dependent free surface flows under gravity // Quart. Appl. Math. 1986. V. 43, N 2. P. 465–482.
11. **Varley E., Blythe P. A.** Long eddies in sheared flows // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 103–187.
12. **Чесноков А. А.** Точные решения уравнений вихревой мелкой воды // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 44–55.
13. **Чесноков А. А.** Вихревые движения жидкости в узком канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 38–49.
14. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 21/XII 2000 г.